Terza Lezione

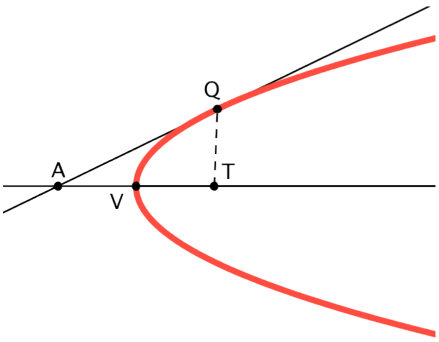
Costruzione della retta tangente a una parabola in un suo punto

- **Scheda III. 1**

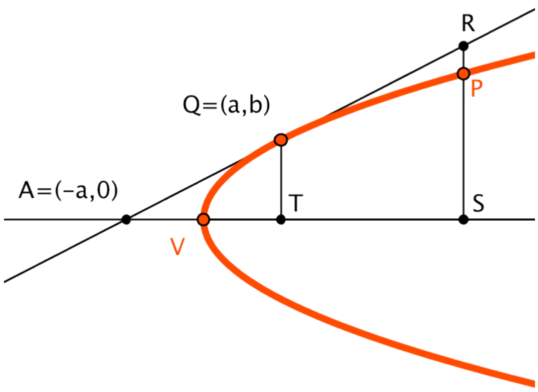
La leggenda delle navi romane incendiate da Archimede

Si discute con gli studenti la definizione di retta tangente a una parabola per arrivare alla seguente definizione: la retta tangente a una parabola in un suo punto Q è quella retta che interseca la parabola nel solo punto Q e la lascia tutta in un solo semipiano.
Resta da vedere se questa retta esiste e come poterla tracciare.

Consideriamo un punto Q di una parabola di vertice V



Tracciamo il segmento QT perpendicolare all'asse e sia A il punto dell'asse tale che AV=VT. Dimostriamo che la retta QA è tangente alla parabola in Q cioè che tutti i punti della parabola si trovano nel semipiano che contiene T.
Anche se questo non è strettamente necessario, usiamo per semplificare la lingua, il linguaggio delle coordinate. Prendiamo come asse delle ascisse l'asse di simmetria della parabola e come origine il vertice della parabola. Supponiamo che la concavità sia rivolta nella direzione delle $x \geq 0$.



Notazioni:

V=(0,0)
Q=(a,b)
A=(-a,0)
P=(x_P, y_P)
R=(x_P, y_R)

Sia *a* l'ascissa di un generico punto Q della parabola diverso dal vertice V (questo si *traduce* algebricamente dicendo che $a > 0$) e *b* la sua ordinata, il punto A tale che AV=VT avrà coordinate $(-a,0)$. Vogliamo dimostrare che la retta AQ è tangente alla parabola.
Per fare questo si deve dimostrare che:

1. la parabola è tutta contenuta in un semipiano
2. la retta QA incontra la parabola solo nel punto Q.

Sia P un generico punto della parabola e siano con x_P e y_P le sue coordinate. Indichiamo con y_R l'ordinata del corrispondente punto R sulla retta AQ.
Le condizioni 1 e 2 diventano

1. $y_P \leq y_R$ per ogni punto P della parabola
2. $y_P = y_R$ se e solo se P=Q

Abbiamo, se p è il lato retto della parabola,

$$b^2 = pa \quad e \ (y_P)^2 = px_P$$

Supponiamo per assurdo che esista un punto P sulla parabola tale che $y_P > y_R$ essendo questi numeri positivi avremmo in questo caso, tenuto conto della similitudine dei triangoli RSA e QTA

$$y_P > y_R \quad \Leftrightarrow \quad y_P^2 > y_R^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_P^2}{b^2} > \frac{y_R^2}{b^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{px_P}{pa} > \frac{(a+x_P)^2}{(2a)^2} \quad \Leftrightarrow \quad 4ax_P > (a+x_P)^2$$

L'ultima disuguaglianza non vale dato che per ogni numero x_P diverso da a abbiamo

$$(a+x_P)^2 - 4ax_P = (a-x_P)^2 \geq 0$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $a=x_P$ cioè se e solo se P=Q.

