Prima Lezione

- **Scheda I.1**

Fonti storiche sul problema della duplicazione del cubo.

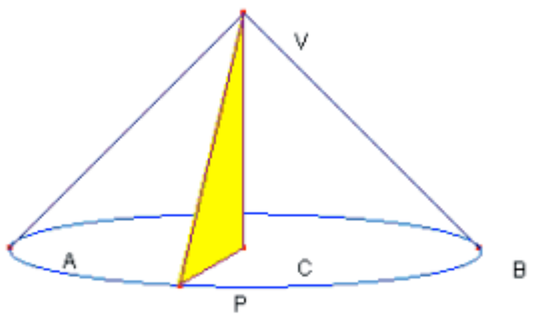
Menecmo pare sia stato il primo a dare una soluzione del problema della duplicazione del cubo. In questa lezione vediamo quale può essere stato il metodo seguito da Menecmo. Cominciamo col dare alcune notizie su questo geniale matematico greco.

Alcune (poche) notizie su Menecmo

Menecmo è stato un *matematico greco antico*, studioso di *geometria*. ed è noto per la sua basilare scoperta delle *sezioni coniche* Ci sono poche fonti dirette sulle opere di Menecmo: si sa in particolare della sua amicizia con il filosofo *Platone*. Egli studia le *sezioni coniche* ed è il primo a mostrare che *ellissi*, *parabole* ed *iperboli* si possono ottenere tagliando un cono con un piano non parallelo alla base. Menecmo ha fatto le sue scoperte sulle *sezioni coniche* mentre stava cercando di risolvere il problema di individuare il lato di un cubo avente volume doppio di un cubo dato.
Si dice anche che Menecmo sia stato tutore di Alessandro Magno; questa credenza deriva da un aneddoto. Ad Alessandro, che gli chiedeva di fargli conoscere un metodo facile per capire la geometria, Menecmo avrebbe risposto: O Re, per viaggiare da un luogo all'altro ci sono strade per il Re e strade per il popolo, ma in geometria c'è un'unica strada per tutti (Beckmann, 1989, pag. 34). Tuttavia questa frase è anche stata attribuita prima a Giovanni Stobeo vissuto nella seconda metà del V secolo d.C. Quindi è incerto se Menecmo sia realmente stato maestro di Alessandro; è, però, possibile che Aristotele abbia stabilito un collegamento fra i due.

Le parabole all'inizio

Cominciamo con la seguente definizione.
Definizione di **CONO** secondo Menecmo :



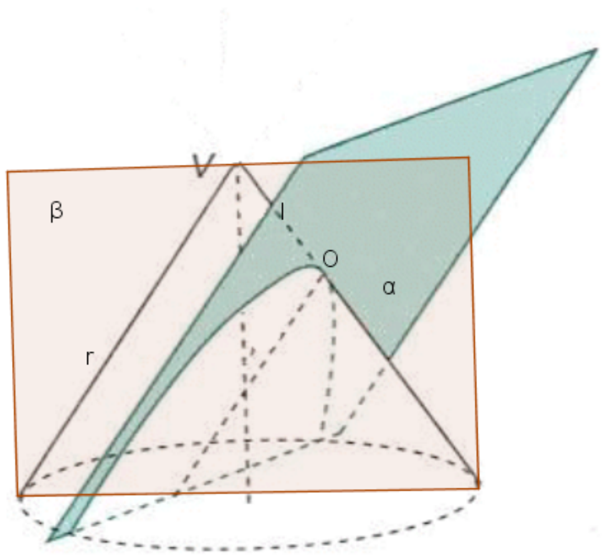
Quando un triangolo rettangolo ruota intorno ad un cateto fissato fino a ritornare alla posizione da cui era partito, la figura così racchiusa è un **CONO**.
Se il triangolo rettangolo è isoscele il cono si dice **RETTANGOLO**

Viene dato agli studenti un **modello concreto di cono in plexglas** trasparente che contiene diversi piani, uno dei quali è parallelo a una generatrice per "vedere" come si ottiene una parabola e la geometria che ne deriva.
I tre piani sono: il piano α parallelo a una generatrice, il piano β passante per l'asse del cono e perpendicolare ad α, e il piano γ perpendicolare all'asse del cono.

Definizione di **PARABOLA**:
La parabola è quella linea che si ottiene intersecando un cono con piano α parallelo a una direttrice.

Il piano α è parallelo alla generatrice r (è il piano della parabola)
Il piano β passa per l'asse del cono ed è perpendicolare ad α- Questo piano, che esiste ed è unico, interseca il piano α della parabola in una retta che si chiama l'**asse della parabola**.
Si può osservare che questa retta divide la parabola in due parti uguali (è l'asse di simmetria della curva).
L'intersezione tra l'asse della parabola e il cono è il **vertice della parabola** .

