IL PROBLEMA DEI TRAVASI E LE EQUAZIONI DIOFANTEE

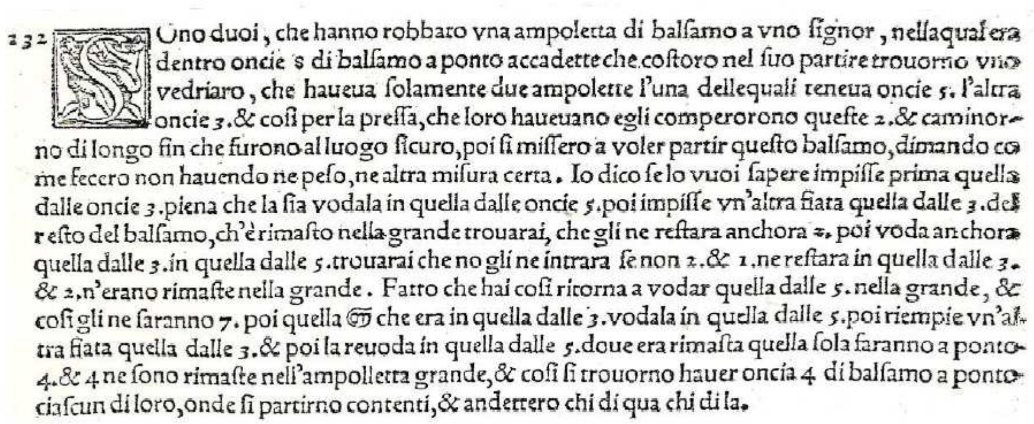
LORENZO CAPRINI E RAFFAELE LOBOZZO

0. IL PROBLEMA DEI TRAVASI

Avendo a disposizione una fontana e due brocche, rispettivamente da 6 e da 15 litri, come si può a raccogliere precisamente 12 litri d'acqua?

In generale, dati due contenitori non graduati e una quantità infinita di liquido, è possibile avere, con una serie di riempimenti, svuotamenti e travasi, una fissata quantità in un solo recipiente?

Il quesito appartiene alla tradizione della matematica ricreativa, un problema simile compare ad esempio nel "General trattato di numeri et misure" di Niccolò Tartaglia (XVI secolo).



232 Sono duoi, che hanno robbato vna ampoletta di balſamo a vno ſignor, nellaqual era dentro oncie 8 di balſamo a ponto accadette che coſtoro nel ſuo partire trouorno vno vedriaro, che haueua ſolamente due ampolette l'una dellequali teneua oncie 5. l'altra oncie 3.& coſi per la preſſa, che loro haueuano egli comperorono queſte 2.& caminorno di longo fin che furono al luogo ſicuro, poi ſi miſſero a voler partir queſto balſamo, dimando come fecero non hauendo ne peſo, ne altra miſura certa. Io dico ſe lo vuoi ſapere impiſſe prima quella dalle oncie 3. piena che la ſia vodala in quella dalle oncie 5. poi impiſſe vn'altra fiata quella dalle 3. del reſto del balſamo, ch'è rimaſto nella grande trouarai, che gli ne reſtara anchora 2. poi voda anchora quella dalle 3. in quella dalle 5. trouarai che no gli ne intrara ſe non 2.& 1. ne reſtara in quella dalle 3.& 2. n'erano rimaſte nella grande. Fatto che hai coſi ritorna a vodar quella dalle 5. nella grande, & coſi gli ne ſaranno 7. poi quella vna che era in quella dalle 3. vodala in quella dalle 5. poi riempie vn'altra fiata quella dalle 3.& poi la reuoda in quella dalle 5. doue era rimaſta quella ſola ſaranno a ponto 4.& 4 ne ſono rimaſte nell'ampolletta grande, & coſi ſi trouorno hauer oncia 4 di balſamo a ponto ciaſcun di loro, onde ſi partirno contenti, & andettero chi di qua chi di la.