La costruzione della retta tangente a una parabola che abbiamo descritto precedentemente si trova essenzialmente nella stessa forma nei *Discorsi e Dimostrazioni* di Galileo Galilei (giornata IV). Non avendo Galileo a disposizione il linguaggio moderno il passaggio cruciale nella dimostrazione, che col linguaggio dell'algebra viene espresso con la formula,

$$4xy \leq (x+y)^2$$

viene formulato, in termini di rettangoli e quadrati equivalenti, col linguaggio piuttosto contorto dell'algebra geometrica di Euclide tanto che lo stesso Simplicio non capisce la dimostrazione e dice *non mi quieta, ma mi lascia sospeso*. E' interessante leggere il brano galileiano per confrontare i due linguaggi e esplicitare gli enormi vantaggi dell'algebra letterale. Lo stesso Galileo sembra rendersi conto della pesantezza del vecchio linguaggio e sembra quasi auspicare e forse intuire il cambiamento che avverrà di li a poco con l'opera di Viète.

- **Scheda III.2**

Galileo Galilei, Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze. La tangente alla parabola.

- **Tavola III.1**

Data una parabola e un suo punto disegnare la tangente in quel punto.

- **Tavola III.2**

Data due rette incidenti *a* e *t* e un punto P su *t* disegnare la parabola che ha come asse la retta *a* e come tangente in P la retta *t*. Si può usare lo strumento virtuale "Parabola" costruito nella prima lezione.

Il fuoco della parabola

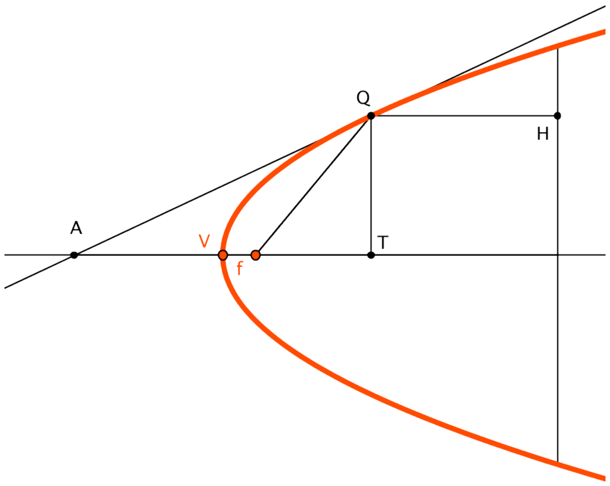
- **Scheda III.3**

Bonaventura Cavalieri *Lo specchio ustorio* (capitolo IX)

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) nella sua opera *Lo specchio ustorio, ovvero trattato delle settioni coniche e alcuni loro mirabili effetti intorno al lume, caldo, freddo, suono, e moto ancora* al capitolo IX, dimostra la seguente *ammirabile* proprietà della parabola.

Teorema (la prima proprietà meravigliosa)
In una parabola di lato retto p, *ogni raggio, parallelo all'asse e incidente internamente alla parabola, si riflette in un raggio che interseca l'asse della parabola in uno stesso punto* F *la cui distanza dal vertice è la quarta parte di* p.

Consideriamo una parabola $\mathcal{P}$ di lato retto p.



Sia QA la retta tangente in Q alla data parabola, sia HQ un raggio incidente in Q parallelo all'asse, sia QF il raggio riflesso e F il punto dove tale raggio incontra l'asse. Dato che l'angolo di incidenza, è uguale all'angolo di riflessione AQF, abbiamo che il triangolo AFQ è un triangolo isoscele:

$$AF=FQ$$

Sia VF=f , VT=VA=x , QT=y , $y^2 = px$.
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo FTQ abbiamo

$$(x+f)^2 = (x-f)^2+y^2$$

Da cui risulta 4xf=px cioè (4f-p)x=0, e dato che Q non coincide col vertice, x>0 e quindi, indipendentemente da x,

$$\boxed{4f = p}$$

Il punto F dove convergono tutti i raggi riflessi è detto **fuoco**.

- **Tavola III.3**

Si chiede di trovare il lato retto di date parabole conoscendo il fuoco.

- **Tavola III.4**

Si chiede di estendere un arco di parabole del quale è noto il fuoco.

