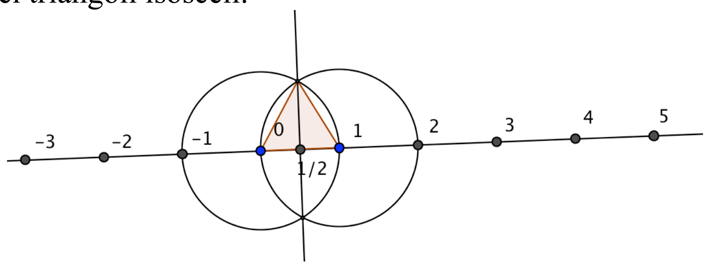
Scheda I. 3
La non possibilità di duplicare il cubo con riga e compasso.

Dopo Menecmo, Archita, Eratostene molti altri, sfidando gli dei hanno trovato interessante dedicare il loro tempo per trovare una costruzione con riga e compasso che permettesse di costruire un segmento x tale che

$$x^3 = 2$$

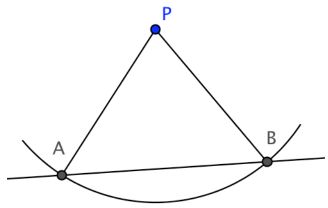
ma nessuno e' riuscito meglio di come sia riuscito Menecmo o Eratostene.
Fu un giovane un ragazzo, Evariste Galois, ucciso ad appena 21 anni in un duello nel 1832, probabilmente un tranello politico per eliminare un intelligente avversario della monarchia, a dimostrare che ogni sforzo per risolvere il problema era inutile perché il problema era irrisolvibile.
Ma... ma la soluzione del giovane Galois è molto difficile. Come fare a dimostrare che qualcosa non si può dimostrare? Il ragazzo, il giovane Evariste riesce a trovare una logica, precisa e molto particolare, che sottostà a ciò che è possibile costruire con la riga e il compasso. Intanto invece di pensare a figure costruibili con riga e compasso si pensa a *numeri costruibili*. Si cerca cioè di vedere la questione da un punto di vista algebrico. Identificando i punti di una retta con la loro ascissa, ci si chiede: quali numeri possono essere l'ascissa di un punto costruibile con riga e compasso a partire da un segmento unitario dato? Che *forma* hanno questi numeri? E' questa la domanda bizzarra e sorprendente che si pone Galois, domanda alla quale riesce a dare una risposta semplice e risolutiva. In particolare insieme a moltissime altre cose, si può vedere che il numero $\sqrt[3]{2}$ non ha quella forma.
Cominciamo con una utile definizione:
Un numero che è l'ascissa di un punto costruibile con riga e compasso a partire da un dato segmento unitario, lo chiamiamo un ***numero costruibile****.*
Cominciamo col vedere i primi e più semplici numeri costruibili.

Su una retta fissiamo un punto 0 e un punto 1: il segmento da 0 a 1 sarà l'unità di misura. Riportiamo con la stessa apertura di compasso, tanti punti, tante *volte* da una parte e dall'altra. In questo modo possiamo costruire tutti i numeri interi. Vogliamo anche poter dividere in tutti i modi possibili i segmenti che abbiamo creato e dimostrare che anche i numeri razionali positivi o negativi sono costruibili. Dividere per due è facile: basta saper fare l'asse di un segmento. La sola geometria che ci serve è quella dei triangoli isosceli.

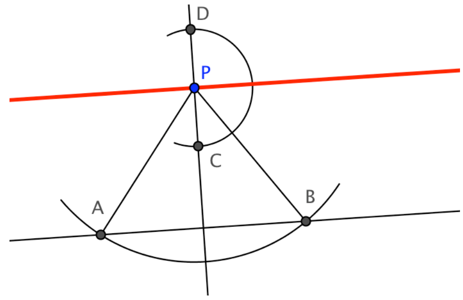


costruzione dell'asse

Così riusciamo a dividere per 4 per 8 per 16 ecc. E per dividere in 3? o in 5? o per qualunque numero positivo m? Per farlo abbiamo bisogno delle rette parallele. Dobbiamo saper costruire le parallele e abbiamo anche bisogno delle proporzioni e del teorema di Talete. Ecco come si costruisce la parallela a una data retta per un dato punto P:

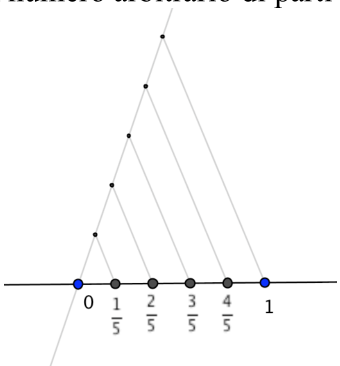


Con centro P si costruisce l'arco AB



Si costruisce l'asse del segmento AB.