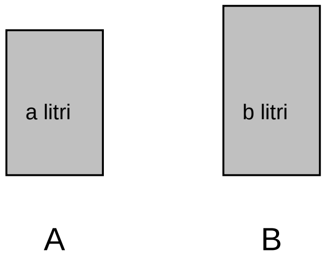
frontespizio

pagina con il problema

Al fine di studiare matematicamente il problema, occorre prima formalizzarlo e richiamare alcuni prerequisiti teorici.
Nel seguito indicheremo con **N** l'insieme dei numeri naturali: 0, 1, 2, 3, … e con **Z** l'insieme dei numeri interi: … –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …

1. FORMALIZZAZIONE

Indichiamo con A e B i due contenitori e con a e b le loro capacità e c la quantità di liquido da ottenere,



con a, b, c $\in$ **N** e $0 < c < \max\{a;b\}$

1.1 STATI

Indichiamo con la coppia (x;y) un particolare stato del problema, caratterizzato dalla quantità di liquido x contenuto nel contenitore A e dalla quantità di liquido y contenuta in B, con x, y $\in$ **N** e **,** $0 \le x \le a$ e $0 \le y \le b$.

Lo stato iniziale è quindi rappresentato dalla coppia (0; 0) e quello da raggiungere è (c; y) per qualche y, oppure (x, c) per qualche x.

1.2 AZIONI

Le azioni di liquido che permettono di passare da uno stato ad un altro sono descritte nel seguente schema

DENOMINAZIONE	NOTAZIONE	DESCRIZIONE	VINCOLI
RIEMPIMENTI	R_A	A viene completamente riempito	A non deve essere pieno
	R_B	B viene completamente riempito	B non deve essere pieno
TRAVASI	$T_{A\rightarrow B}$	Il liquido in A viene travasato in B fino a quando A è vuoto oppure B è pieno	A non deve essere vuoto e B non deve essere pieno
	$T_{A\leftarrow B}$	Il liquido in B viene travasato in A fino a quando B è vuoto oppure A è pieno	B non deve essere vuoto e A non deve essere pieno
SVUOTAMENTI	S_A	A viene completamente svuotato	A non deve essere vuoto
	S_B	B viene completamente svuotato	B non deve essere vuoto

1.3 EFFETTI DELE AZIONI

Indichiamo gli effetti delle azioni su uno stato indicando lo stato iniziale e quello finale separati dall'azione. Illustriamo ora tutte le possibili situazioni (si suppone che x e y rispettino i vincoli richiesti)

- $(x; y)$ R_A $(a; y)$
- $(x; y)$ R_B $(x; b)$
- $(x; y)$ $T_{A\rightarrow B}$ $(0; x+y)$ oppure $(x; y)$ $T_{A\rightarrow B}$ $(x+y-b; b)$
- $(x; y)$ $T_{A\leftarrow B}$ $(x+y; 0)$ oppure $(x; y)$ $T_{A\leftarrow B}$ $(a; x+y-a)$
- $(x; y)$ S_A $(0; y)$
- $(x; y)$ S_B $(x; 0)$

Osservazione: se si parte dallo stato $(0;0)$ non si ottengono mai stati in cui $0<x<a$ e $0<y<b$.

1.4 FORMALIZZAZIONE DEL PROBLEMA

Ogni problema dei travasi con contenitori di capienza a e b e quantità da realizzare c può essere formalizzato nel modo seguente:

dati tre numeri $a, b, c \in \mathbf{N}$ e $0 < c < \max\{a;b\}$, trovare una sequenza di azioni che permetta di passare dallo stato iniziale $(0, 0)$ a quello
$(c; y)$ per qualche y, oppure (x , c) per qualche x.

2. RICHIAMI TEORICI

Occorre introdurre alcune nozioni di teoria dei numeri.