Chiamiamo *l* la distanza tra il vertice del cono e il vertice della parabola



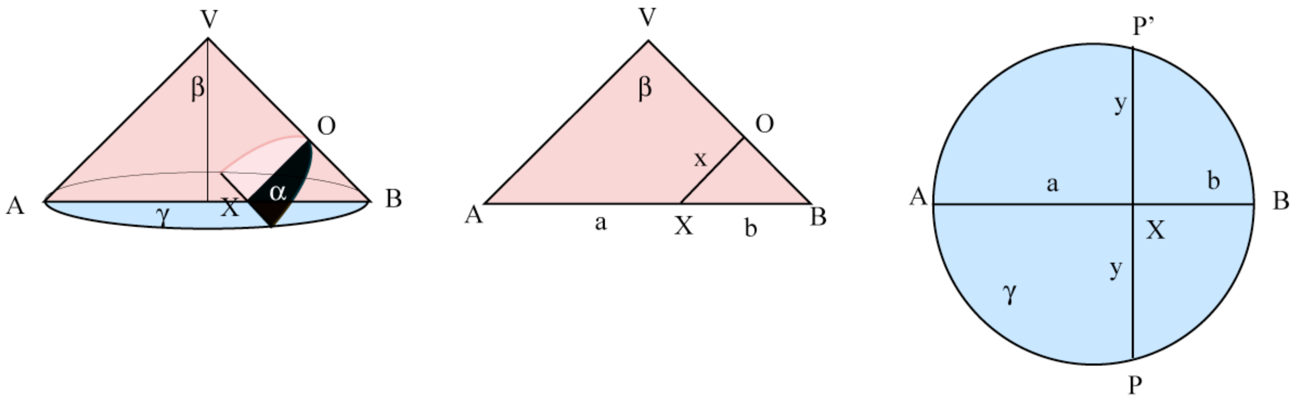
Si cerca di convincersi attraverso una discussione con gli studenti che l'asse della parabola è un asse di simmetria per quella curva, utilizzando il modello fisico del cono. Questo dovrebbe favorire lo sviluppo di adeguati modelli mentali per facilitare la comprensione della geometria dello spazio tridimensionale. In questa discussione, per arrivare a una dimostrazione, può essere utile richiamare alcuni concetti base di geometria solida.

- **Scheda I.2**

Alcune nozioni di geometria solida

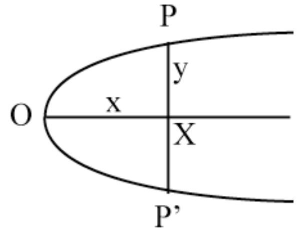
Il lato retto della parabola.

Tornando al cono materiale a ai suoi tre piani, si mostrerà agli studenti come, fissato un **qualunque** punto P sulla parabola, si può trovare un piano γ che passa per P perpendicolare all'asse del cono. Questo piano incontra il cono lungo la circonferenza APB, il piano α della parabola lungo una corda PP' di questa circonferenza e il piano β che contiene l'asse del cono, in un diametro AB che biseca la corda.

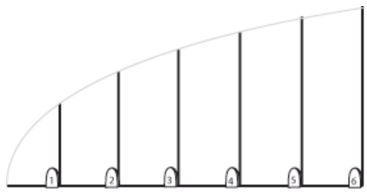


Infine, il piano α della parabola interseca il piano β lungo l'asse di simmetria della parabola OX, come in figura, dove abbiamo disegnato separatamente i due piani β e γ. La geometria di questi piani sarà descritta mostrando sul cono i plexiglas questa geometria.

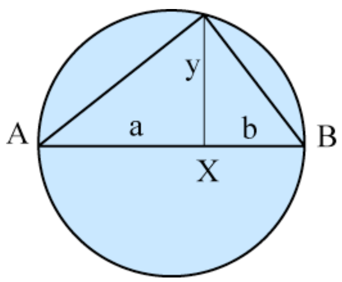
Quello che fino ad ora sappiamo della curva ottenuta intersecando il piano α (parallelo a una generatrice del cono) con il cono, è che, questa linea, ha un vertice O e un asse di simmetria che passa per O. La sua forma è quindi all'incirca



Apollonio (II sec. a.C.) chiama il segmento OX *ascissa* del punto P e il segmento XP *ordinata* di P. Il senso etimologico di queste parole, oggi di uso così frequente, suggerisce una immagine molto interessante che prefigura l'idea primitiva di funzione: l'ascissa (dal latino abscindere = tagliare) indica le tacche, le pietre miliari, i tagli equidistanziati che servono per misurare la distanza di un punto della via da un punto iniziale. Per descrivere una parabola si tratta ora di collocare ordinatamente, in corrispondenza ad ogni ascissa, dei segmenti, le ordinate appunto, ordinati in modo che siano tra loro paralleli.

