IL PROBLEMA DEI QUADRATI

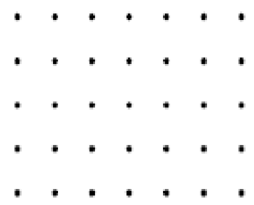
MICHELE ROVIGATTI
MARGHERITA MORETTI
SIMONE MORETTI
CATERINA COSTANZO
GABRIELE ARGIRÒ

0. INTRODUZIONE.

Il problema nasce da un quesito di combinatorica inserito nel testo di una gara di matematica (semifinale nazionale del campionato internazionale di Giochi Matematici del 2010):

13 I QUADRATI

Quanti quadrati si possono formare congiungendo quattro punti della griglia del disegno?
(Dovranno essere contati tutti i quadrati, in qualunque modo siano orientati)



L'obiettivo di questo lavoro è di risolvere il problema determinando una formula generale che permetta di contare tutti i quadrati contenuti in una griglia rettangolare di lati di lunghezza a e b.

1. PREREQUISITI: CALCOLO CON LE SOMMATORIE

1.1 NOTAZIONE.

Spesso abbiamo bisogno di calcolare somme di sequenze di "molti" numeri. Per scrivere queste somme in modo sintetico e compatto introduciamo il simbolo di sommatoria.
Definizione: siano $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m \leq n$. Data una sequenza finita di numeri reali $a_m, a_{m+1}, \ldots a_n$ indichiamo la loro somma con la seguente notazione:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

Il simbolo di sommatoria è semplicemente una stenografia matematica che ci fa risparmiare spazio oppure ci evita l'imbarazzo di dover inserire dei vaghi "puntini" all'interno di formule matematiche.

Ecco alcuni esempi:

$$\sum_{k=1}^{37} k = 1 + 2 + 3 + \ . \ . \ . \ + 35 + 36 + 37$$

$$\sum_{k=1}^{8} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8} + \frac{8}{9}$$

1.2 Proprietà.

Vediamo alcune proprietà che ci permetteranno di manipolare in modo formale le sommatorie.

- Se i termini che sommiamo hanno tutti lo stesso valore che non dipende da k si avrà:

$$\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \ . \ . \ . \ c + c = c \cdot n$$

- L'operatore di sommatoria agisce in modo lineare. Moltiplicare tutti termini della somma per la stessa costante, in virtù della proprietà distributiva, ha lo stesso effetto che moltiplicare tutta la somma per quella costante:

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

La sommatoria di una sequenza di somme, in virtù della proprietà commutativa, è uguale alla somma delle sommatorie delle singole sequenze:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

- In virtù della proprietà associativa, possiamo scomporre una sommatoria nella somma di due sommatorie:

$$\sum_{k=1}^{m+n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k$$

1.3 Somme telescopiche.

Data una sequenza di numeri $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ consideriamo la sequenza delle differenze di termini consecutivi $a_1 - a_2, a_2 - a_3, \ldots, a_n - a_{n+1}$; la somma di tali differenze $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})$ si dice <u>somma telescopica</u>.

Il calcolo di somme telescopiche risulta essere molto semplice in quanto si verificano delle cancellazioni di termini tra la somma di una differenza e quella successiva:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1}) = (a_1 - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_3}) + \cancel{\ldots}\ldots\cancel{\ldots} + (\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_n}) + (\cancel{a_n} - a_{n+1}) = a_1-a_{n+1}$$

Si dice somma telescopica anche $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$. Infatti:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k) = (\cancel{a_2} - a_1) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_2}) + \cancel{\ldots}\ldots\cancel{\ldots} + (\cancel{a_n} - \cancel{a_{n-1}}) + (a_{n+1} - \cancel{a_n}) = a_{n+1}-a_1$$

1.4 Somma dei primi n

Troviamo adesso, utilizzando le sommatorie, una formula che ci permetta di calcolare rapidamente la somma di tutti i numeri interi da 1 a n.
Quindi dobbiamo trovare una formula per:

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

Per farlo useremo le somme telescopiche. Partiamo considerando la differenza tra i quadrati di due numeri consecutivi:

$$(k + 1)^2 - k^2$$

$$(k + 1)^2 - k^2 = (\cancel{k^2} + 2k + 1) - \cancel{k^2} = 2k + 1$$

Quindi possiamo dire che:

$$\sum_{k=1}^{n}(k + 1)^2 - k^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k + 1)$$