2.1 TEOREMA DELLA DIVISIONE CON IL RESTO

Dati $a \in \mathbf{N}$ e , $b \in \mathbf{N} - \{0\}$ esistono solo due numeri $q , r \in \mathbf{N}$ tali che:

$$a = qb + r , \text{ con } 0 \leq r < b$$

q prende il nome di “quoziente” della divisione di a per b
r prende il nome di “resto” della divisione di a per b

Esempio: $7 = 2 \cdot 3 + 1$, con $0 \leq 1 < 3$,
2 è il quoziente della divisione di 7 per 3 ,

1 è il resto della divisione di 7 per 3

2.2 DEFINIZIONE: EQUAZIONI DIOFANTEE DI 1° GRADO

Si dice equazione diofantea (di 1°grado) ogni equazione della forma:

$$ax + by = c \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbf{Z} \text{ e } a \text{ e } b \text{ non entrambi nulli}$$

Si dice soluzione dell'equazione diofantea ogni coppia $(\bar{x},\bar{y})$ con $\bar{x},\bar{y} \in \mathbf{Z}$ tale che:

$$a\bar{x} + b\bar{y} = c$$

<u>Esempio</u>: la coppia (1; –3) è una soluzione dell'equazione diofantea: $8x - 6y = 26$

infatti: $8(1) - 6(-3) = 26$

2. 3 TEOREMA FONDAMENTALE DELLE EQUAZIONI DIOFANTEE DI 1° GRADO

Un'equazione diofantea di 1°grado

$$ax + by = c \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbf{Z} \text{ e } a \text{ e } b \text{ non entrambi nulli}$$

ha soluzioni sse c è un multiplo del MCD(a;b)[1] .
In tal caso se $(\bar{x},\bar{y})$ è una soluzione dell'equazione, tutte le soluzioni (x',y') si trovano con le formule:

$$x' = \bar{x} + \frac{b}{\mathrm{MCD}(a,b)}n \qquad\qquad y' = \bar{y} - \frac{a}{\mathrm{MCD}(a,b)}n$$

al variare di n in **Z**.

<u>Esempio</u>

Riprendiamo in esame l'equazione diofantea (Es 2.2):

$$8x - 6y = 26$$

in questo caso:
a= 8
b= –6
c= 26
MCD(8, –6)=2
e si verifica che 26 è un multiplo di MCD(8, –6)=2. L'equazione è possibile, e una soluzione è la coppia (1; –3), e allora tutte le soluzioni si ottengono con le formule:

$$x' = \bar{x} + \frac{b}{\mathrm{MCD}(a,b)}n = 1 + \frac{-6}{\mathrm{MCD}(8,\text{-}6)}n = 1 - 3n$$

$$y' = \bar{y} - \frac{a}{\mathrm{MCD}(a,b)}n = -3 - \frac{8}{\mathrm{MCD}(8,-6)}n = -3 - 4n$$

[1] Se a o b sono negativi per MCD(a,b) si intende il MDC dei loro valori assoluti

al variare di n in **Z**

…

n = –2	(7; 5)
n= –1	(4; 1)
n= 0	(1; –3)
n = 1	(–2; –7)
n= 2	(–5; –11)

...

2. 4 RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI UN'EQUAZIONE DIOFANTEE DI 1° GRADO