Con centro P si costruisce l'arco CD e l'asse del segmento CD
Possiamo ora riportare su una retta obliqua che inizia in zero, m segmenti uguali, e poi proiettarli parallelamente sul segmento unitario. Così riusciamo, usando il teorema di Talete, a mantenere il rapporto tra le lunghezze sulla retta obliqua e quelle sul segmento unitario da cui siamo partiti, riusciamo cioè a dividere l’uno in un numero arbitrario di parti uguali,.

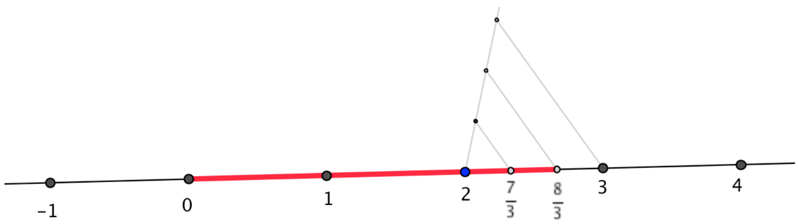


Nella figura m=5

Nello stesso modo possiamo dividere in un numero arbitrario m di parti uguali ogni segmento unitario: quello che va da 1 a 2 , da 2 a 3 , da 3 a 4 , da 0 a -1, da -1 a -2 , ecc ecc. In definitiva, dato un qualunque numero razionale n/m possiamo costruire con la riga e il compasso un segmento la cui lunghezza misuri (rispetto alla unità scelta) n/m. Se n/m è positivo si divide n per m e si trova il resto $0 \le r < m$ in modo che si possa scrivere

$$\frac{n}{m} = q + \frac{r}{m}$$

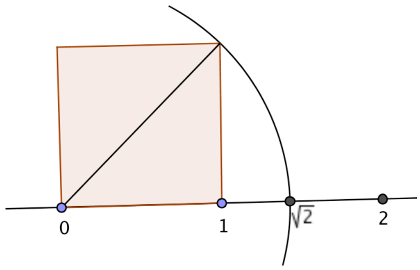
si considera il segmento che va dal punto q al punto q+1, si divide questo segmento in m parti uguali e se ne prendono r.



La figura mostra come si costruisce con la riga e il compasso un segmento di lunghezza 8/3

Abbiamo costruito con riga e compasso tutti i numeri razionali: ad ogni numero razionale positivo o negativo corrisponde un punto sulla retta che si può costruire con la riga e col compasso a partire dal segmento unitario.
Con questi numeri possiamo fare le quattro operazioni fondamentali dell’aritmetica, la somma la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione per un numero non nullo ottenendo sempre come

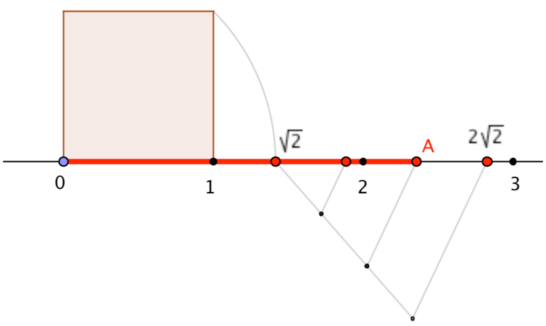
risultato un numero dello stesso tipo: un numero razionale. Abbiamo quello che si chiama *un campo di numeri* cioè un particolare insieme di numeri reali che si riproducono tra loro operando in tutti i modi possibili con le 4 operazioni elementari dell'aritmetica. Questo primo e più semplice campo numerico è molto importante ha un nome e un suo speciale simbolo, uguale in tutto il mondo, per essere riconosciuto. Si chiama il *campo dei numeri razionali* e il suo simbolo è **Q**.
Possiamo ora alzare una retta verticale (l'asse delle ordinate) e costruire su questa nuova retta tutti i punti a coordinate intere e poi tutti i punti a coordinate razionali e poi tracciando rette parallele possiamo costruire una maglia fittissima di punti del piano le cui coordinate sono numeri razionali.
Tutti questi infiniti e densissimi punti possono essere costruiti con la riga e col compasso. Ma possiamo fare molto di più. Possiamo costruire anche dei punti le cui ascisse non sono razionali. Possiamo, ad esempio, costruire un quadrato di lato unitario e abbassare, col compasso, la sua diagonale.



