Un modello matematico della riflessione e rifrazione.

Proposizioni iniziali
1. *In un dato mezzo la luce si muove con una velocità costante lungo una retta*[1].
2. *La velocità della luce dipende dal mezzo*
3. *Tra tutti i possibili percorsi per andare da un punto A ad un punto B, la luce segue quello più rapido*.

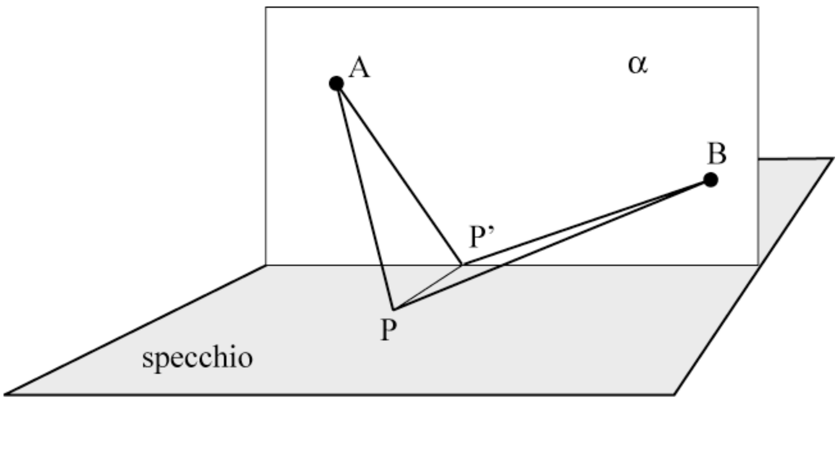
Da queste premesse possiamo dedurre le leggi della riflessione e della rifrazione.

Riflessione

Definizione
Gli *specchi* sono delle superfici che riflettono i raggi luminosi.

In altre parole un raggio luminoso che si muova in un dato mezzo, se incontra un specchio cambia la sua direzione. I due teoremi seguenti dicono, fruttando la premessa 3, come cambia la direzione di un raggio di luce per effetto di una riflessione.

Teorema 1
Se un raggio di luce si riflette in uno specchio piano in un punto P *allora il raggio incidente e quello riflesso si trovano su un piano perpendicolare allo specchio*



Dimostrazione

---

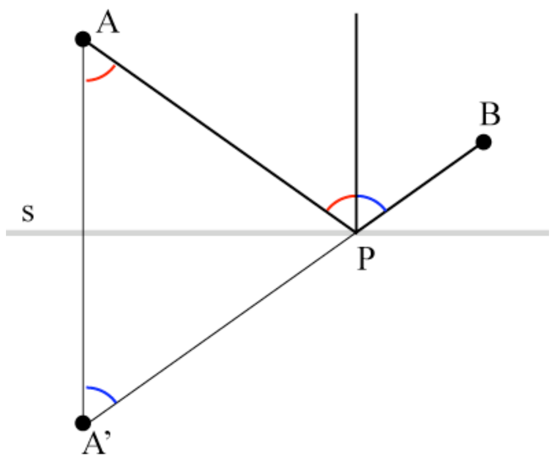
[1] Il percorso rettilineo della luce può essere omesso nelle premesse e dimostrato usando il fatto che se la velocità è costante il minor tempo di percorrenza è equivalente al minor spazio percorso e il minor spazio che unisce due punti è la *geodetica* cioè una retta.

Sia A un punto del raggio incidente e B un punto del raggio riflesso P il punto dello specchio dove avviene la riflessione. Dobbiamo dimostrare che il piano APB è perpendicolare allo specchio. Sappiamo, per la terza premessa, che la luce deve seguire il percorso più rapido per andare da A a B toccando lo specchio e sappiamo anche che, per la premessa 1, il percorso da A a P e da P a B deve essere rettilineo. Dato che, per la premessa 2, la velocità nel tratto AP è la stessa di quella nel tratto PB, il tempo sarà minimo se lo sarà la distanza AP+PB. Se, per assurdo, il punto P non si trovasse sul piano α per AB perpendicolare al piano dello specchio, allora, considerando il segmento PP' ortogonale al piano α, abbiamo i triangoli AP'P e BP'P rettangoli in P' le cui ipotenuse, AP e BP, risultano più lunghe dei cateti AP' e BP' e dunque il percorso che seguirebbe la luce per andare da A a B passando per P sarebbe più lungo di quello da A a B passando per P' contraddicendo la premessa tre.