Rappresentando un'equazione diofantea di 1°grado

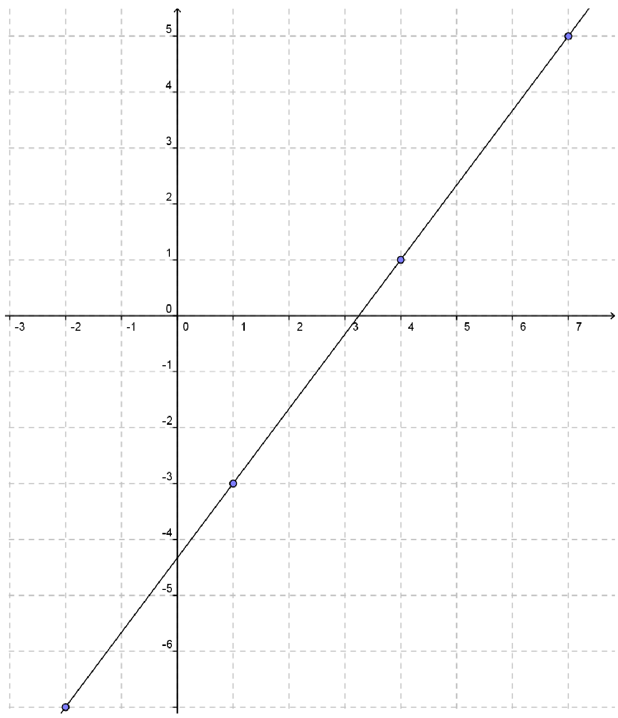
$$ax + by = c \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbf{Z} \qquad \text{e} \quad a \neq 0 \quad \text{e} \quad b \neq 0$$

in un piano cartesiano si vede come i punti corrispondenti alle soluzioni si dispongono sulla retta di equazione $ax + by = c$ distanziandosi uno dall'altro di una quantità fissa pari a:

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{MCD(a,b)}$$

<u>Esempio</u>

Nel caso dell'equazione $8x - 6y = 26$ la distanza in questione vale 5 e il grafico è il seguente (sono indicate 4 soluzioni):



3. ANALISI DEL PROBLEMA.

3.1 OBIETTIVI

Siamo pronti ad analizzare il nostro problema. Vogliamo trovare risposta alla seguente questione.

In quali casi il problema dei travasi ha soluzione, e quando non ne ha?

Prima di rispondere dobbiamo studiare come in una sequenza di azioni variano quantitativamente i contenuti dei due recipienti.

3.2 LEMMA

Dati due contenitori di capienza a, b, ogni stato (x;y) ottenuto a partire dallo stato iniziale (0;0) mediante una sequenza finita di azioni è tale che:

$x = h_1a + h_2b$ e $y = k_1a + k_2b$ per qualche $h_1, h_2, k_1, k_2 \in$ **Z**

<u>Dimostrazione (per induzione sul numero n delle azioni)</u>

(n=0) : non ci sono azioni, lo stato finale coincide con quello iniziale (0,0). L'enunciato è vero banalmente:

$0 = 0a + 0b$ e $0 = 0a + 0b$

($n \Rightarrow n+1$) : Indichiamo con: $(0,0)\ Az_1\ (x_1,y_1)\ Az_2\ (x_2,y_2)\ .....\ Az_n\ (x_n,y_n)\ Az_{n+1}\ (x_{n+1},y_{n+1})$ una sequenza con n+1 azioni indicate con $Az_1, Az_2, ..., Az_n, Az_{n+1}$

Essendo l'enunciato valido per n si ha che:

$x_n = h_1a + h_2b$ e $y_n = k_1a + k_2b$ per qualche $h_1, h_2, k_1, k_2 \in$ **Z**

Consideriamo ora il passaggio: $(h_1a + h_2b, k_1a + k_2b)\ Az_{n+1}\ (x_{n+1},y_{n+1})$
possono presentarsi diversi casi:

caso 1): Az_{n+1} è R_A:

$(h_1a + h_2b, k_1a + k_2b)\ R_A\ (a, k_1a + k_2b)$ vale con $1, 0, k_1, k_2$;

caso 2): Az_{n+1} è R_B:

$(h_1a + h_2b, k_1a + k_2b)\ R_B\ (h_1a + h_2b, b)$ vale con $h_1, h_2, 0, 1$;

caso 3): Az_{n+1} è $T_{A\rightarrow B}$:

