Teorema

Tra tutti i rettangoli isoperimetrici il quadrato ha area massima.

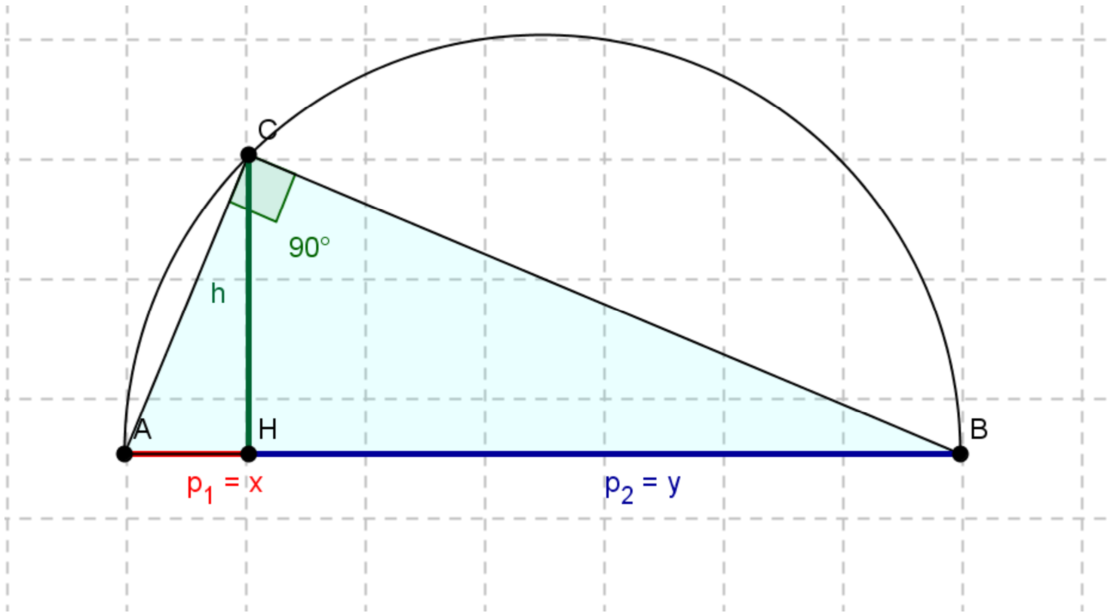
Dimostrazione:

si consideri il rettangolo di dimensioni x e y il quadrato isoperimetrico ha lato $\frac{x+y}{2}$.

Confrontando le aree del rettangolo e del quadrato si ha che

$$A_{rettangolo} = x * y \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = Area_{quadrato}$$, con uguaglianza valida per x=y

La diseguaglianza si può dimostrare applicando il II teorema di Euclide al triangolo rettangolo con proiezioni dei cateti sull'ipotenusa $p_1 = x$ e $p_2 = y$.



Per il II teorema di Euclide si ha che il rettangolo di dimensioni x,y è equivalente al l quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa *i* = x+y, quindi

$x * y = h^2 \le r^2$ con *r* raggio della circonferenza circoscritta, e poiché $r = \frac{x+y}{2}$

si ha $A_{rettangolo} = x * y \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = Area_{quadrato}$

La disuguaglianza precedente esprime anche la relazione che intercorre tra media geometrica $m_g = \sqrt{x * y} \le \frac{x+y}{2} = m_a$ media aritmetica (vedi quesito Maturità Scientifica 2002).

[animazione]