Come conseguenza abbiamo che il raggio riflesso si trova nel piano passante per il raggio incidente e la *normale allo specchio* nel punto di incidenza.
Il teorema può generalizzarsi al caso di specchi non piani considerando il piano tangente alla superficie nel punto dove incide il raggio luminoso.

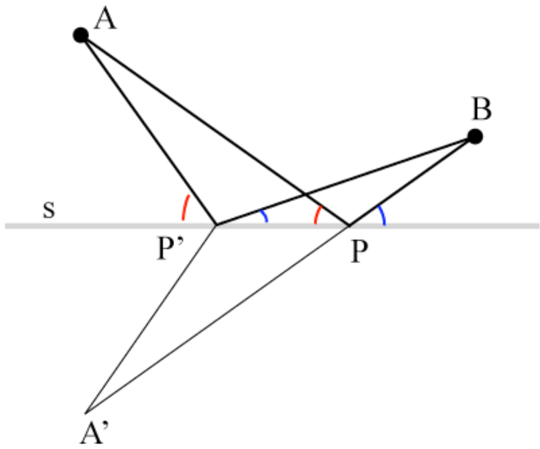
Teorema 2
Se un raggio di luce si riflette in uno specchio piano in un punto P *allora il raggio incidente e quello riflesso formano angoli uguali con la normale allo specchio nel punto* P.

Dimostrazione
Osserviamo che, se s è la retta dove il piano che contiene i raggi luminosi incontra il piano dello specchio, esiste uno e un solo punto P su s tale che gli angoli che i segmenti AB e BP formano con la normale siano uguali.



Per trovare questo punto basta considerare il simmetrico A' di A rispetto alla retta s e congiungere A' con B. Il punto P dove questa retta incontra s è il punto cercato dato che il triangolo APA' è isoscele e la retta AA' è parallela alla normale.

E' facile vedere che per ogni altro punto P' su s gli angoli non sono uguali. Infatti, sapendo che in un triangolo l'angolo esterno è maggiore dell'angolo opposto, risulta,



relativamente al triangolo APP' , AP's > APs e relativamente al triangolo BPP' , BPs> BP'P. Ma APs=BPs essendo uguali gli angoli con la normale, e dunque AP's > BP's ed essendo questi due angoli diversi lo saranno anche quelli con la normale per P'. E' facile ora vedere che il punto della retta s che minimizza il percorso dei raggi luminosi e quindi il tempo di percorrenza è proprio P dato che, per ogni altro punto P' risulta

$$AP' + P'B > AP + PB$$

essendo AP'=A'P' , AP=A'P e, nel triangolo A'P'B, il lato A'B è minore della somma A'P + P'B.

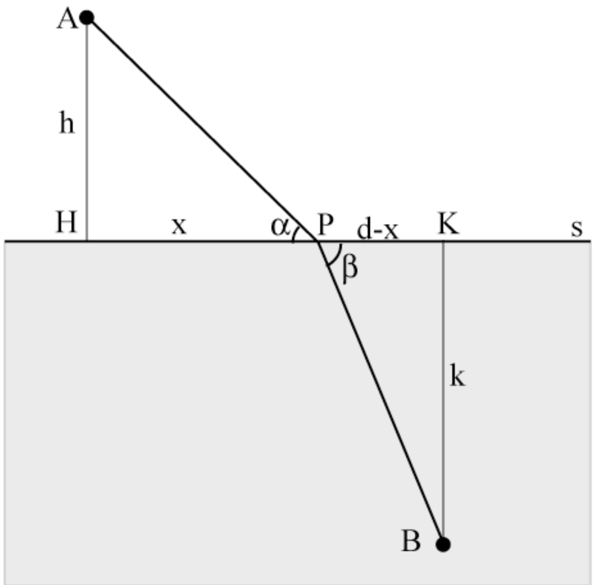
Rifrazione

A partire dalle stesse premesse vediamo ora cosa succede quando la luce passa da un mezzo a un altro. Premettiamo il seguente