$(h_1a + h_2b, k_1a + k_2b)\ T_{A\rightarrow B}\ (0, (h_1+k_1)a + (h_2+k_2)b)$ vale con $0, 0, h_1+k_1, h_2+k_2$;

oppure
$(h_1a + h_2b, k_1a + k_2b)\ T_{A\to B}\ ((h_1+k_1)a + (h_2+k_2-1)b, b)$ vale con h_1+k_1, h_2+k_2-1, 0, 1 ;

caso 4): Az_{n+1} è $T_{A\leftarrow B}$:

$(h_1a + h_2b, k_1a + k_2b)\ T_{A\leftarrow B}\ ((h_1+k_1)a + (h_2+k_2)b, 0)$ vale con h_1+k_1, h_2+k_2 ,0 , 0 ;

oppure

$(h_1a + h_2b, k_1a + k_2b)\ T_{A\leftarrow B}\ (a, (h_1+k_1-1)a + (h_2+k_2)b)$ vale con 1, 0, h_1+k_1-1, h_2+k_2 ;

caso 5): Az_{n+1} è S_A :

$(h_1a + h_2b, k_1a + k_2b)\ S_A\ (0, k_1a + k_2b)$ vale con 0, 0 , k_1, k_2 ;

caso 6): Az_{n+1} è S_B:

$(h_1a + h_2b, k_1a + k_2b)\ S_B\ (h_1a + h_2b, 0)$ vale con h_1, h_2 , 0, 0 .

Q.e.d.

3.3 DEFINIZIONE: STRATEGIA DESTRA, STRATEGIA SINISTRA.

Si definisce "strategia destra" ogni sequenza di azioni che segue le seguenti regole:

1) Se A è vuoto lo si riempie con R_A.
2) Se A non è vuoto lo si svuota con un numero finito di travasi $T_{A\to B}$ e svuotamenti S_B di B fino ad uno stato (0;y) con y<b.

Si definisce "strategia sinistra" ogni sequenza di azioni che segue le seguenti regole:

1) Se B è vuoto lo si riempie con R_B
2) Se B non è vuoto lo si svuota con un numero finito di travasi $T_{A\leftarrow B}$ e svuotamenti S_A di A fino ad uno stato (x;0) con x<a.

<u>Osservazione</u>. Si osservi che applicando la strategia destra (sinistra) a partire dallo stato (0;0) si effettua un primo riempimento di A (di B) (regola 1), poi si raggiunge lo stato (0;y) con y<b (lo stato (x;0) con x<a) (regola 2), da qui si può ricominciare e andare avanti quanto si vuole alternando le regole 1 e 2.
Si noti inoltre che nella strategia destra (sinistra) per ogni stato ottenuto del tipo (0;y) (del tipo (x;0)) si ha y=na–mb (x=nb–ma) dove n è il numero di riempimenti di A (di B) e m il numero di svuotamenti di B (di A)

4. Condizione necessaria e sufficiente

Siamo finalmente in grado di rispondere al primo dei due quesiti posti all'inizio del paragrafo 3.

4.1 Teorema

Dati tre numeri a, b, c $\in$ **N** $0 < c < \max\{a;b\}$
CNES affinché il problema dei travasi con contenitori di capienza a, b e quantità da realizzare c sia risolubile, è che c sia un multiplo di MCD(a,b)

Dimostrazione

(CN)

Se il problema dei travasi con a, b, c $\in$ **N** $0 < c < \max\{a;b\}$ è risolubile, allora dallo stato iniziale (0,0) si arriva ad uno stato (c;y) per qualche y$\in$**N** , oppure ad uno stato (x;c) per qualche x$\in$**N**.
Per il lemma 3.2 ne segue che in entrambi i casi esistono due interi h, k $\in$ **Z** tali che $ha + kb=c$, cioè l'equazione $ax + by=c$ ammette soluzioni. Per il teorema 2.3 il numero c deve essere necessariamente un multiplo di MCD(a,b). Q.e.d

(CS)

Se c è multiplo di MCD(a,b) con a, b, c $\in$ **N** $0 < c < \max\{a;b\}$, per il teorema 2.3 l'equazione diofantea ax+by=c è risolubile, e tutte le soluzioni (x',y') possono essere generate dalle formule:

$$x' = \bar{x} + \frac{b}{MCD(a,b)}n \qquad\qquad y' = \bar{y} - \frac{a}{MCD(a,b)}n$$

al variare di n in **Z**.