- **Tavola III.5**

Era possibile per Archimede bruciare le navi romane che assediavano Siracusa con uno specchio parabolico?

Il parabolografo a filo teso e la direttrice

- **Scheda III.4**

Bonaventura Cavalieri: *La seconda proprietà maravigliosa*

Nel capitolo X dell'opera di Bonaventura Cavalieri sopra riportata viene dimostrata una ulteriore proprietà della parabola, che Cavalieri chiama meravigliosa, perché con essa è possibile costruire un semplice strumento per tracciare con continuità una parabola a partire dal suo fuoco. Dice lo stesso Cavalieri

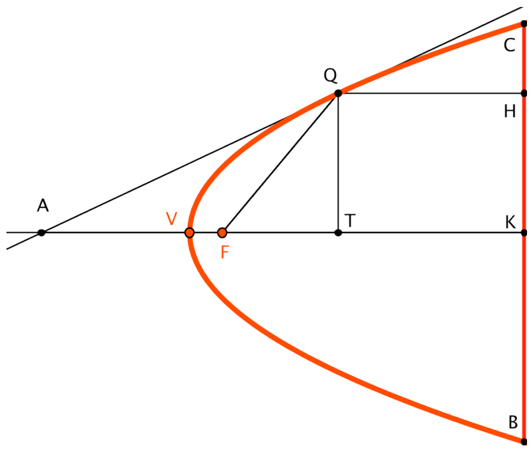
...la dimostratione della qual cosa non ho ancor visto in alcun autore, solo vien accennata tal proprietà dal Keplero nell'Astronomia Ottica , al cap. 4 nella Preparation 4. De Refractionum mensura, mentre insegna un modo di descrivere la parabola con un filo (il che io ancora accennarò qui da basso)

Teorema (la seconda proprietà meravigliosa)

Consideriamo un segmento parabolico di base BC *perpendicolare all'asse con il fuoco in* F. *Sia H un qualunque punto della base e* HQ *un segmento parallelo all'asse che incide la parabola in* Q. *La somma delle distanze* HQ+QF *non dipende dalla posizione di* H *ma è costante.*

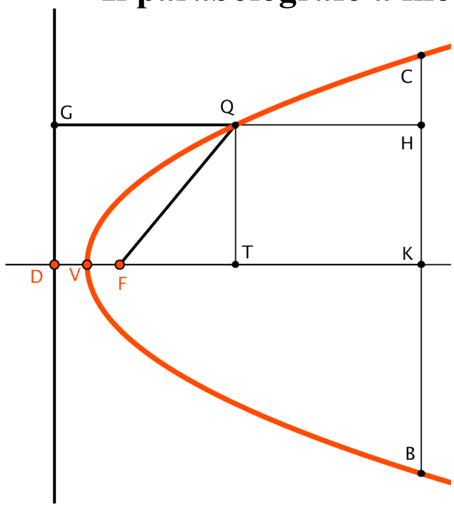
Dimostrazione

Sia k = VK, abbiamo HQ = KT= k-x, QF = FA = x+VF = x+p/4, da cui HZ+ZF = k+p/4 (quantità che non dipende da H).



Questa proprietà della parabola permette di costruire un nuovo semplice strumento per tracciare con continuità un arco di parabola e per questo forse per Cavalieri è meravigliosa.

- **Il parabolografo a filo teso virtuale** (realizzato con geogebra).



Dal teorema precedente segue che la retta perpendicolare all'asse che ha distanza dal vertice V della parabola uguale alla distanza del fuoco da V, retta chiamata **direttrice**, è tale che, per qualunque punto P della parabola la distanza di P dal fuoco è uguale alla distanza di P dalla direttrice.

