Sul problema dell'esistenza di oggetti che minimizzano (o massimizzano) una data grandezza.

Consideriamo un insieme ***A*** di oggetti e una applicazione F che associa ad ogni oggetto **a** di ***A*** un numero reale positivo F(**a**) corrispondente alla sua "grandezza".

$$\boldsymbol{A} \text{ ---------->} \mathbf{R}$$

In questo laboratorio tratteremo, tra gli altri, i casi seguenti:
A è l'insieme:

1. delle reti **a** che collegano 3 punti dati e F(**a**) la lunghezza della rete **a**
2. delle reti **a** che collegano n punti dati e F(**a**) la lunghezza della rete **a**
3. dei rettangoli **a** di dato perimetro e F(**a**) l'area del rettangolo **a**
4. dei triangoli **a** di data base e dato perimetro e F(**a**) l'area del triangolo **a**
5. dei triangoli **a** di dato perimetro e F(**a**) l'area del triangolo **a**
6. dei poligoni **a** di n lati e dato perimetro e F(**a**) l'area del poligono **a**
7. delle "figure chiuse" **a** di dato perimetro e F(**a**) l'area della "figura" **a**

Un oggetto $\mathbf{a}_0$ di ***A*** è un massimo per F se

$$F(\mathbf{a}) < F(\mathbf{a}_0) \text{ per ogni } \mathbf{a} \text{ in } \boldsymbol{A}.$$

Il problema che ci poniamo è di sapere se esiste un massimo e nel caso determinarlo.
Come si intuisce saper risolvere questo problema è molto utile nelle applicazioni perché si tende sempre a cercare soluzioni che massimizzino (o minimizzino) determinate variabili (energia, guadagno, spesa ecc) e si capisce anche che il problema è estremamente complesso.

Il caso più semplice è quello relativo ai rettangoli isoperimetrici (caso 3) dato che in questo caso l'insieme ***A*** può essere identificato con uno spazio topologico, uno spazio cioè nel quale sia definito il concetto di intorno, di "oggetti vicini". Infatti se 4p è il dato perimetro dei nostri rettangoli, possiamo pensare ad ***A*** come l'intervallo chiuso e limitato [0,p] infatti a ogni x di questo intervallo corrisponde un rettangolo di lati p+x e p-x e viceversa se **a** è un rettangolo di perimetro 4p il suo lato più piccolo sarà minore di p (perché in caso contrario il perimetro sarebbe più grande di 4p) e dunque avrà una lunghezza p-x con $0 \leq x \leq p$. A tale rettangolo è dunque associato il numero x dell'intervallo [0,p]. La funzione F che associa al rettangolo **a** la sua area si riduce al prodotto della base per l'altezza:

$$F(x)=(p-x)(p+x) = p^2 - x^2 .$$

E' facile ora vedere che questa funzione ha un massimo per x=0 dato che per ogni $0 \leq x \leq p$ (cioè per ogni rettangolo di perimetro 4p) $F(x) < p^2$ (cioè l'area del rettangolo è minore dell'area del quadrato di lato p). Anche la *forma geometrica del grafico della funzione* che, come è noto, risulta essere una parabola con la concavità verso il basso, ci dice che esiste il massimo in corrispondenza al vertice della parabola che si ottiene per x=0. (vedi scheda III.4)

Il *teorema di Weierstrass* afferma che se F è una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato [a,b] a valori reali

$$F : [a,b] \text{ ---->} \mathbf{R}$$

allora esiste un punto x_M nell'intervallo [a,b] che rende massima la F e un punto x_m nell'intervallo [a,b] che la rende minima.

Questo fondamentale teorema, la cui dimostrazion si basa sulla continuità della funzione F, è stato esteso a situazioni molto più complesse e in generale si enuncia dicendo che se

F : ***A*** ----------> **R**

è una funzione continua di uno *spazio topologico* ***A*** nell'insieme dei numeri reali e se ***A*** è *compatto* allora F ha un punto di massimo e un punto di minimo (assoluto). Più in generale ancora il teorema si riduce ad affermare che una funzione continua tra spazi topologici trasforma un insieme compatto in un insieme compatto.
Naturalmente la cosa presuppone la conoscenza di una struttura topologica sull'insieme ***A*** che renda continua la funzione F e ***A*** compatto (cosa che nei nostri esempi è tutt'altro che facile).