La prima sommatoria, essendo una somma telescopica, la sappiamo risolvere:

$$(n + 1)^2 - 1 = \sum_{k=1}^{n}(2k + 1)$$

Per la proprietà commutativa, dividiamo la sommatoria rimasta in due sommatorie:

$$(n + 1)^2 - 1 = \sum_{k=1}^{n} 2k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

Poiché nella sommatoria $\sum_{k=1}^{n} 1$ il numero 1 è un valore costante che non dipende da k, possiamo scrivere:

$$(n + 1)^2 - 1 = \sum_{k=1}^{n} 2k + 1n$$

Adesso ci è rimasta una sola sommatoria. In virtù della proprietà distributiva, portiamo il 2 fuori dalla sommatoria:

$$(n + 1)^2 - 1 = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n$$

La sommatoria che ci è rimasta corrisponde proprio alla somma di tutti i numeri interi da 1 a n, ovvero è quella di cui vogliamo trovare il valore. A questo punto basta andare avanti come in una semplice equazione:

$$(n + 1)^2 - 1 = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n$$

$$(n^2 + 2n + \cancel{1}) - \cancel{1} = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n$$

$$2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) = n^2 + 2n - n$$

$$2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) = n^2 + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

1.5 Somma dei primi n quadrati

Troviamo adesso, utilizzando le sommatorie, una formula che ci permetta di calcolare rapidamente la somma di tutti i quadrati dei numeri interi da 1 a n.
Quindi dobbiamo trovare una formula per:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Per farlo useremo le somme telescopiche. Partiamo considerando la differenza tra i cubi di due numeri consecutivi:

$$(k + 1)^3 - k^3$$

$$(k + 1)^3 - k^3 = (\cancel{k^3} + 3k^2 + 3k + 1) - \cancel{k^3} = 3k^2 + 3k + 1$$

Quindi possiamo dire che:

$$\sum_{k=1}^{n} (k + 1)^3 - k^3 = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 3k + 1)$$

La prima sommatoria, essendo una somma telescopica, la sappiamo risolvere:

$$(n + 1)^3 - 1 = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 3k + 1)$$

Per la proprietà commutativa, dividiamo la sommatoria rimasta in tre sommatorie:

$$(n + 1)^3 - 1 = \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + \sum_{k=1}^{n} 3k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

Poiché nella sommatoria $\sum_{k=1}^{n} 1$ il numero 1 è un valore costante che non dipende da k, possiamo scrivere:

$$(n+1)^3 - 1 = \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + \sum_{k=1}^{n} 3k + 1n$$

Adesso ci sono rimasta due sommatorie. In virtù della proprietà distributiva, portiamo i 3 fuori dalla sommatoria:

$$(n+1)^3 - 1 = 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + 3\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n$$

La sommatoria $\sum_{k=1}^{n} k$ la sappiamo già risolvere perché è la somma dei primi n, quindi:

$$(n+1)^3 - 1 = 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + 3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n$$

La sommatoria che ci è rimasta corrisponde proprio alla somma di tutti i quadrati dei numeri interi da 1 a n, ovvero è quella di cui vogliamo trovare il valore. A questo punto basta andare avanti come in una semplice equazione:

$$(n+1)^3 - 1 = 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + 3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n$$

$$(n^3 + 3n^2 + 3n + \cancel{1}) - \cancel{1} = 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + 3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

$$3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3n(n+1)}{2} - n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.6 Somma dei primi n cubi

Troviamo adesso, utilizzando le sommatorie, una formula che ci permetta di calcolare rapidamente la somma di tutti i cubi dei numeri interi da 1 a n.
Quindi dobbiamo trovare una formula per:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3$$

Per farlo useremo le somme telescopiche. Partiamo considerando la differenza tra le quarte potenze di due numeri consecutivi:

$$(k+1)^4 - k^4$$

$$(k + 1)^4 - k^4 = (\cancel{k^4} + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) \cancel{- k^4} = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

Quindi possiamo dire che:

$$\sum_{k=1}^{n} (k + 1)^4 - k^4 = \sum_{k=1}^{n} (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)$$

La prima sommatoria, essendo una somma telescopica, la sappiamo risolvere:

$$(n + 1)^4 - 1 = \sum_{k=1}^{n} (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)$$

Per la proprietà commutativa, dividiamo la sommatoria rimasta in quattro sommatorie:

$$(n + 1)^4 - 1 = \sum_{k=1}^{n} 4k^3 + \sum_{k=1}^{n} 6k^2 + \sum_{k=1}^{n} 4k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