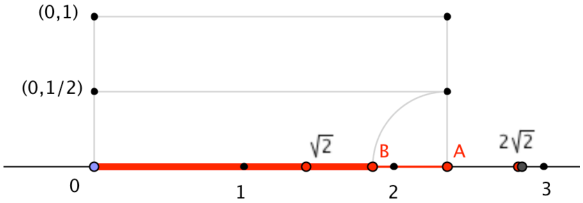
Questa lunghezza, che si denota con $\sqrt{2}$, non è compresa nel campo dei numeri razionali. Abbiamo nuovo punto ($\sqrt{2}$,0), un nuovo numero costruibile con riga e compasso $\sqrt{2}$. In più, dato che la somma algebrica si rappresenta geometricamente unendo uno dopo l'altro due segmenti che rappresentano i due addendi, possiamo costruire i numeri $2\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, ... , $n\sqrt{2}$ per n intero, ma possiamo anche dividere il segmento corrispondente a $n\sqrt{2}$ in m parti uguali e costruire il segmento $(n\sqrt{2})/m$ = (n/m) $\sqrt{2}$. Possiamo anche aggiungere a questo, il segmento corrispondente a p/q che abbiamo già costruito, e costruire, con riga e compasso, tutti i punti della retta di ascissa

$$a + b\sqrt{2}$$

essendo a e b due qualunque numeri razionali.
La figura seguente mostra la costruzione del punto di ascissa $-1/2 + (5/3)\sqrt{2}$.



Il punto A ha ascissa $(5/3)\sqrt{2}$



Il punto B ha ascissa $-1/2 +(5/3)\sqrt{2}$

La cosa fondamentale è riconoscere a questi numeri una loro particolare *forma* (quella che permette di scriverli come $a + b\sqrt{2}$) e convincersi possono essere tra loro sommati, sottratti, moltiplicati e divisi riproducendo sempre un numero della stessa forma. La forma di questi numeri consiste nell'essere la somma di due addendi: il primo addendo è un numero razionale mentre il secondo addendo è il prodotto di un numero razionale per $\sqrt{2}$. Questa forma si conserva operando con le 4 operazioni dell'aritmetica. Per moltiplicarli basterà usare la legge distributiva

$$(a+b\sqrt{2})\,(c+d\sqrt{2}) = ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + 2bd = (ac + 2bd) + (ad+bc)\sqrt{2}$$

Si vede che la forma del numero non è cambiata dopo aver eseguito la moltiplicazione. Per la divisione le cose non cambiano molto: si deve razionalizzare il denominatore

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})} = \frac{(ac-2bd)+(bc-ad)\sqrt{2}}{c^2-2d^2} = \frac{ac-2bd}{c^2-2d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-d^2}\sqrt{2} = p+q\sqrt{2}$$

Anche in questo caso il quoziente di due numeri di quella forma si presenta ancora nella stessa forma. Questo significa che tutti i numeri del tipo $a+b\sqrt{2}$, come i numeri razionali, formano un *campo numerico* che si denota col simbolo $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ e che contiene i numeri razionali. In simboli

$$\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} \mid a \in \mathbf{Q},\, b \in \mathbf{Q}\}$$

In definitiva per il fatto che $\sqrt{2}$ è un numero costruibile, diventano costruibili tutti i numeri della forma

$$a+b\sqrt{2}$$

dove a e b sono numeri del campo più piccolo che avevamo costruito prima, il campo cioè dei numeri razionali.