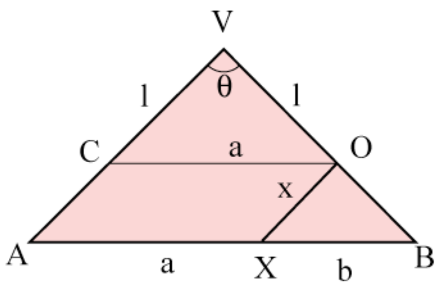


Quello che ora vogliamo fare è trovare, fissata una unità di misura per le lunghezze, quanto misura il segmento XP una volta assegnata la distanza x=OX.
Viene ricordato il secondo teorema di Euclide : "*In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa*"



$$\mathbf{y^2 = ab}$$

Per trovare la relazione che cerchiamo basta esprimere a e b in funzione della distanza x del punto X dal vertice O. Per fare questo basta vedere cosa succede sul piano β perpendicolare ad α. Tracciamo la parallela OC al dimetro AB: abbiamo



OX:XB=VC:CO
ma VC=VO=l, quindi

$$\frac{x}{b} = \frac{l}{a} \quad \text{cioé} \quad b = \frac{ax}{l}$$

$$y^2 = ab = \frac{a^2}{l}x$$

In definitiva abbiamo

$$y^2=px$$

dove $p=a^2/l$ è una costante che non dipende dal punto X variabile sull'asse della parabola, ma dipende solo dalla posizione del piano α e dall'apertura del cono.
Il parametro p si chiama **lato retto** della parabola.
Ovviamente in un sistema di riferimento cartesiano nel quale si sia fissata l'origine degli assi nel vertice della parabola e si sia preso l'asse delle ascisse l'asse di simmetria della parabola, l'equazione precedente è l'equazione cartesiana della parabola.
Osserviamo che, se l'angolo di apertura del cono è di 90 gradi (questi coni sono chiamati rettangoli e sono quelli considerati da Archimede per definire una parabola) allora $a^2 =2l^2$ e quindi

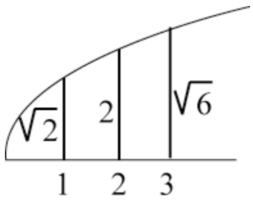
$$p=2l$$

è il doppio tra la distanza l=VO del vertice del cono da quello della parabola.
In generale, se θ è l'angolo di apertura del cono,

$$p=2l\,(1-\cos(\theta))$$

Nella figura abbiamo disegnato alcune le ordinate relative alle ascisse x=1, x=2, x=3 per la parabola

$$y^2=2x$$



La parabola $y^2=2x$ si può ottenere tagliando un cono rettangolo con un piano perpendicolare a una generatrice del cono che dista l=4 unità dal vertice del cono.

- **Tavola I.1** Per gli studenti

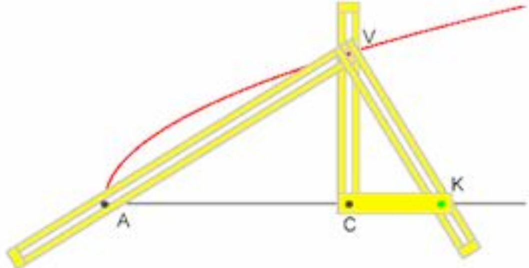
Si chiede di disegnare con riga e compasso alcuni punti di una parabola di cui si conosce asse, vertice e lato retto.

A questo punto si invitano gli studenti a utilizzare il cono *rettangolo* di plexiglas e **alcune parabole di filo di ferro rigide**, per determinare il lato retto delle parabole e quindi la loro equazione.
Basterà appoggiare le parabole di fili di ferro sul cono in modo che tocchino tutte le le generatrici e misurare, con un centimetro, la distanza tra i due vertici: quello del cono e quello della parabola. Se questa distanza vale n centimetri l'equazione della parabola (in un sistema di riferimento cartesiano nel quale l'origine degli assi coincide con il vertice della parabola, l'asse delle ascisse con l'asse di simmetria della parabola e l'unità di misura sia il centimetro) sarà

$$y^2=2nx.$$

Il Parabolografo: uno strumento per disegnare le parabole

Il parabolografo, il cui funzionamento si basa sulla proprietà caratteristica della parabola trovata da Menecmo, è uno strumento che permette di disegnare con continuità queste curve.