Per affrontare il problema si può allora seguire delle strade più dirette. Nel seguito trattiamo il caso dei massimi ma un analogo discorso si può fare per i minimi.

In generale nei nostri esempi abbiamo a priori una congettura: l'oggetto di ***A*** che massimizza F è $\mathbf{a}_0$.
Nel casi dei triangoli isoperimetrici di base assegnata (caso 4) congetturiamo che $\mathbf{a}_0$ sia il triangolo isoscele, nel caso più generale dei triangoli isoperimetrici (caso 5) congetturiamo che $\mathbf{a}_0$ sia il triangolo equilatero, nel caso dei poligoni di ugual numero di lati isoperimetrici(caso 6) congetturiamo che $\mathbf{a}_0$ sia il poligono regolare di n lati. Infine nel caso più generale delle figure convesse isoperimetriche (caso 7) congetturiamo che $\mathbf{a}_0$ sia il cerchio.
Per dimostrare la congettura possiamo seguire un ***metodo diretto*** dimostrando che

$$F(\mathbf{a}) < F(\mathbf{a}_0) \text{ per ogni } \mathbf{a} \text{ in } \boldsymbol{A}$$

come nel caso dei rettangoli di dato perimetro o anche nei teoremi sul volume massimo relativi a parallelepipedo e cilindro della lezione 6, oppure impostare una ***dimostrazione per assurdo.***

In questo caso supponiamo per assurdo che $\mathbf{a}_0$ non massimizza F. Allora o *non esiste* in ***A*** un elemento che massimizza F, oppure esiste in ***A*** un elemento $\mathbf{a}_1$ che massimizza F diverso da $\mathbf{a}_0$.
Nei casi che abbiamo considerato riusciamo a dimostrare rigorosamente solo la seconda cosa cioè che, se esiste un elemento di ***A*** che massimizza F, allora questo elemento è $\mathbf{a}_0$. L'argomento in generale è il seguente: se, per assurdo, non è $\mathbf{a}_0$ l'elemento che massimizza F questo elemento *che sappiamo esistere in **A*** dovrà essere un elemento $\mathbf{a}_1$ è diverso da $\mathbf{a}_0$. Ma a partire da $\mathbf{a}_1$, proprio perchè $\mathbf{a}_1$ è diverso da $\mathbf{a}_0$,riusciamo a costruire un ulteriore elemento $\mathbf{a'}_1$ tale che $F(\mathbf{a'}_1) > F(\mathbf{a}_1)$ e questo è assurdo perché avevamo supposto che fosse $\mathbf{a}_1$ l'elemento che massimizza F. (Vedasi: Poligoni isoperimetrici di area massima scheda 4.6 – Verso il cerchio scheda 4.8)

Un buon esempio è quello dei triangoli.
Riusciamo a dimostrare che se ***A*** è l'insieme di tutti i triangoli con dato perimetro e data base allora il triangolo di area massima è il triangolo $\mathbf{a}_0$ che ha gli altri due lati uguali. La dimostrazione è diretta dato che si riesce a calcolare l'area di *ogni* triangolo di ***A*** e a dimostrare che queste aree sono tutte minori di quella di $\mathbf{a}_0$. Sia che si usi l'arco di ellisse sia che si usi la formula di Erone (vedi scheda 4.1)

Non riusciamo invece a dimostrare completamente che, se ***A*** è l'insieme di tutti i triangoli di dato perimetro, allora quello equilatero ha area massima. Infatti la dimostrazione diretta basata sulla formula di Erone usa una disuguaglianza sulle medie che non sappiamo dimostrare completamente e quella per assurdo usa l'esistenza di un triangolo che massimizza l'area (vedi scheda 4.1).