Continuando ora le costruzioni con riga e compasso a partire da questi punti, tracciando cioè rette che congiungono punti costruiti in questo modo e cerchi coi centri su questi punti e coi raggi di questa natura, possiamo trovare o no nuovi numeri, nuovi punti che non stanno tra quelli precedentemente individuati? Certamente è possibile, poiché, ad esempio $\sqrt{3}$ come ogni altra radice quadrata, può essere costruita, ma non ha la forma detta. Se infatti fosse $\sqrt{3}=a+b\sqrt{2}$ con a e b numeri razionali, elevando al quadrato avremmo

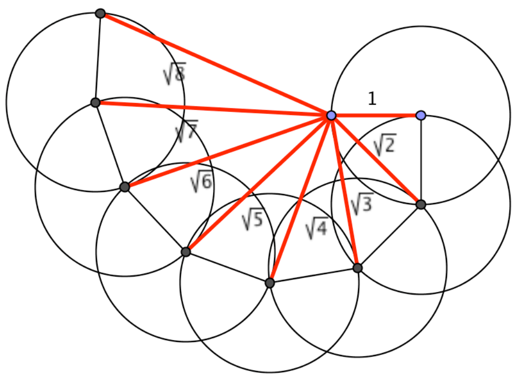
$$3=a^2+2b^2+2ab\sqrt{2}$$

e quindi

$$\sqrt{2} = \frac{3-a^2-2b^2}{2ab}$$

sarebbe un numero razionale mentre sappiamo che non è così.

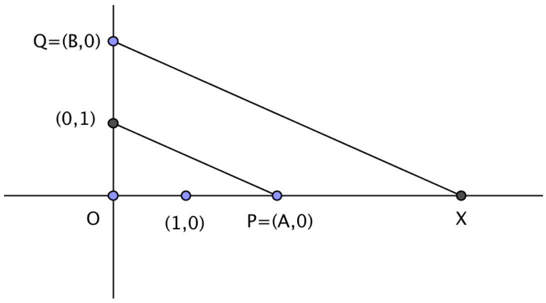
La costruzione con riga e compasso di ogni radice quadrata si fa facilmente osservando la seguente spirale



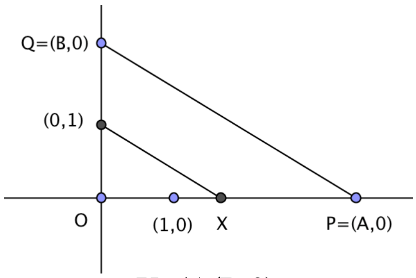
nella quale ogni triangolo rettangolo ha un cateto unitario costruito sulla perpendicolare all'ipotenusa del triangolo precedente. Possiamo allora costruire con riga e compasso $\sqrt{3}$ costruendo prima $\sqrt{2}$ e poi costruendo il triangolo rettangolo i cui cateti misurano $\sqrt{2}$ e 1. Analogamente si può fare con le altre radici quadrate. Come si vede sono tantissimi i punti del piano cartesiano che si possono costruire con riga e compasso a partire dal segmento unitario.

Il seguente teorema mette in relazione i numeri costruibili con l'algebra delle 4 operazioni e permette di costruire tantissimi altri numeri costruibili.

Teorema
Se A *e* B *sono due numeri costruibili allora è costruibile anche* A+B, A-B, A.B, A/B.
Dimostrazione
Per la somma e la differenza non ci sono problemi, si affiancano i due segmenti e si sommano andando nel verso positivo e si sottraggono andando nel verso opposto. Vediamo come si costruisce il prodotto e la divisione



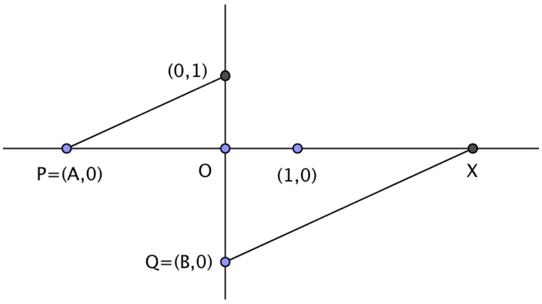
X=(AB,0)



X=(A/B,0)

Per ipotesi il punto P=(A,0) è stato costruito con riga e compasso. Tracciamo la retta che congiunge P col punto unità dell'asse delle ordinate e costruiamo la parallela passante per Q=(B,0) (che è costruito per ipotesi). Il punto X dove questa parallela incontra l'asse delle ascisse ha una ascissa x che, per il teorema di Talete, verifica la relazione 1 : B = A : x e quindi x=AB è un numero costruibile. Per la divisione si procede in modo analogo come indicato dalla figura a destra.