Lungo un binario rettilineo AK in un piano π scorre un segmento CK di lunghezza p prestabilita. Quando l'angolo retto KCV si muove, trascina con sé un altro angolo retto AVK fisso che ha i lati VA e VK costretti a passare, rispettivamente, per i punti A e K.

Durante il movimento, in ogni istante AVK è un triangolo rettangolo (variabile) di cui VC rappresenta l'altezza relativa alla ipotenusa e AK l'ipotenusa. Possiamo applicare ad esso il teorema di Euclide: si ricava (VC×VC) = (CK×CA) = (p×CA), che è la proprietà caratteristica della parabola trovata da Memecmo. Ponendo CA = x , VC = y, si può scrivere:

$$y2 = px.$$

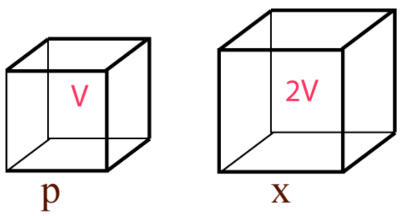
Usando lo **strumento parabolografo** (se disponibile) si fanno disegnare agli studenti diverse parabole modificano il lato retto p. Si osserva:
Più p è piccolo più la parabola si stringe.
Esiste una unica parabola che passa per un fissato punto A e ha un dato vertice e asse. Si calcola in concreto il lato retto di questa parabola usando il parabolografo.

Si costruisce, con gli studenti, un parabolografo virtuale usando geogebra. Alla fine si ricaverà una macro che ha come oggetti iniziali un punto O (il vertice della parabola), una semiretta che ha origine nel vertice (l'asse della parabola) e un segmento (il lato retto) e come oggetto finale la parabola con quelle caratteristiche.

- **Tavola I.2** La costruzione del parabolografo virtuale con geogebra.
- **Il parabolografo virtuale** (StrumentoParbola.ggb)

Come Menecmo riesce a duplicare il cubo

Il problema consiste nel trovare il lato di un cubo il cui volume sia il doppio di quello di un cubo assegnato.



Se p è la misura del lato del cubo assegnato, e x quello del cubo da trovare, allora x deve verificare la condizione:

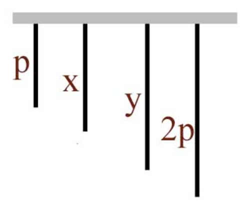
$$x^3 = 2\,p^3.$$

La soluzione dell'equazione precedente è

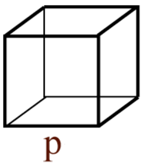
$$x = p\,\sqrt[3]{2}$$

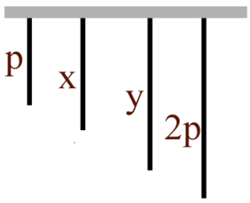
Si tratta dunque di trovare un modo per calcolare la radice cubica di 2.
Per risolvere questo problema Menecmo utilizza una idea legata all'armonia musicale di un suo predecessore, il pitagorico Ippocrate di Clio. Ippocrate si era posto il problema di dividere l'ottava musicale in due intervalli uguali il che equivale e trovare le lunghezze x e y di due segmenti tali che

$$p:x = x:y = y:2p$$



Riuscendo a realizzare uno strumento musicale con 4 corde di queste lunghezze, si avrebbe che l'intervallo tra la prima e la seconda corda, (cioè $p:x$) sarebbe uguale all'intervallo tra la seconda e la terza (cioè $x:y$) che sarebbe ancora uguale all'intervallo tra la terza e la quarta (cioè $y:2p$). Ma l'intervallo tra la prima e la quarta corda sarebbe proprio in intervallo di ottava essendo l'ultima corda lunga il doppio della prima.





Ippocrate non riesce a risolvere questo problema, ma si rende conto che se il cubo assegnato avesse il lato lungo p allora la corda lunga x darebbe il lato del cubo di volume doppio.

