Su alcuni numeri irrazionali

M. Olivieri
classe IV E, L.S. "E. Majorana" – Guidonia

Scopo di questa breve nota[1] è quello di fornire una dimostrazione elementare dell'irrazionalità di alcuni numeri reali. Gli strumenti di cui faremo uso si riducono ad alcuni fatti fondamentali sulla divisibilità e la fattorizzazione nei numeri interi e al seguente risultato sui polinomi a coefficienti interi:

Proposizione. Sia $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio di grado n a coefficienti interi. Se $u = \frac{a}{b}$ è una radice razionale di $f(x)$ (con a e b interi e coprimi) allora a divide a_0 e b divide a_n.

Teorema. Siano $a, b \in \mathbb{N}$, con M.C.D.$(a, b) = 1$, e sia $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Allora $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \in \mathbb{Q}$ se e soltanto se a e b sono delle potenze n–esime in $\mathbb{N}$.
Dimostrazione. Se $a = c^n$ e $b = d^n$, con $c, d \in \mathbb{N}$, chiaramente $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$.

Viceversa supponiamo che $t = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \in \mathbb{Q}$. Ciò vuol dire che t è una radice del polinomio a coefficienti interi $b \cdot x^n - a$.
Se supponiamo che $t = \frac{c}{d}$, con M.C.D.$(c, d) = 1$, sappiamo che d divide b e c divide a. Esistono cioè dei numeri naturali e, f tali che $c \cdot e = a$ e $d \cdot f = b$. Si avrà dunque anche

$$\frac{a}{b} = \frac{c \cdot e}{d \cdot f}.$$

Elevando alla n entrambe i termini della precedente identità si trova allora

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} \cdot \frac{e^n}{f^n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e^n}{f^n}.$$

Dividendo per $\frac{a}{b}$ otteniamo allora

$$\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} = \frac{e^n}{f^n}.$$

[1] Relazione conclusiva scritta per il laboratorio "Ricerca Matematica Attiva", attivato nell'anno scolastico 2009/2010 presso il Liceo Scientifico "E. Majorana" di Guidonia in collaborazione con l'Università di Roma "Tor Vergata", nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche. Il lavoro è stato svolto con la supervisione del prof. F. Chiera.

Poiché per ipotesi M.C.D.$(a, b) = 1$, entrambe i numeri razionali che compaiono nella precedente identità sono ridotti ai minimi termini. Quindi, per l'unicità della scrittura di un numero razionale avremo che

$$a^{n-1} = e^n, \quad \text{e} \quad b^{n-1} = f^n.$$

Ora, considerando ad esempio le fattorizzazioni in numeri primi di a ed e troviamo un'identità del tipo

$$p_1^{(n-1)\cdot\alpha_1} \cdot p_2^{(n-1)\cdot\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{(n-1)\cdot\alpha_k} = p_1^{n\cdot\beta_1} \cdot p_2^{n\cdot\beta_2} \cdot \dots \cdot p_h^{n\cdot\alpha_h}$$

con $k \geq h$ e $\alpha_i \geq \beta_i$ per $i = 1, \dots, h$. Essendo unica la fattorizzazione di un intero in numeri primi si avrà $k = h$ e

$$(n-1) \cdot \alpha_i = n \cdot \beta_i$$

per $i = 1, \dots, k$. Tenendo presente che n e $n-1$ sono sempre coprimi, si ottiene allora che n divide α_i per ogni i, ovverosia che a è una potenza n–esima in $\mathbb{N}$. Ragionando in maniera analoga per b ed f si ottiene che anche b è necessariamente una potenza n–esima.

Osservazione. Se z è un numero irrazionale, sono irrazionali anche tutti i numeri $x \cdot z + y$ con $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ e $y \in \mathbb{Q}$. Infatti se esiste $t \in \mathbb{Q}$ tale che

$$x \cdot z + y = t$$

allora $z = (t - y) : x \in \mathbb{Q}$ perché la sottrazione e la divisione sono operazioni interne ai numeri razionali.

Teorema. Siano $a, b \in \mathbb{N}$ con $a > b$. Allora $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ se e soltanto se a e b sono dei quadrati. Lo stesso è vero anche per $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Dimostrazione. Siano $t = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, e $u = \sqrt{a} - \sqrt{b}$. Se $a = c^2$ e $b = d^2$, chiaramente $t = c + d \in \mathbb{N}$ e $u = c - d \in \mathbb{N}$.

