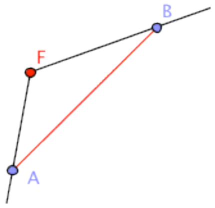
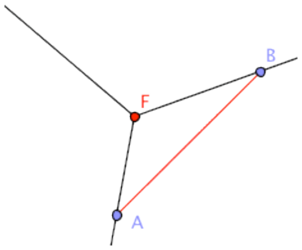
La geometria del punto di equivisione

Definizione
Dato un triangolo A,B,C, *un punto* F *del piano si dice* **punto di equivisione** *di* A,B,C *se i tre lati* AB*,*BC *e* BC *sono visti da F con lo stesso angolo, cioè se* AFB, BFC e CFA *sono angoli di* 120°.

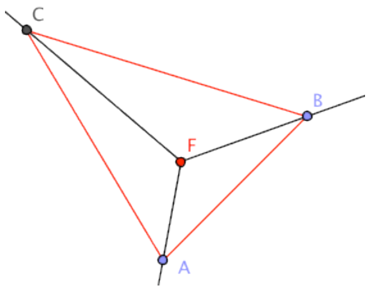
Vediamo per quali triangoli esiste un punto di equivisione.
Supponiamo che esista un punto di equivisione per il triangolo ABC.



In questo caso l'angolo AFB sarà di 120° e quindi i due angoli FAB e FBA saranno minori di 60°.



Il punto C deve trovarsi sull'unica semiretta che esce da F e forma angoli di 120° con le semirette FA e FA.

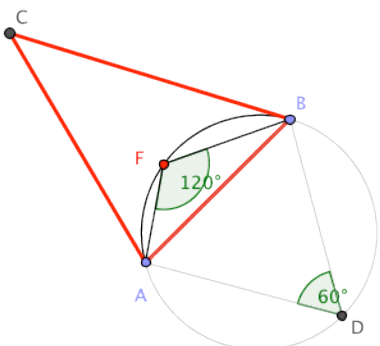


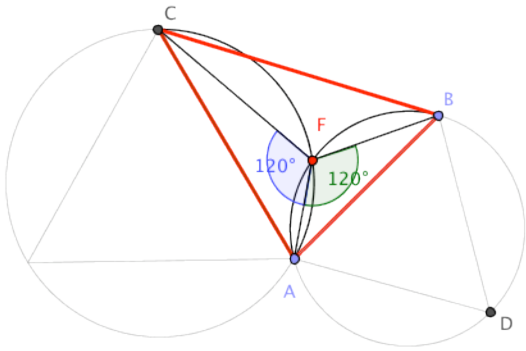
Ne segue che anche l'angolo FAC è minore di 60° e sommando l'angolo BAC è minore di 120°.
Lo stesso argomento vale per gli altri due vertici.

Possiamo quindi concludere che:
se esiste un punto di equivisione per il triangolo ABC allora gli angoli di questo triangolo sono tutti minori di 120°.
Viceversa possiamo dimostrare che se il triangolo ABC ha tutti gli angoli più piccoli di 120° allora esiste uno e un solo punto F tale che i tre angoli AFB, BFC, CFA siano di 120°.
Questo punto può essere costruito in due modi: con due triangoli equilateri o, più semplicemente, con un triangolo equilatero.

Con due triangoli equilateri:

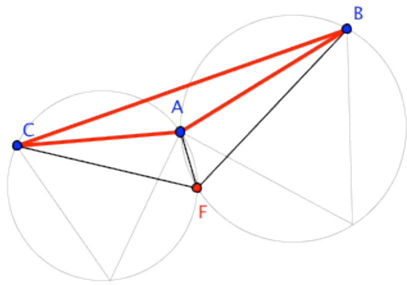
- Costruiamo un triangolo equilatero ABD sul lato AB
- Tracciamo la circonferenza che passa per i tre punti ABD.
- Ogni punto F dell'arco AB, del semipiano del triangolo ABC, da luogo a un angolo AFB di 120° perché in un quadrilatero inscritto in una circonferenza la somma di due angoli opposti (cioè di AFB e ADB) è 180°





Per trovare la giusta posizione di F costruiamo un secondo triangolo equilatero sul lato AC e un secondo cerchio circoscritto al triangolo.
I due archi di circonferenza AC e AB hanno un punto in comune F per il quale i due angoli AFB e AFC sono entrambi di 120°. Il punto in comune esiste ed è interno al triangolo perché l'angolo BAC più piccolo di 120°

Se infatti l'angolo in A fosse più grande di 120° allora le due circonferenze si incontrerebbero negli archi maggiori e quindi l'angolo alla circonferenza non sarebbe più di 120° ma di 60°. In questo caso dunque gli angoli AFB e AFC risulterebbero di 60° e il punto ottenuto intersecando i due archi non ha la proprietà voluta.

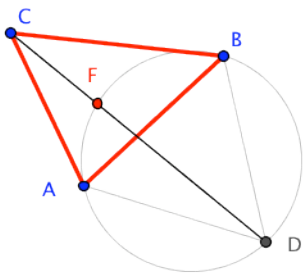


Per concludere la dimostrazione osserviamo che essendo l'angolo giro di 360° l'angolo CFB sarà dato da:

$$CFB=360°-AFB-AFC=120°$$

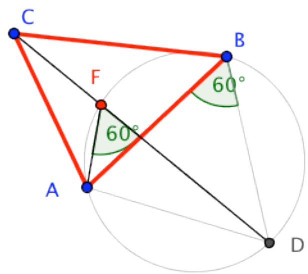
e quindi se costruiamo un terzo triangolo equilatero sul lato CB e la circonferenza circoscritta essa, necessariamente passerà per il punto F dato che, come abbiamo visto, l'angolo CFB è di 120°.
Il fatto che il punto di Equivisione **è unico** dipende dal fatto che AFB=120° se e solo se F si trova sull'arco AB interno al triangolo, e AFC=120° se e solo se F si trova sull'arco di circonferenza AC e due circonferenze che hanno un punto in comune (il punto A) si intersecano in un unico altro punto.

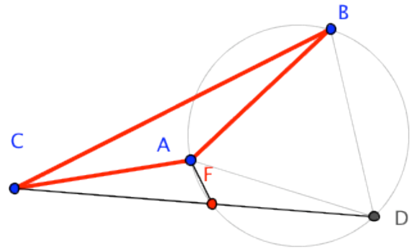
Con un triangolo equilatero:



- Costruiamo il triangolo equilatero ABD sul lato AB del triangolo
- Costruiamo la circonferenza circoscritta al triangolo equilatero
- Congiungiamo D con C
- Sia F il punto di intersezione della circonferenza con il segmento CD

F è un punto di equivisione perché l'angolo AFD è uguale all'angolo ABD dato che insistono sulla stessa corda, ma questo angolo è di 60° e quindi CFA è di 120° e anche AFB è di 120° per la ragione vista precedentemente.
Anche in questo caso l'unicità segue dal fatto la retta CD interseca la circonferenza in due soli punti.





Come nel caso precedente la retta CD interseca la circonferenza internamente al triangolo solo se l'angolo in A non supera i 120°

In conclusione:
Il punto di equivisione di A,B,C esiste se e solo se il triangolo ABC ha tutti gli angoli minori di 120°. In questo caso tale punto è unico e può essere costruito con due o tre triangoli equilateri costruiti sui lati del dato triangolo.