Poiché nella sommatoria $\sum_{k=1}^{n} 1$ il numero 1 è un valore costante che non dipende da k, possiamo scrivere:

$$(n + 1)^4 - 1 = \sum_{k=1}^{n} 4k^3 + \sum_{k=1}^{n} 6k^2 + \sum_{k=1}^{n} 4k + 1n$$

Adesso ci sono rimasta tre sommatorie. In virtù della proprietà distributiva, portiamo i coefficienti delle k fuori dalla sommatoria:

$$(n + 1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n$$

La sommatorie $\sum_{k=1}^{n} k$ e $\sum_{k=1}^{n} k^2$ le sappiamo già risolvere perché sono rispettivamente la somma dei primi n e la somma dei primi n quadrati, quindi:

$$(n + 1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + 4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n$$

La sommatoria che ci è rimasta corrisponde proprio alla somma di tutti i cubi dei numeri interi da 1 a n, ovvero è quella di cui vogliamo trovare il valore. A questo punto basta andare avanti come in una semplice equazione:

$$(n + 1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + 4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2. Conteggio dei quadrati

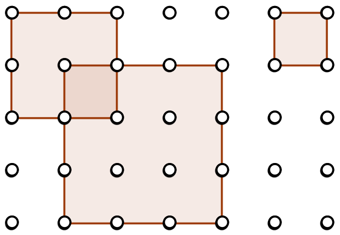
Siamo ora pronti per iniziare la ricerca della formula per il conteggio dei quadrati.

Per fare questo abbiamo deciso di utilizzare una partizione dell'insieme Q dei quadrati da contare, cioè una famiglia di insiemi Q_1, Q_2, Q_3 ,... Q_{n-1} , Q_n, a due a due disgiunti e tali che: $Q= Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$,... $Q_{n-1} \cup Q_n$. Per il calcolo di tutti i quadrati (la cardinalità di Q, indicata con IQI) si potrà allora usare la relazione (proprietà delle partizioni):

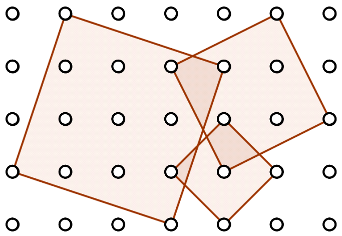
$$|Q| = |Q_1| + |Q_2| + |Q_3| +...+ |Q_{n-1}| + |Q_n|$$

A tale scopo iniziamo ad individuare due tipi di quadrati:

- quadrati con i lati paralleli a quelli del rettangolo (quadrati "orizzontali")



- quadrati con i lati non paralleli a quelli del rettangolo (quadrati obliqui)



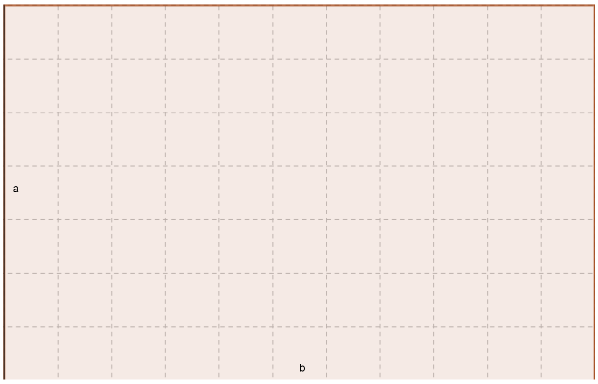
2.1. Teorema: conteggio dei quadrati orizzontali.

Consideriamo una griglia rettangolare con i lati a, b tali che $a \le b$.

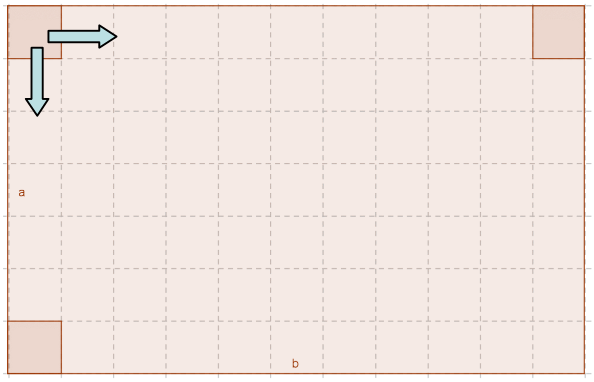
- Il numero di quadrati orizzontali di lato k è: $[a-(k-1)][b-(k-1)]$
- Il numero di tutti quadrati orizzontali è: $\dfrac{a(a+1)(3b-a+1)}{6}$