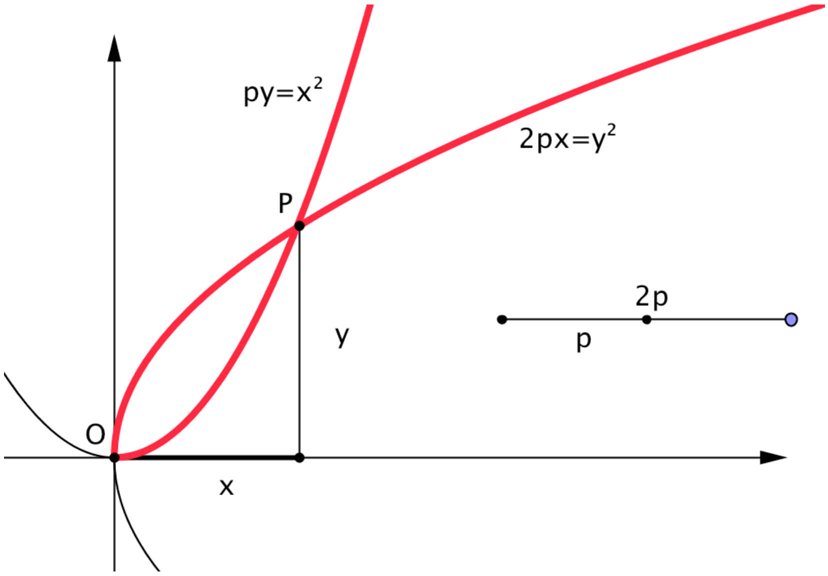
Infatti poiché $p:x=x:y$ abbiamo $py=x^2$ e, dato che $x:y=y:2p$, abbiamo anche $2px=y^2$ e le due relazione devono valere contemporaneamente

$$\begin{cases} py = x^2 \\ 2px = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2y^2 = x^4 \\ 2p^3x = p^2y \end{cases} \Leftrightarrow 2p^3x = x^4$$

e, se x è diversa da zero, questa ultima uguaglianza implica

$$2p^3 = x^3$$

e quindi x è il lato del cubo di volume doppio.
Ippocrate non sapeva trovare la lunghezza della corda se non forse a orecchio, ma Memecmo ebbe l'idea geniale di usare un parabolografo per disegnare le due parabole $py=x^2$ e $2px=y^2$ e trovare il punto nel quale si intersecano. Naturalmente il linguaggio di Menecmo è completamente diverso dal nostro ma l'idea essenziale era esattamente quella detta.
Usano il nostro strumento virtuale (o un parabolografo se disponibile) possiamo disegnare le due parabole e intersecarle. La prima parabola $py=x^2$ ha il vertice nell'origine O, l'asse di simmetria verticale e il lato retto uguale a p. La seconda parabola $2px=y^2$ ha ancora il vertice in O, ma il suo asse di simmetria è orizzontale e il suo lato retto vale 2p.



- **Tavola I.3** La costruzione delle due parabole usando geogebra e lo strumento parabola costruito precedentemente.

La parabola rossa rappresenta tutti i punti (x,y), x>0, per i quali $py=x^2$ mentre la parabola nera quelli (x,y), x>0, per i quali $2px=y^2$. Se (x_0,y_0) è il loro punto comune allora questi due numeri verificano entrambe le equazioni e dunque il cubo di x_0 è uguale a due volte il cubo di p.

Problema: Quali parabole si devono intersecare per calcolare la radice cubica di n.

L'idea di Menecmo, che interseca due parabole per trovare la soluzione dell'equazione di terzo grado $x^3=2$ è stata ripresa per la prima volta dai matematici arabi nel X e XI secolo. In particolare Al-Khayyam (XI secolo) trova un metodo per risolvere ogni tipo di equazione di terzo grado intersecando due coniche. Il particolare risolve l'equazione

$$x^3+1=4x^2$$

intersecando l'iperbole equilatera xy=1 con la parabola $y^2=4-x$.

Approfondimento

Il problema di costruire *con riga e compasso* il lato di un cubo di volume doppio di un cubo assegnato è uno dei problemi classici della geometria greca. Molti matematici si sono cimentati in questo problema senza riuscire a trovare una soluzione. Soltanto in tempi relativamente recenti è stata elaborata, dal geniale matematico francese Evaristo Galois, morto a soli 21 anni nel 1832, una teoria generale con la quale si poteva rispondere a questo e ad altri problemi analoghi. Galois riusciva a caratterizzare i problemi risolubili con riga e compasso e il problema della duplicazione del cubo non rientrava tra questi. Non è dunque possibile trovare una costruzione che permetta la costruzione di un segmento la cui lunghezza, rispetto a una unità di misura assegnata sia $\sqrt[3]{2}$.
Nella scheda seguente proponiamo una dimostrazione di questo importante risultato che ci pare accessibile alla cultura scolastica, accennando ad alcune idee di Galois.

- **Tavola I.4** L'impossibilità di duplicare il Cubo con la riga e il compasso. Alcune idee di Evaristo Galois.

Sitografia

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

http://associazioni.monet.modena.it/macmatem/cataloghi/coniche/Cavalieri.htm

http://web.tiscalinet.it/scoleri/argomen/coniche/vista_geome.htm

http://www.liceoaselli.it/aselli/index.html