Lo stesso problema si pone per i poligoni :
sappiamo dimostrare rigorosamente solo che *se esiste un poligono di n lati e perimetro p che rende massima l'area questo poligono deve avere tutti i lati uguali* (vedi scheda 4.6).

Per dimostrare completamente che, fissato il perimetro e il numero dei lati, è il poligono regolare quello che massimizza l'area ci manca di dimostrare che

1. se esiste un poligono di n lati e perimetro p che massimizza l'area questo poligono deve avere tutti gli angoli uguali.
1. esiste un poligono di n lati perimetro p di area massima.

Ovviamente il problema è complicato dal fatto che l'insieme ***A*** dei poligoni di n lati e perimetro p è molto grande e complicato ed è difficile calcolare per ognuno di questi l'area o definire in questo insieme una struttura di spazio topologico che ci permetta di applicare il teorema di Weierstrass..

Consideriamo ora le reti che collegano tre punti A,B,C e sia ***A*** l'insieme di tutte queste reti. La funzione F è quella che associa ad ogni rete la sua lunghezza. Il problema è quello di minimizzare F. Anche in questo caso non possiamo dimostrare completamente il teorema conclusivo.
Facciamo il caso delle reti con un punto P di diramazione: ***A*** è l'insieme dei punti del piano e F è la funzione che associa al punto P la somma delle distanze di P da A,B,C

$$F(P)=PA+PB+PC$$

Supponiamo che il triangolo ABC non abbia angoli più grandi di 120°. Si tratta di trovare un punto P_0 che minimizza F. La congettura è che il punto P_0 sia il punto che vede i tre lati del triangolo ABC con un angolo di 120°. Questa congettura si è potuta verificare sperimentalmente con gli esperimenti fisici sui pesi e usando il concetto di energia potenziale ed il fatto che in un sistema in equilibrio l'energia potenziale è minima.. Da una punto di vista puramente geometrico possiamo dimostrare (scheda II.1) che se P è un punto diverso P_0 allora esiste un ulteriore punto P' tale che F(P) >F(P'). Questo punto P' pur guardando un lato del triangolo ABC con un angolo di 120° non vede nello stesso modo gli altri lati e quindi *questo punto P' non è uguale a* P_0. Non siamo quindi capaci di dimostrare direttamente che per ogni punto P di ***A*** risulta sempre $F(P) > F(P_0)$ e che quindi P è il punto che minimizza la rete. Siamo capaci di dimostrare che nessun punto P diverso da P_0 può essere il punto che minimizza la rete. Possiamo quindi concludere rigorosamente la nostra dimostrazione se supponiamo che esiste una rete minima. L'esistenza di un punto di minimo in questo caso si può ottenere usando il teorema di Weierstrass in due dimensioni. In questo caso infatti possiamo identificare le reti con il punto P: per ogni punto P abbiamo la rete PA,PB, PC e, viceversa, ogni rete che prendiamo in considerazione si dirama in un ben determinato punto P. Inoltre possiamo restringere la ricerca di una rete minima al caso che P sia interno al triangolo ABC dato che le altre sono sicuramente meno interessanti essendo più lunghe. In definitiva l'insieme delle reti "interessanti" ***A*** si identifica con l'insieme dei punti P interni al triangolo ABC e dato che questo insieme è compatto e la funzione F è continua possiamo essere certi sull'esistenza di un punto di minimo. L'animazione elaborata dal gruppo di Trento
(http://matematita.science.unitn.it/laboratorio_max_min/CD-animazioni/html/a2.html)
permette di descrivere il grafico della funzione F(P) attraverso le curve di livello.

Nel caso che il triangolo ABC sia isoscele (AB=BC) possiamo dimostrare rigorosamente l'esistenza di una rete minima. In questo caso infatti (vedi il lemma nella scheda II.1) si può fare la dimostrazione diretta e dimostrare che $F(P) > F(P_0)$ per ogni P del piano come abbiamo fatto per i triangoli equilateri (Scheda IV.3).