Dimostrazione

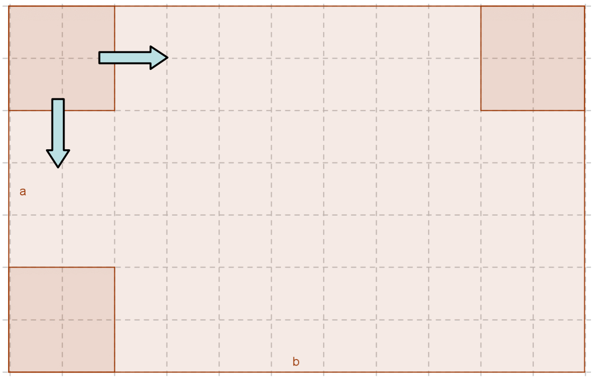
Consideriamo un generico rettangolo con i lati a, b tali che a ≤ b



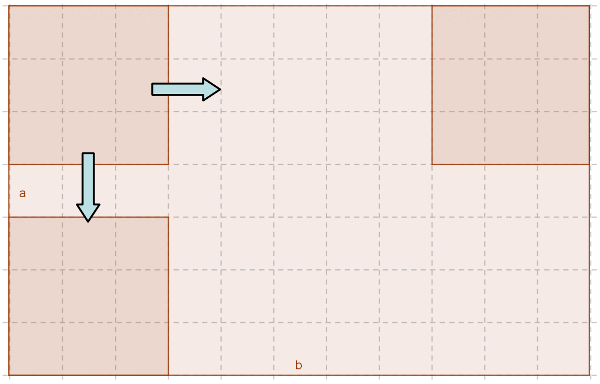
e contiamo quanti quadrati orizzontali 1x1 vi sono all’interno del rettangolo e notiamo che sono tanti quanti a x b .



Poi si vede quanti sono i quadrati orizzontali 2x2 e notiamo che sono (a–1)(b–1).



I quadrati orizzontali 3x3 invece sono (a–2)(b–2).



Così continuando si ottiene che i quadrati orizzontali kxk sono: $[a-(k-1)][b-(k-1)]$

Si arriva alla fine ai quadrati axa che sono [a–(a–1)][b–(a–1)]= b–a+1

Possiamo allora calcolare il numero di tutti i quadrati orizzontali con la sommatoria

$$\sum_{k=1}^{a}[a-(k-1)][b-(k-1)]$$

Si fanno tutti i calcoli:

$$\sum_{k=1}^{a}(a-k+1)(b-k+1)$$

$$\sum_{k=1}^{a}(a+ab+b-ak-bk+k^2-2k+1)$$

$$\sum_{k=1}^{a}(a+ab+b)-\sum_{k=1}^{a}ak-\sum_{k=1}^{a}bk+\sum_{k=1}^{a}k^2+\sum_{k=1}^{a}(-2k+1)$$

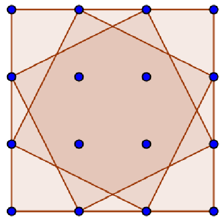
$$a^2+a^2b+ab-\frac{a^3+a^2}{2}-\frac{a^2b+ab}{2}+\frac{2a^3+3a^2+a}{6}-a^2$$

$$\frac{3a^2b-a^3+3ab+a}{6}$$

La formula dei quadrati orizzontali quindi è: $\dfrac{a(a+1)(3b-a+1)}{6}$

2.3. CONTEGGIO DEI QUADRATI INSCRITTI IN UN QUADRATO ORIZZONTALE

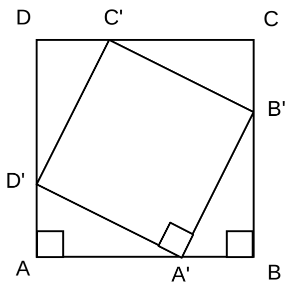
Il successivo passo consiste nel contare tutti i quadrati inscritti in un quadrato orizzontale



A tale scopo occorre prima dimostrare un risultato di geometria euclidea.

