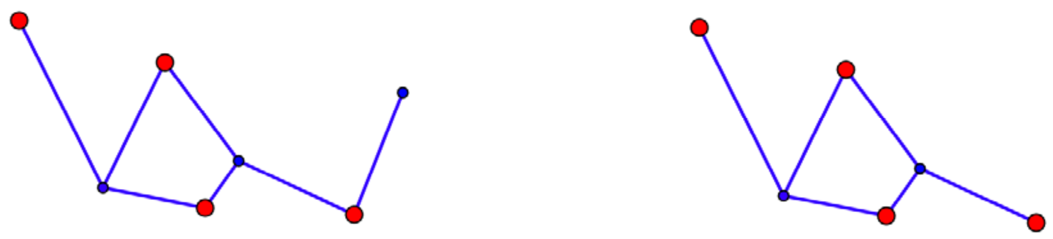
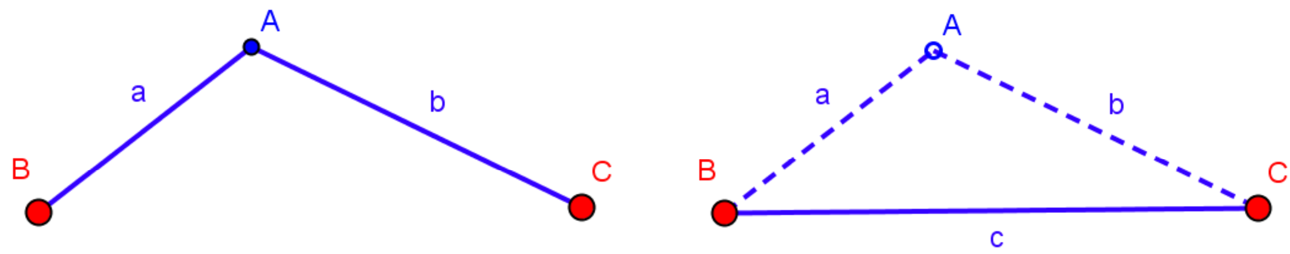
Scheda 2.1
Caratteristiche e teoremi sulle reti minime

1. *Una rete minima è connessa e non contiene cicli (ed è quindi un albero)*
Deve essere connessa perchè deve collegare tra loro tutti i punti dati. Non ci sono cicli perchè se ci fosse un ciclo si potrebbe trovare una rete più corta levando un arco del ciclo: questo non rompe la connessione dei punti dati.

2. *In una rete minima da un punto di diramazione non può partire un solo arco.*
In questo caso infatti questo arco può essere tolto senza alterare la connessione dei punti dati.



3. *In una rete minima da un punto di diramazione non possono uscire solo due archi.*



Dato che il punto A è un punto di diramazione, può essere tolto e gli archi a e b sostituiti con l'arco BC che, per la proprietà triangolare è più corto di a+b. La nuova rete è più corta e non rompe la connessione dei punti dati.

Teoremi sui punti di diramazione

Teorema
Da un punto di diramazione di una rete minima escono esattamente tre archi che formano angoli di 120°

Dimostrazione
Da tale punto infatti non possono uscire né uno né due. Inoltre se due rami formano un angolo minore di 120° possiamo accorciare la rete (Teorema dei 120 gradi) quindi dato che 120x3=360 da un punto di diramazione di una rete minima possono uscire solo 3 archi che formano un angolo di 120°. Quattro o più archi devono averne due che formano un angolo minore di 120°.

Teorema
Se una rete minima collega n *punti dati non può avere più di* n-2 *punti di diramazione.*

Dimostrazione
Sia d il numero di punti di diramazione, il numero dei vertici della rete è allora n+d. Da ogni punto di diramazione escono 3 archi e dagli n punti dati esce sempre almeno un arco. Poiché ogni arco contiene due vertici abbiamo contato in questo modo il doppio degli archi e dunque $n+3d \leq 2a$ per la relazione di Eulero $a=(n+d)-1$ e quindi $n+3d \leq 2n+2d-2$, cioè $d \leq n-2$