Abbiamo infatti con le notazioni precedenti

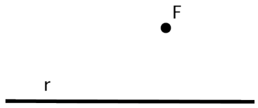
QG = HG-HQ = KD-HQ =

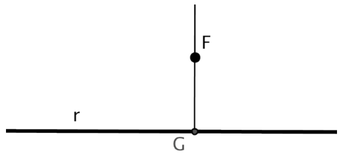
= (k+p/4)-HQ = (HQ+QF)-HQ = QF

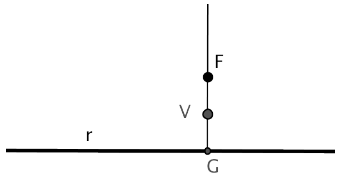
Vale anche il viceversa nel senso che

Teorema (nuova più semplice caratterizzazione della parabola)

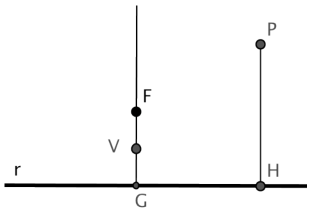
Il luogo dei punti di un piano equidistanti da un punto fisso F *e da una retta* r *è una parabola il cui asse è la retta passante per F perpendicolare a* r *, il vertice è il punto di questa retta equidistante da* F *e da* r *e il lato retto* p *è il doppio della distanza di* F *da* r.





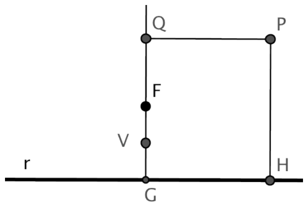


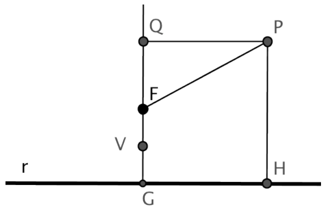
Chiamiamo a la distanza VG=VF .



Sia P un qualunque punto del piano individuato da r ed F e sia PH la perpendicolare per P a r.

Tracciamo la parallela PQ alla retta r e chiamiamo y=PQ e x=QV.





Abbiamo
$PF=PH \Leftrightarrow PF=QG \Leftrightarrow PF^2 = QG^2 \Leftrightarrow FQ^2+QP^2 = QG^2$
$\Leftrightarrow (x-a)^2+y^2=(x+a)^2 \Leftrightarrow y^2 = 4ax$

In definitiva PF=PH se e solo se P si trova sulla parabola di vertice V, asse VF , e lato retto p uguale al doppio della distanza di F da r.

- **Tavola III.6**

La costruzione con geogebra della parabola come luogo usando questa caratterizzazione.

- **Tavola III.7**

Una notevole proprietà delle corde di una parabola.

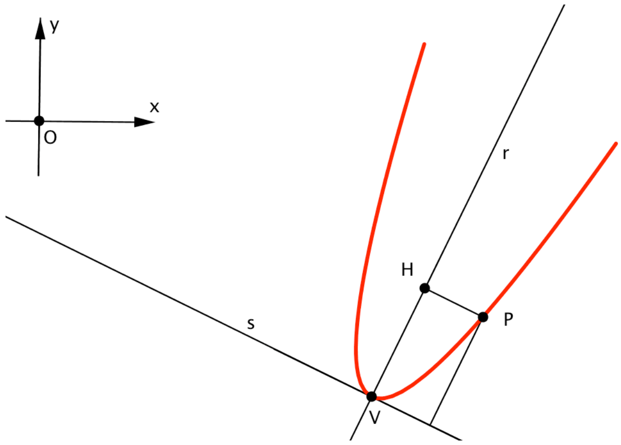
La parabola nel piano cartesiano

Diamo qualche cenno sullo studio della parabola dal punto di vista analitico, facendo cioè uso delle coordinate. Maggiori dettagli si trovano nel quaderno *Cono retto* che può essere scaricato dal sito.
Fissato un sistema di coordinate cartesiane, una curva può essere descritta tramite una equazione F(x,y)=0 le cui soluzioni (x,y), disposte sul piano cartesiano, danno luogo a una insieme di punti. Viceversa, fissato un sistema di riferimento, gli infiniti punti di una curva possono essere presentati come soluzioni di una equazione. Ovviamente la forma di questa equazione cambia cambiando la posizione degli assi coordinati pur restando la curva la stessa. Quindi molte (infinte) equazioni rappresentano la stessa curva.

Il problema consiste quindi nel dire quale sia la forma dell'equazione di una parabola e viceversa quali equazioni rappresentano delle parabole. La soluzione del problema si ottiene a partire dalla descrizione geometrica della parabola traducendo quella condizione geometrica nel linguaggio algebrico delle coordinate. La parabola è descritta da un punto V (il suo vertice), un asse di simmetria (una semiretta di origine V) ed è data da tutti i punti del piano per i quali

$$PH^2 = p\, HV$$

essendo p un parametro positivo detto lato retto della parabola.