E' interessante notare come questa costruzione geometrica restituisca la regola dei segni. Facendo la costruzione con un software di geometria dinamica si può spostare il punto P alla sinistra dell'origine e vedere che in questo caso anche X è a sinistra, mentre se P è a sinistra e Q è sotto all'ora X torna a destra.



Meno per meno uguale a più

Il teorema precedente ci dice che i numeri costruibili sono un campo numerico cioè un insieme di numeri che si riproducono tra loro facendo le 4 operazioni elementari dell'aritmetica.

Vediamo ora come si può dimostrare che il numero $\sqrt[3]{2}$ non è un numero costruibile con l'uso della sola riga e del compasso. L'idea geniale di Galois è quella di associare a ogni costruzione con riga e compasso una catena di campi numerici ognuno più grande del precedente la cui forma ha un particolarissimo aspetto che può essere esplicitamente descritto.
Cominciamo ad osservare che una retta che congiunge due punti P e Q le cui coordinate si trovano su un campo numerico K ha una equazione cartesiana

$$Ax+By+C=0$$

i cui coefficienti si trovano ancora nello stesso campo numerico K, analogamente un cerchio che ha il centro in un punto con coordinate in K e il raggio in K ha una equazione cartesiana

$$(x-A)^2+(y-B)^2 = R^2$$

i cui coefficienti sono in K.
Intersecando due rette non parallele con coefficienti in K si trova un punto le cui coordinate sono in K, questo perché le operazioni che si devono fare per trovare le coordinate del punto intersezione sono le 4 operazioni dell'aritmetica che producono comunque, operando con numeri in K, numeri ancora in K. La cosa cambia se intersechiamo una circonferenza con una retta. Il calcolo porta infatti a dover risolvere una equazione di *secondo grado* la quale richiede l'estrazione di una *radice quadrata*, $\sqrt{N}$ che generalmente non appartiene a K pur appartenendo a K il radicando N. In questo caso quel passo della costruzione porta alla costruibilità del nuovo numero $\sqrt{N}$ e quindi di tutte le sue possibili combinazioni $A+B\sqrt{N}$. La stessa cosa accade se intersechiamo due circonferenze. Anche in questo caso le coordinate del punto di intersezione si ottengono risolvendo una equazione di secondo grado la quale comporta l'estrazione di una radice quadrata.
Ricapitolando:
Una costruzione con riga e compasso consiste di una serie finita di passi attraverso i quali si costruiscono vari punti del piano attraverso tre operazioni: intersecando due rette, intersecando una retta e una circonferenza, intersecando due circonferenze. Le ascisse di questi punti sono punti costruibili.
La costruzione inizia con un segmento dato che pensiamo come il segmento unitario. A partire da questo possiamo costruire tutti i numeri razionali: il campo **Q**.
Il passo successivo produce un nuovo punto le cui coordinate possono essere razionali oppure possono richiedere l'astrazione di una radice quadrata di un numero razionale: $\sqrt{n}$. Nel primo caso non abbiamo aggiunto nulla di nuovo, ma nel secondo i numeri costruibili a partire da quel punto sono tutti i numeri del campo $K_1 = Q(\sqrt{n})$ cioè tutti i numeri del tipo $a+b\sqrt{n}$, con a e b razionali.
Il passo successivo della costruzione ci permette di considerare rette passanti per punti con coordinate in K_1 e analogamente cerchi con centri e raggi in K_1 dal momento che tutti questi punti sono diventati costruibili. La costruzione come nel caso precedente può portare a punti le cui coordinate si trovano ancora in K_1 oppure possono richiedere l'estrazione di una radice quadrata $\sqrt{N}$ dove N è un numero di K_1. In questo secondo caso utilizzando quel punto possiamo costruire tutti i numeri che ottengo a partire da $\sqrt{N}$, posso ciò costruire tutti i numeri del tipo $A+B\sqrt{N}$ al variare di A e B in K_1. Questo nuovo campo di numeri ottenuto da con l'aggiunta delle radice di N