2.4 TEOREMA DEI QUADRATI INSCRITTI IN UN QUADRATO.

Dato il quadrato ABCD e il quadrato inscritto A'B'C'D' si ha:



$$AA' \cong BB' \cong CC' \cong DD' \qquad \text{e} \qquad A'B \cong B'C \cong C'D \cong D'A$$

<u>Dimostrazione.</u>

$\widehat{AA'D'} + \widehat{BA'B'} \cong \widehat{R}$ perché supplementari dell'angolo $D'A'B' \cong \widehat{R}$;

ma anche $\widehat{AA'D'} + \widehat{AD'A'} \cong \widehat{R}$ perché la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a due angoli retti. Quindi $AD'A' \cong BA'B'$ perché complementari di uno stesso angolo.

Inoltre $D'A' \cong A'B'$ per ipotesi.

Quindi $\overset{\triangle}{AD'A'} \cong \overset{\triangle}{BA'B'}$ per il 2° criterio di congruenza dei triang oli. Analogamente si dimostra che:

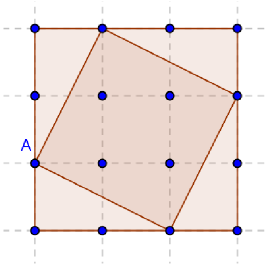
$\overset{\triangle}{BA'B'} \cong \overset{\triangle}{CB'C'}$ $\qquad$ $\overset{\triangle}{CB'C'} \cong \overset{\triangle}{DC'D'}$ $\qquad$ $\overset{\triangle}{DC'D'} \cong \overset{\triangle}{AD'A'}$

e quindi:

$$AA' \cong BB' \cong CC' \cong DD' \qquad \text{e} \qquad A'B \cong B'C \cong C'D \cong D'A$$

<u>Osservazione</u>: scelto un lato del quadrato grande:

- fissato un punto A sul lato, c'è solo un quadrato in esso inscritto con vertice A.
- ogni quadrato inscritto ha un vertice su questo lato.



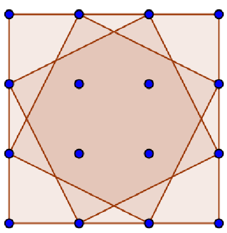
2.5 TEOREMA (CONTEGGIO DEI QUADRATI INSCRITTI)

Il numero dei quadrati inscritti in un quadrato orizzontale di lato n (compreso il quadrato orizzontale), sono esattamente n.

<u>Dimostrazione.</u>

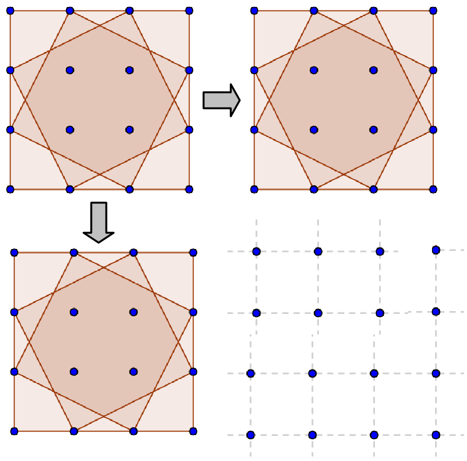
Segue dall'osservazione fatta alla fine del teorema precedente e dal fatto che i punti della griglia posti su un lato del quadrato orizzontale e che determinano i quadrati inscritti sono n.

Esempio: n=3



2.6 PARTIZIONE DEI QUADRATI.

Un modo per considerare tutti i quadrati è considerare tutti i quadrati inscritti in un singolo quadrato orizzontale, e poi far variare quest'ultimo nell'insieme di tutti i quadrati orizzontali.



Questa scelta corrisponde raccogliere tutti i quadrati negli insiemi dei quadrati inscritti nei quadrati orizzontali. Questi insiemi realizzano una partizione, infatti:

- ogni quadrato è inscritto in qualche quadrato orizzontale;
- non succede mai che un quadrato sia inscritto contemporaneamente in due quadrati orizzontali (dipende dal fatto che due quadrati orizzontali hanno sempre almeno due lati privi di punti in comune e che un quadrato inscritto deve incontrare tutti i lati del quadrato orizzontale).

Siamo ora finalmente in grado di contare tutti quadrati utilizzando tale partizione.