Lemma

Data una retta s, *due punti* A *e* B *in due semipiani diversi e un numero positivo* n, *detti* H *e* K *le proiezioni ortogonali di* A *e* B *sulla retta* s, *esiste un unico punto* P *sul segmento* HK *tale che* $\cos(\alpha) / \cos(\beta) = n$ *essendo* α =APs e β =BPs.

Dimostrazione



Sia P un punto della retta s e x la sua distanza da H. Siano h e k le distanze di A e B dalla retta s e d la distanza di H da K. Abbiamo

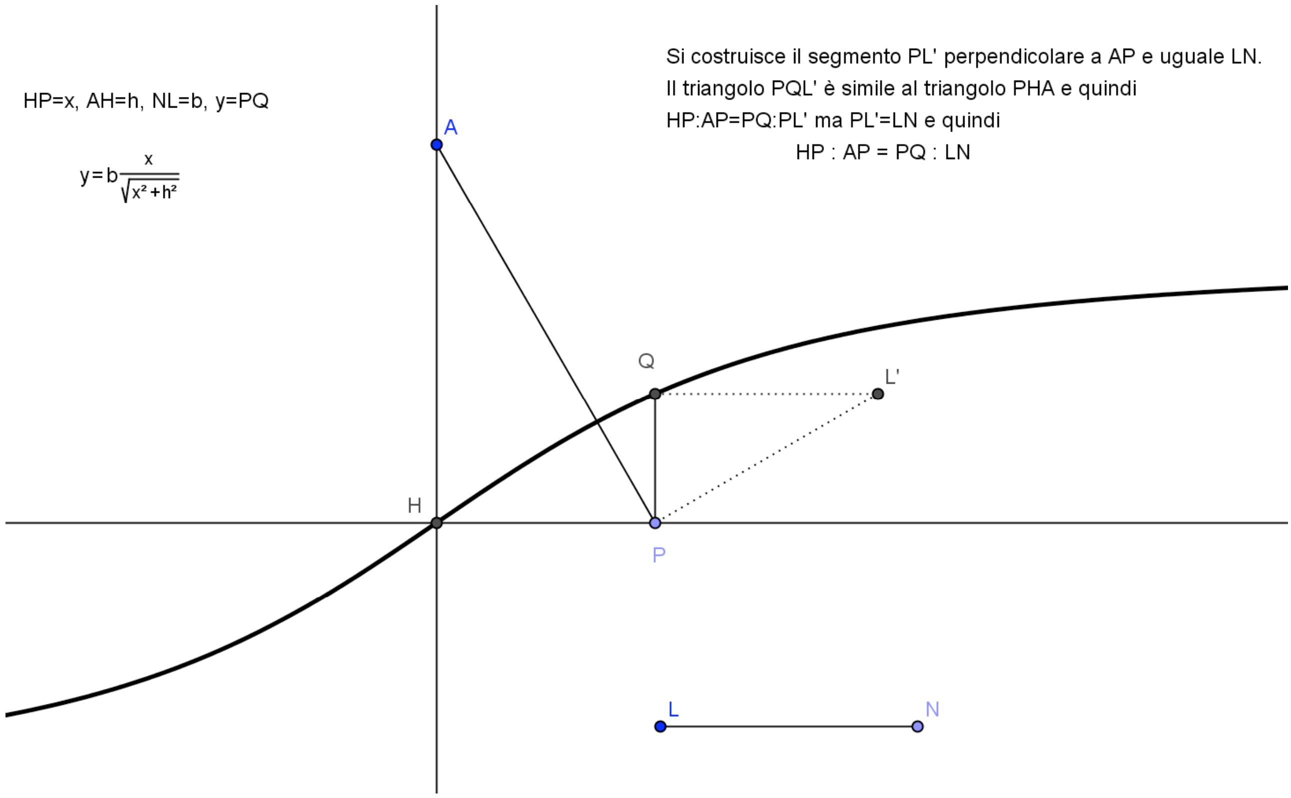
$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} \qquad \cos(\beta) = \frac{d - x}{\sqrt{(d - x)^2 + k^2}}$$