Scegliendo una valore n tale che: $n \geq \max\left\{-\frac{\bar{x}MCD(a,b)}{b};\frac{\bar{y}MCD(a,b)}{a}\right\}$

otteniamo una soluzione (x',y') con $x' \geq 0$ e $y' \leq 0$, per i quali:

$ax'+by'=c$ da cui $ax' =-y'b+c$, ed essendo $0\leq c<b$, si ha che c= resto(x’a,b)

In virtù delle osservazioni 3.3 , è possibile applicare la strategia destra allo stato (0,0) fino ad ottenere con la regola 1, x’ riempimenti di A e raggiungere con la regola 2, dopo l’ultimo riempimento di A, lo stato (0,y) con y<b; ma y=x’a – mb , da cui x’a = mb + y , ed essendo 0 ≤y<b si ha y= resto(x’a,b)=c: la strategia destra con x’ riempimenti di A risolve il problema del travaso. Q.e.d.

Osservazione La dimostrazione della condizione sufficiente è “costruttiva”, non si limita cioè a dimostrare l’esistenza di una non specificata sequenza di azioni che risolve il problema, ma ne illustra una costruita seguendo le regole della strategia destra che termina nello stato (0;c). In maniera simile si potrebbe far vedere che ne esiste un’altra costruita seguendo le regole della strategia sinistra che termina nello stato (c;0).

5. ESEMPIO DI RISOLUZIONE

Applichiamo ora il teorema appena dimostrato al problema dei travasi proposto all'inizio.

Avendo a disposizione una fontana e due brocche, rispettivamente da 9 e da 15 litri, come si può a raccogliere precisamente 6 litri d’acqua?

In virtù del teorema 4.1 il problema è risolubile perché 6 è un multiplo di MCD(9;15)=3.

Mostreremo ora come la strategia destra permette di raggiungere lo stato (0;6) e la strategia sinistra lo stato (6,0).

Strategia destra

(0;0) R_A (9;0) $T_{A\to B}$ (0;9) R_A (9;9) $T_{A\to B}$ (3;15) S_B (3;0) $T_{A\to B}$ (0;3) R_A (9;3) $T_{A\to B}$ (0;12)

Strategia sinistra

(0;0) R_B (0;15) $T_{A\leftarrow B}$ (9;6) S_A (0;6) $T_{A\leftarrow B}$ (6;0) R_B (6;15) $T_{A\leftarrow B}$ (9;12) S_A (0;12) $T_{A\leftarrow B}$ (12;0)

Osserviamo che nella strategia sinistra le ultime due azioni sono inutili ai fini della risoluzione del problema, ed eliminandole, la strategia sinistra si dimostra in questo caso "migliore": 6 azioni per quella sinistra contro le 8 di quella destra

Resterebbe da dimostrare che le strategie destre e sinistre sono le migliori tra tutte le possibili scelte di sequenze di azioni, ma questo sarà argomento di un successivo studio.

6. BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

- R. Courant, H. Robbins**,** *Che cos'è la matematica*, ed. Bollati Boringhieri, 2000.

- P. Francini (2010), *Appunti di aritmetica,* http://crf.uniroma2.it/wpcontent/uploads/2010/04/Aritmetica.pdf

- M. Castellan (2010), *Logica*, http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads/2010/04/Logica.pdf

- F. Peiretti (2008), *Il triangolo di Tartaglia*, http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Feb_02/Cap8.html

LORENZO CAPRINI (2^M)
RAFFAELE LOBOZZO (3^N)

(Liceo classico Orazio di Roma, a.s. 2009-2010)