Se r è l'asse della parabola e s è la retta perpendicolare ad r passante per il vertice V, la condizione equivale alla seguente:
P appartiene alla parabola se e solo se

$$\mathrm{dis}(P, r)^2 = p\, \mathrm{dis}(P, s)$$

dove dis(P, r) indica la distanza del punto P dalla retta r.
Ricordiamo che, se $P=(x_P,y_P)$ è un punto del piano cartesiano e se

$$ax+by+c=0$$

è l'equazione di una retta r, allora la distanza di P da r è data dalla formula

$$\mathrm{dis}(P,r) = \left| \frac{ax_P + by_P + c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$$

A questo punto non è difficile tradurre algebricamente la condizione $PH^2 = p\, HV$. Se $V=(x_0,y_0)$ sono le coordinate del vertice e

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \quad \text{e} \quad b(x-x_0)-a(y-y_0)=0$$

sono le equazioni dell'asse r e della perpendicolare s rispettivamente, allora Un generico punto P=(x,y) del piano appartiene alla parabola se e solo se le sue coordinate verificano l'equazione:

$$\frac{\left[a(x-x_o)+b(y-y_0)\right]^2}{a^2+b^2} = p\frac{b(x-x_0)-a(y-y_0)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Sviluppando i calcoli questa equazione si può mettere nella forma

$$\boxed{(ax+by)^2 = Ax+By+C}$$

dove i parametri a,b,A,B,C dipendono in modo esplicito dalla posizione del vertice (x_0,y_0), dalla direzione dell'asse[1] e dal lato retto p. In particolare (per i dettagli di calcolo vedi il quaderno *Cono retto*) si trova

$$p = \frac{|bA - aB|}{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^3}}$$

---

[1] La direzione di una retta è definita dalla coppia (a,b) a meno di un fattore di proporzionalità. Se $b\neq 0$, il coefficiente angolare della retta $ax+by=0$ è $m= -a/b$.

e dunque bA-aB $\neq 0$.
Viceversa si può dimostrare che l'insieme dei punti del piano cartesiano che verificano una equazione del tipo $(ax+by)^2 = Ax+By+C$ con bA-aB $\neq 0$ si dispongono lungo una parabola il cui asse è parallelo alla retta ax+by=0 e lato retto è dato dalla formula precedente.

- **Tavola III.8**

Equazioni di parabole storte

Le equazioni parametriche di una parabola

La struttura algebrica dell'equazione di una parabola data dall'uguaglianza del quadrato di una forma lineare omogenea con una forma lineare qualunque ci permette di dimostrare analiticamente un risultato di grande importanza nelle applicazioni.

Teorema (equazioni parametriche della parabola)
I punti del piano le cui coordinate (x,y) *si ottengono al variare del parametro* t *dalle equazioni*

$$\begin{cases} x = at^2 + bt + c \\ y = a't^2 + b't + c' \end{cases}$$

se ab'-ba'$\neq 0$ *descrivono una parabola*.

L'idea della dimostrazione, i cui dettagli si possono trovare sul quaderno *Cono retto*, consiste nel ricavare dal sistema t e t^2 in funzione di x e y (cosa possibile dato che ab'-ba'$\neq 0$) trovando due espressioni lineari t=H(x,y), t^2=K(x,y), che eliminando t forniscono l'equazione cartesiana in x e y

$$H(x,y)^2 = K(x,y)$$

che rappresenta una parabola avendo la struttura algebrica caratteristica delle parabole.
La tavola seguente illustra su un esempio significativo.

Sitografia

http://www.liberliber.it/biblioteca/g/galilei/discorsi_e_dimostrazioni_matematiche_intorno_a_due_nuove_etc/html/index.htm
http://newton.corriere.it/PrimoPiano/News/2005/10_Ottobre/24/archimede.shtml
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k51250b/f46
http://www.imati.cnr.it/~gianna/ted-2002-old/bonetti/Testo/CapitoloVIII.htm