e dobbiamo dimostrare che esiste un unico valore x, $0 \le x \le d$, tale che

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = n \frac{d - x}{\sqrt{(d - x)^2 + k^2}}$$

La dimostrazione rigorosa di questa proprietà richiede nozioni di analisi matematica, possiamo tuttavia vedere che la soluzione esiste graficamente.
Fissato un sistema di coordinate con l'origine in H e s come asse delle ascisse possiamo disegnare il grafico delle funzione f(x) a primo membro e quello della funzione g(x) a secondo membro e vedere se i due grafici si intersecano in un punto T. Se questo punto ha coordinate (x_0,y_0) = T allora $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$ e quindi $f(x_0) = g(x_0)$. Possiamo disegnare le funzioni con excel o con un qualunque software di geometria dinamica.

Un modo possibile usando geogebra è il seguente Il grafico.ggb



Data una costante b che rappresentiamo con un segmento LN, a partire da A, s e P costruiamo la proiezione ortogonale H di A su s e, sulla perpendicolare a s per P, il punto Q tale che

$$HP : AP = PQ : LN$$

al variare di P il punto Q descrive il grafico della funzione

$$f(x) = b\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

Fatto questo, per avere tutti i valori positivi della costante n, definiamola come rapporto n=ML : LN su un dato segmento MN. In questo modo, al variare di L sul segmento MN otteniamo tutti i numeri reali positivi, nella forma di rapporto ML:LN. Come fatto prima costruiamo i grafici delle due funzioni

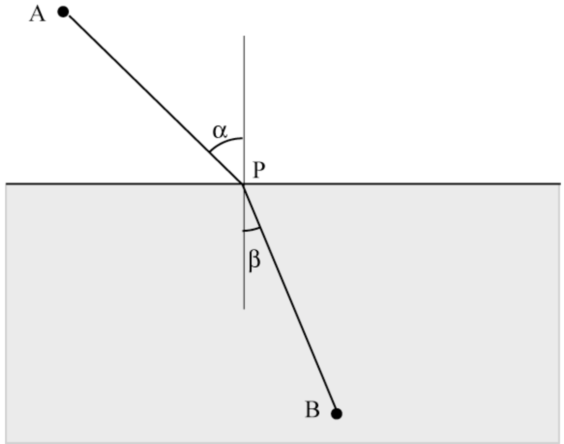
$$f(x) = b\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} \qquad g(x) = a\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+k^2}}$$

Il punto in cui si intersecano sarà la soluzione cercata (vedi Il bagnino.ggb)

Teorema 3
Supponiamo che un raggio di luce passi da un determinato mezzo a un'altro. Sia AP *in raggio incidente e* PB *quello rifratto, e sia* r *è la normale in* P *alla superficie di separazione dei due mezzi. Allora, se* v *è la velocità della luce nel primo mezzo e* v' *quella nel secondo mezzo,* α *l'angolo del raggio incidente e* β *l'angolo del raggio rifratto con la normale, allora*

$$\sin(\alpha)/\sin(\beta) = v/v'.$$

Dimostrazione.



