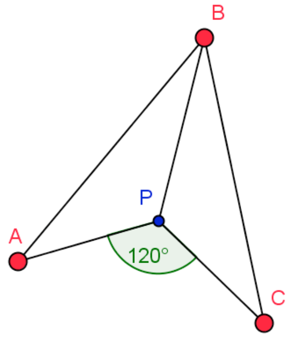
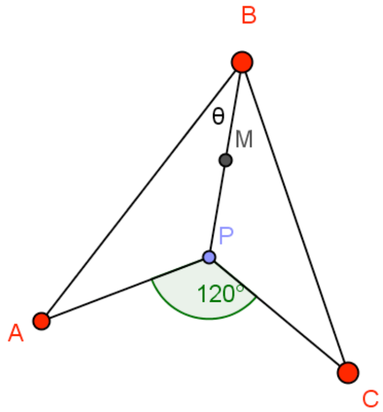
Perché 120°

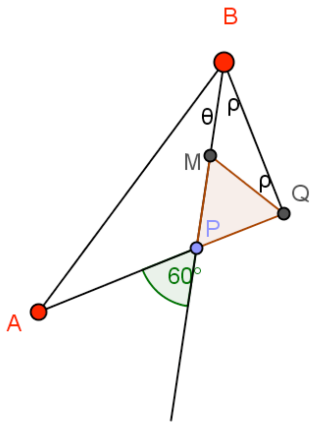
Lemma
Consideriamo un triangolo isoscele ABC con l'angolo in B minore di 120°. Sia P il punto della bisettrice dell'angolo in B tale che l'angolo APC sia un angolo di 120°. Allora
$AB+BC > PA+PB+PC$



Dimostrazione
Sia M il punto medio del segmento PB. Basta dimostrare che $AP+PM<AB$ In questo caso infatti avremmo $2AP+2PM<2AB$ cioè $AP+PC+PB<AB+BC$



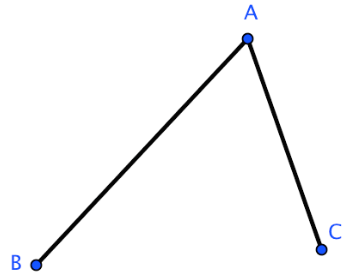
Costruiamo il triangolo equilateroPMQ e congiungiamo Q con B. Abbiamo $PM=MQ=MB$ e dunque l'angolo $MQB=MBQ=\rho$



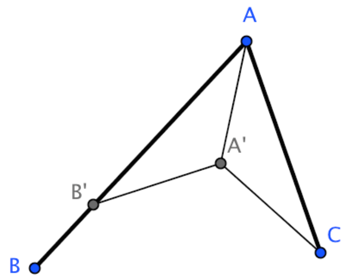
Ne segue che $ABQ = \theta+\rho < BQA=60°+\rho$ dato che $\theta <60°$. Nel triangolo ABQ il lato $AQ < AB$ dato che ad angolo minore corrisponde lato minore.

Teorema
Se in un punto di diramazione concorrono due rami che formano un angolo minore di 120° *allora esiste una rete più corta che collega i due estremi.*

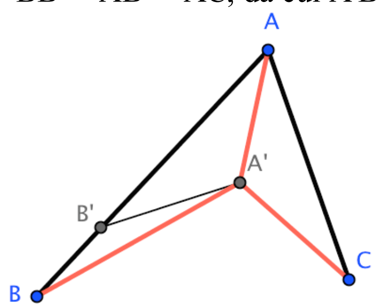
Dimostrazione
Sia A un punto di diramazione di una rete. Supponiamo che AB>AC.



Consideriamo il punto B' sul segmento AB in modo che AC=AB'. Poiché l'angolo BAC<120° possiamo costruire un punto A' tale che A'A+A'B'+A'C < AB'+AC



e quindi BB' + A'A + A'B' + A'C < BB' + AB' + AC, da cui A'B + A'A + A'C < AB + AC



La rete rossa è più corta di quella nera e collega gli stessi punti.
In particolare se una rete è una rete minima da un punto di diramazione escono esattamente tre rami che formano un angolo di 120° infatti non possono uscire ne uno, ne due rami, ma neanche 4 dato che in questo caso un angolo tra due rami sarebbe necessariamente più piccolo di 120° .