$$K_2 = \left\{A+B\sqrt{N} \ : \ A \in K_1, B \in K_1\right\} = K_1(\sqrt{N})$$

rappresenta tutti i numeri che posso costruire facendo quei particolari passi della costruzione.
La cosa continua nello stesso modo fino alla fine della costruzione. In definitiva avrò prodotto una catena di campi numerici di numeri reali.

$$\mathbf{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \ . \ . \ . \ \subset K_n \subset \mathbf{R}$$

ognuno dei quali è ottenuto dal precedente con l'aggiunta di una radice quadrata $\sqrt{\xi}$

$$K_{i+1} = K_i(\sqrt{\xi}) = \left\{ P + Q\sqrt{\xi} \; : \; P \in K_i, Q \in K_i \right\}$$

Supponiamo ora per assurdo che il numero $\sqrt[3]{2}$ sia costruibile con riga e compasso. La costruzione produrrà una catena di campi numerici sempre più grandi fino ad arrivare alla fine della costruzione a un campo numerico K_n che contiene il numero $\sqrt[3]{2}$ mentre il campo precedente K_{n-1} non lo conteneva. Dato che $\sqrt[3]{2}$ non è un numero razionale[1] abbiamo $n \geq 1$. D'altra parte la forma dei numeri che appartengono al campo K_n è nota dato che K_n è ottenuto da K_{n-1} con l'aggiunta di una radice quadrata

$$\sqrt{\xi} \notin K_{n-1}.$$

Ora, dato che $\sqrt[3]{2}$ appartiene a K_n ha la forma

(1) $$\sqrt[3]{2} = P + Q\sqrt{\xi}$$

elevando al cubo

(2) $$2 = P^3 + 3P^2Q\sqrt{\xi} + 3PQ^2\xi + Q^3\xi\sqrt{\xi} = P^3 + 3PQ^2\xi + (3P^2Q + Q^3\xi)\sqrt{\xi}$$

ma da questo segue che

(3) $$3P^2Q + Q^3\xi = 0$$

perché altrimenti potremmo ricavare $\sqrt{\xi}$ da questa relazione, precisamente si avrebbe

$$\sqrt{\xi} = \frac{2 - P^3 + 3PQ^2\xi}{3P^2Q + Q^3\xi}$$

il che è assurdo dato che il numero a secondo membro è ottenuto eseguendo somme, differenze prodotti e divisioni dei numeri $2, P, Q, \xi$ che sono in di K_{n-1}, e quindi anche il risultato $\sqrt{\xi}$ dovrebbe essere un elemento di K_{n-1} contro l'ipotesi.

D'altra parte Q non è zero perché in questo caso, dalla (1), seguirebbe $P = \sqrt[3]{2}$ cosa impossibile dato che P appartiene a K_{n-1} mentre $\sqrt[3]{2}$ non appartiene a K_{n-1}. Possiamo allora ricavare ξ dalla (3):

$$\xi = -\frac{3P^2}{Q^2}$$

sostituendo il valore ξ trovato nella relazione che abbiamo ricavato dalla (2), e tenendo conto della (3) troviamo

$$2 = P^3 + 3PQ^2\xi \qquad 2 = P^3 - 9P\frac{P^2}{Q^2}Q^2 = -8P^3 = (-2P)^3$$

e quindi -2P sarebbe una soluzione reale dell'equazione $X^3 = 2$. Ma questa equazione ha una sola soluzione reale[2] e quindi avremmo

$$-2P = \sqrt[3]{2}$$

Il che è assurdo perché abbiamo supposto che $\sqrt[3]{2}$ non si trovi in K_{n-1} mentre -2P è un elemento di K_{n-1}.

---

[1] E' impossibile che risulti $2q^3 = p^3$ con p e q interi positivi senza fattori comuni.

[2] $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$ e l'equazione x^2+ax+a^2 non ha radici reali essendo $\Delta = -3a^2$.