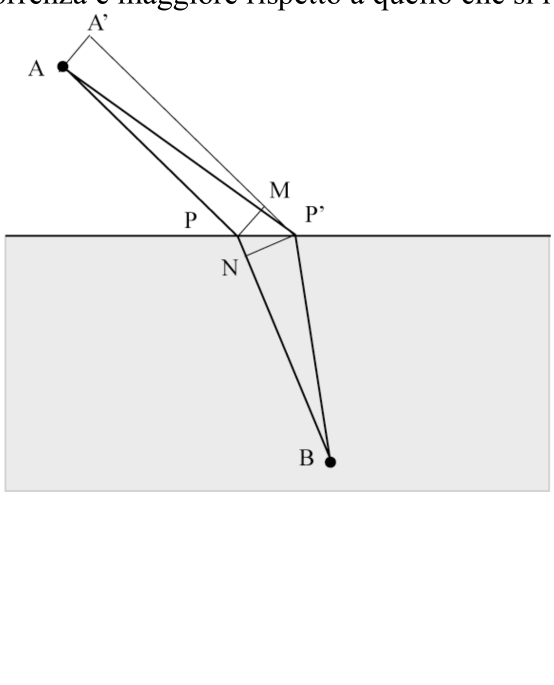
Siano α e β gli angoli indicati in figura, allora, dal lemma precedente, sappiamo che, dato un numero positivo n esiste un ben determinato punto P tale che

$$\sin(\alpha)/\sin(\beta) = \cos(\pi/2-\alpha)/\cos(\pi/2-\beta) = n$$

Prendiamo n =v/v' e sia dunque P il punto per il quale

$$\sin(\alpha)/\sin(\beta) = v/v'.$$

Dobbiamo allora dimostrare che il percorso che segue la luce è proprio quello che passa per quel ben definito punto P. Per fare questo basta dimostrare che, per ogni altro possibile percorso della luce AP'B, il tempo di percorrenza è maggiore rispetto a quello che si realizza passando per P.



Essendo nei due mezzi le velocità costante abbiamo che il tempo t per percorre il tratto AP' è t=AP'/v mentre, nel secondo mezzo, il tempo t' per percorre quel secondo tratto è t'=P'B/v'.
Si deve quindi dimostrare che

$$\frac{AP'}{v}+\frac{P'B}{v'}>\frac{AP}{v}+\frac{PB}{v'}$$

Costruiamo la retta P'A' parallela al raggio AP, il rettangolo PAA'M e il semento P'N perpendicolare a PB. Risulta, essendo l'ipotenusa di un triangolo rettangolo maggiore dei suoi cateti,

$$AP' > P'A' = P'M+MA' = P'M+AP$$

e

$$P'B>BN=BP-NP$$

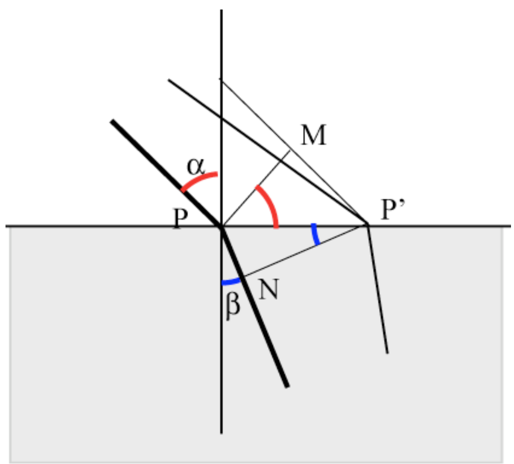
dunque

$$\frac{AP'}{v}+\frac{P'B}{v'}>\frac{AP}{v}+\frac{P'M}{v}+\frac{BP}{v'}-\frac{NP}{v'}=\frac{AP}{v}+\frac{PB}{v'}+\left[\frac{P'M}{v}-\frac{NP}{v'}\right]$$

Per concludere basterà dimostrare che la quantità in parentesi quadra è nulla cioè che

$$\frac{P'M}{NP}=\frac{v}{v'}$$

Ma per come è stata costruita la figura risulta



P'M = PP' sin(α) e NP = PP'sin(β) e dunque il loro rapporto vale sin(α)/sin(β) che è proprio uguale a v/v'.

.