2.7. TEOREMA: CONTEGGIO DI TUTTI I QUADRATI.

Il numero di tutti i quadrati contenuti in una griglia rettangolare di dimensioni a e b con $a \leq b$ è:

$$\frac{a(a+1)(a+2)(2b-a+1)}{12}$$

<u>Dimostrazione.</u>

Per quanto stabilito nei teoremi 2.1 e 2.5 il numero di quadrati inscritti nei quadrati orizzontali di lato k è:

$$[a-(k-1)][b-(k-1)]k$$

Così possiamo dire che la somma di tutti i quadrati in tutti gli orientamenti corrisponde alla sommatoria:

$$\sum_{k=1}^{a}[a-(k-1)][b-(k-1)]k$$

Adesso risolviamo questa sommatoria per ricavare una formula:

$$\sum_{k=1}^{a}[a-(k-1)][b-(k-1)]k$$

$$\sum_{k=1}^{a}(ak-ak^2+abk+k^3-bk^2-bk-2k^2+k)$$

Dividiamo la sommatoria nelle sommatorie:

$$\sum_{k=1}^{a}ak-\sum_{k=1}^{a}ak^2+\sum_{k=1}^{a}abk+\sum_{k=1}^{a}k^3-\sum_{k=1}^{a}bk^2-\sum_{k=1}^{a}bk-\sum_{k=1}^{a}2k^2+\sum_{k=1}^{a}k$$

Per la proprietà distributiva, portiamo fuori dalle sommatorie i coefficienti dei vari k:

$$a(\sum_{k=1}^{a}k)-a(\sum_{k=1}^{a}k^2)+ab(\sum_{k=1}^{a}k)+(\sum_{k=1}^{a}k^3)-b(\sum_{k=1}^{a}k^2)-b(\sum_{k=1}^{a}k)-2(\sum_{k=1}^{a}k^2)+(\sum_{k=1}^{a}k)$$

Adesso ci accorgiamo che le sommatorie rimaste sono proprio le somme dei primi n, dei primi n quadrati e dei primi n cubi, che abbiamo già imparato a calcolare:

$$a\frac{a(a+1)}{2}-a\frac{a(a+1)(2a+1)}{6}+ab\frac{a(a+1)}{2}+\frac{a^2(a+1)^2}{4}-b\frac{a(a+1)(2a+1)}{6}-b\frac{a(a+1)}{2}-$$
$$-2\frac{a(a+1)(2a+1)}{6}+\frac{a(a+1)}{2}$$

E dopo i vari calcoli arriviamo ad avere:

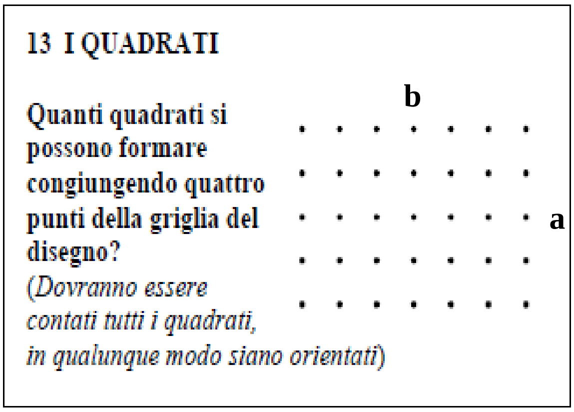
$$\frac{a(a+1)(a+2)(2b-a+1)}{12}$$

La formula per contare tutti i quadrati indipendentemente dalla loro orientazione è quindi:

$$\frac{a(a+1)(a+2)(2b-a+1)}{12}$$

CONCLUSIONE

Nel caso del quesito della gara illustrato all'inizio


13 I QUADRATI

Quanti quadrati si possono formare congiungendo quattro punti della griglia del disegno?
(Dovranno essere contati tutti i quadrati, in qualunque modo siano orientati)

si ha:

a=4
b=6

Quindi, applicando la formula stabilita nel teorema 2.7 si ha

$$\frac{4(4+1)(4+2)(2\cdot 6-4+1)}{12}=90$$

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

- D. Foschi (2009), *Sommatorie*, http://utenti.unife.it/damiano.foschi/didattica/eam1ii09sommatorie.pdf
- M. Castellan (2010), *Logica*, http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads/2010/04/Logica.pdf

MICHELE ROVIGATTI (4°D PNI)
MARGHERITA MORETTI (5°D PNI)
CATERINA COSTANZO (5°C)
SIMONE MORETTI (5°H PNI)
GABRIELE ARGIRÒ(5°H PNI)

(LICEO CLASSICO ORAZIO DI ROMA, A.S. 2009-2010)