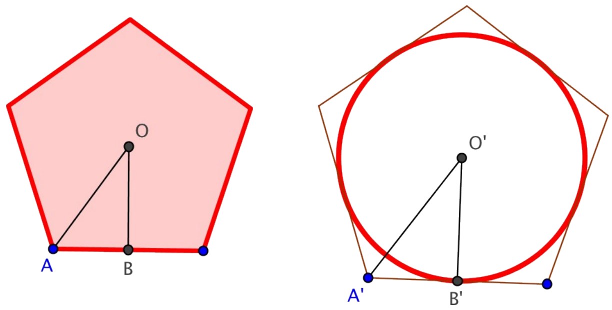
Proprietà isoperimetrica del cerchio

Teorema :Il poligono regolare di perimetro P è più piccolo del cerchio di perimetro P.

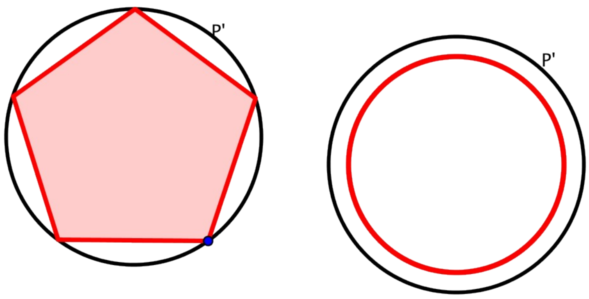
Consideriamo la circonferenza di lunghezza P e il poligono A_n di perimetro P. Sia A l'area del cerchio. Per ogni n, A_n è minore di A.



Sia A_n' il poligono simile ad A circoscritto alla circonferenza e sia P' il suo perimetro. Ovviamente P'>P e quindi A'B'= P'/2n > AB=P/2n. Per la similitudine dei triangoli ABO e A'B'O' risulta O'B'>OB e quindi

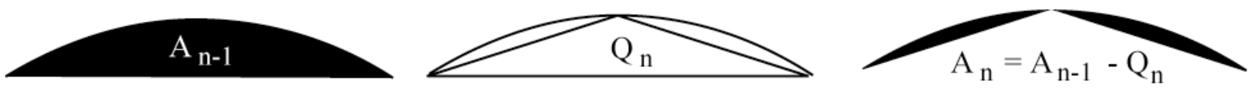
$$P \times O'B' = 2\pi r^2 = 2A > P \times OB = 2A_n .$$

Dunque $A > A_n$.
Si può dimostrare sinteticamente che lim A_n =A. Infatti per n abbastanza grande A- A_n <e dove e è una grandezza piccola a piacere.
Consideriamo la circonferenza circoscritta ad A_n, la sua lunghezza P' è maggiore di P e quindi la sua area è maggiore di A. Abbiamo dunque A- A_n < A'- A_n e questa grandezza al crescere di n diventa più piccola di una grandezza assegnata.



Euclide (Libro XII, proposizione 2)

Se a una grandezza si toglie una parte più grande della sua metà e da questa una parte più grande della sua metà e così di seguito, la grandezza che resta è più piccola di una grandezza arbitraria.



$2Q_n > A_{n-1}$

Teorema
Fra tutte le figure piane di perimetro fissato, il cerchio ha area massima.

Dimostrazione

La funzione $A(P_n) = \frac{p^2}{n * tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}$ rappresenta l'area del poligono regolare di n lati

Calcoliamone il limite quando $x \to \infty$

$Ponendo\ \frac{\pi}{n} = t, ossia\ n = \frac{\pi}{t}\ ed\ trasformando\ la\ tangente, otteniamo$

$$A(n) = \frac{p^2}{n \cdot \frac{sen\frac{\pi}{n}}{cos\frac{\pi}{n}}} = \frac{p^2}{\frac{\pi}{t} \cdot \frac{sen\, t}{\cos t}}$$

$$Calcoliamo\ ora\ \lim_{t \to 0} \frac{p^2}{\frac{\pi}{t} \cdot \frac{sen\, t}{\cos t}} = \frac{p^2}{\pi}\ perché\ \lim_{t \to 0} \frac{sen\, t}{t} = 1\ e\ \lim_{t \to 0} \cos t = 1$$

$M\ a\ quando\ n\ \to \infty,$
$il\ poligono\ tende\ al\ cerchio\ e\ quindi\ \ il\ perimetro\ p = 2\pi \cdot r.$

$$Quindi\ \frac{p^2}{\pi} = \frac{(2\pi \cdot r)^2}{\pi} = \pi \cdot r^2\ che\ rappresenta\ l'areadel\ cerchio$$