Viceversa supponiamo che $t \in \mathbb{Q}$. Elevando t al quadrato troviamo

$$t^2 = a + b + 2\sqrt{ab}.$$

Elevando ulteriormente t^2 al quadrato troviamo

$$t^4 = (a + b)^2 + 4ab + 4(a + b)\sqrt{ab}.$$

Cercando di uguagliare i coefficienti di $\sqrt{ab}$ e gli addendi interi troviamo il seguente sistema di 2 equazioni

$$\begin{cases} 2X = 4(a + b) \\ (a + b)X + Y = (a + b)^2 + 4ab \end{cases}$$

Risulta che tale sistema ha come soluzione $X = 2(a+b)$ e $Y = -a^2 - b^2 + 2ab = -(a-b)^2$. In altri termini t è una radice del polinomio monico a coefficienti interi

$$x^4 - 2(a+b)x^2 + (a-b)^2.$$

Sappiamo quindi che se t è razionale, allora è necessariamente intero e divide $(a-b)^2$. Esiste quindi un intero positivo c tale che

$$t \cdot c = (a-b)^2 = t^2 \cdot u^2.$$

Si ha quindi, dividendo per t,

$$c = t \cdot u^2 = (a-b) \cdot u.$$

Risulta pertanto che anche

$$u = \frac{c}{a-b}$$

è razionale. Questo però ci conduce a concludere che anche $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ siano razionali perché

$$\sqrt{a} = \frac{t+u}{2}, \quad \sqrt{b} = \frac{t-u}{2}.$$

Come abbiamo visto nel teorema precedente, ciò implica che a e b siano dei quadrati.

Analogamente se supponiamo che $u \in \mathbb{Q}$, si trova

$$u^2 = a + b - 2\sqrt{ab}.$$

Elevando ancora al quadrato troviamo

$$u^4 = (a+b)^2 + 4ab - 4(a+b)\sqrt{ab}.$$

Cercando di uguagliare i coefficienti di $\sqrt{ab}$ e gli addendi interi troviamo il seguente sistema di 2 equazioni

$$\begin{cases} 2X = 4(a+b) \\ (a+b)X + Y = (a+b)^2 + 4ab \end{cases}$$

Risulta che tale sistema ha come il precedente soluzione $X = 2(a+b)$ e $Y = -a^2 - b^2 + 2ab = -(a-b)^2$. In altri termini anche u è una radice del polinomio monico a coefficienti interi

$$x^4 - 2(a+b)x^2 + (a-b)^2.$$

Sappiamo quindi che se u è razionale, allora è necessariamente intero e divide $(a-b)^2$. Esiste quindi un intero positivo d tale che

$$u \cdot d = (a-b)^2 = t^2 \cdot u^2.$$

Si ha quindi, dividendo per u,

$$d = t^2 \cdot u = t \cdot (a-b).$$

Risulta pertanto che anche

$$t = \frac{d}{a-b}$$

è razionale. Questo però già sappiamo implicare che a e b siano dei quadrati.

Osservazione. Si poteva dimostrare il teorema precedente più semplicemente a partire (ad esempio) dall'identità $t \cdot u = a - b$. Ciò nonostante si è scelto di dare una dimostrazione che fosse omogenea con quella del teorema seguente.

Teorema. I numeri $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ sono irrazionali.

Dimostrazione. Sia $w = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$. Usando le formule per i prodotti notevoli possiamo calcolare esplicitamente w^3 , w^6 e w^9, trovando che

$$w^3 = 5 + 3\sqrt[3]{12} + 3\sqrt[3]{18},$$

$$w^6 = 133 + 57\sqrt[3]{12} + 48\sqrt[3]{18}$$

e

$$w^9 = 2555 + 1116\sqrt[3]{12} + 981\sqrt[3]{18}.$$

Cercando di eguagliare gli addendi interi, i coefficienti di $\sqrt[3]{12}$ e quelli di $\sqrt[3]{18}$ si ottiene il seguente sistema di 3 equazioni

$$\begin{cases} 133X + 5Y + Z = 2555 \\ 57X + 3Y = 1116 \\ 48X + 3Y = 981 \end{cases}$$

che ha come soluzione $X = 15, Y = 87, Z = 125$. In altri termini w è radice del polinomio

$$x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125.$$

Se w fosse razionale allora dovrebbe essere intero e dividere 125. Questo però è falso dal momento che senz'altro $2 < w < 4$.

Sia ora $z = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$. Procedendo come sopra possiamo calcolare z^3, z^6 e z^9, ottenendo che

$$z^3 = 1 + 3\sqrt[3]{12} - 3\sqrt[3]{18},$$

$$z^6 = -107 + 33\sqrt[3]{12} + 12\sqrt[3]{18}$$

e

$$z^9 = -485 - 396\sqrt[3]{12} + 531\sqrt[3]{18}.$$

Cercando di eguagliare gli addendi interi, i coefficienti di $\sqrt[3]{12}$ e quelli di $\sqrt[3]{18}$ si ottiene il seguente sistema di 3 equazioni

$$\begin{cases} -107X + Y + Z = -485 \\ 33X + 3Y = -396 \\ 12X - 3Y = 531 \end{cases}$$

che ha come soluzione $X = 3, Y = -165, Z = 1$. In altri termini z è radice del polinomio

$$x^9 - 3x^6 + 165x^3 - 1.$$

Se z fosse razionale allora dovrebbe essere intero e dividere 1. Questo però è falso dal momento che senz'altro $0 < z < 1$.

Osservazione. Si può verificare che i polinomi a coefficienti interi

$$x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125, \quad \text{e,} \quad x^9 - 3x^6 + 165x^3 - 1,$$

che si sono determinati nel corso della precedente dimostrazione, sono entrambi irriducibili.