Problema duale

Il problema di trovare tra le figure di dato perimetro di una fissata famiglia (rombi, rettangoli, quadrilateri, poligoni regolari ecc) quella di **area massima** ha un corrispettivo duale: trovare tra le figure di data area di una fissata famiglia quella di **perimetro minimo**. In realtà i due problemi sono strettamente legati e la soluzione di uno è, sotto certe ipotesi, anche la soluzione dell'altro. Riportiamo il ragionamento che viene fatto nel caso dei rettangoli, ma l'argomento e del tutto generale e può applicarsi anche agli altri tipi di poligono.

Dualità per i rettangoli

Tra tutti i rettangoli di data area quello con il perimetro minimo è il quadrato.

Dimostrazione

Vogliamo dimostrare che dato un qualunque rettangolo di area A, il suo perimetro P è P $\geq P_0$ dove P_0 è il perimetro del quadrato di area A.

Consideriamo un rettangolo di area A e perimetro P, allora il quadrato di perimetro P ha area $A_0 \geq A$ perché il quadrato, dato il perimetro, è la figura che massimizza l'area. Costruiamo ora il quadrato di area A, il suo perimetro è più piccolo di P_0 dato che al crescere dell'area cresce anche il perimetro e viceversa.

La dimostrazione va bene in generale se si dimostra che la figura che risolve il problema (in questo caso il quadrato) ha la proprietà che il suo perimetro cresce se e solo se cresce la sua area. Cioè la funzione A(P) per i quadrati è monotona crescente.