Sui numeri primi del tipo $3n + 2$

M. Mancuso, L. Niculut
classe IV F, L.S. “E. Majorana” – Guidonia

1 giugno 2010

Ogni numero intero diviso per 3 dà come resto o 0, o 1, o 2. Per questo motivo ogni numero intero potrà essere scritto in modo unico nella forma $3n$ o $3n + 1$ o $3n + 2$ per un opportuno intero n. Anche i numeri primi potranno essere scritti in una di tali forme e corrispondentemente suddivisi in tre sottoinsiemi. Chiaramente esiste un solo numero primo della forma $3n$, vale a dire 3. Tutti gli altri numeri primi saranno dunque o del tipo $3n + 1$ o del tipo $3n + 2$. Un'indagine empirica mostra che i numeri primi si suddividono in modo abbastanza uniforme nelle due famiglie. A titolo illustrativo, nella seguente tabella sono elencate le cardinalità degli insiemi di numeri primi di ciascuno dei due tipi, minori di 10^k per $k = 1, \ldots, 6$.

	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$3n+1$	1	11	80	611	4784	39231
$3n+2$	2	13	87	617	4807	39266

È dunque naturale aspettarsi che entrambe queste famiglie contengano un'infinità di primi. Scopo di questa breve nota[1] è proprio quello di fornire una dimostrazione elementare di questo fatto almeno nel caso dei primi del tipo $3n + 2$. La dimostrazione che presenteremo sarà analoga a quella fornita da Euclide per dimostrare l'infinità dell'insieme di tutti i numeri primi.

Teorema. Esistono infiniti numeri primi del tipo $3n + 2$ ($n \in \mathbb{N}$).

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista soltanto un numero finito di numeri primi del tipo $3n + 2$. Se dunque $N > 0$ è il numero di tali primi, possiamo considerare il numero intero

$$M = (3n_1 + 2) \cdot (3n_2 + 2) \cdot \cdots \cdot (3n_N + 2)$$

[1]Relazione conclusiva scritta per il laboratorio “Ricerca Matematica Attiva”, attivato nell'anno scolastico 2009/2010 presso il Liceo Scientifico “E. Majorana” di Guidonia in collaborazione con l'Università di Roma “Tor Vergata”, nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche. Il lavoro è stato svolto con la supervisione del prof. F. Chiera.

dato dal prodotto di tutti i numeri primi del tipo $3n+2$.

Potendo assumere che $3n_1+2=2$, M è senz'altro un numero pari.

Consideriamo ora il numero $L=3M-1$. Visto che M è divisibile per 2 (e positivo), L è dispari e positivo. Inoltre L non è divisibile per 3.

Ci interessiamo adesso alla fattorizzazione in numeri primi di L. Se tutti i numeri primi che compaiono nella fattorizzazione di L fossero del tipo $3n+1$ allora anche L dovrebbe essere un numero dello stesso tipo. Infatti per ogni $a,b\in\mathbb{N}$, detto $c=3ab+a+b$, risulta

$$(3a+1)\cdot(3b+1)=9ab+3a+3b+1=3c+1.$$

Ora, l'eventualità che L sia del tipo $3n+1$ non si può però presentare perché per definizione $L=3M-1$, e non è possibile che esista un numero naturale K tale che

$$3M-1=3K+1\ .$$

La precedente identità equivale infatti a

$$3(M-K)=2$$

che implica che 2 sia divisibile per 3.

La precedente discussione ci consente allora di affermare che fra i numeri primi che dividono L ce ne sia almeno uno del tipo $3n+2$. Questo fatto ci conduce però ad un assurdo. Se infatti $3l+2$ è un primo che divide L, $3l+2$ compare necessariamente fra i divisori di M. Potremo dunque trovare dei numeri naturali A,B per i quali sussista la seguente catena di uguaglianze

$$L=(3l+2)\cdot A=3M-1=3\cdot(3l+2)\cdot B-1$$

che a sua volta implica che

$$1=(3l+2)\cdot(3B-A).$$

Ciò è evidentemente assurdo, dal momento che nessun numero primo divide 1. Si è dunque portati a concludere che necessariamente esiste un numero infinito di numeri primi del tipo $3n+2$.

Osservazione. Con una dimostrazione molto simile a quella appena vista si ottiene l'esistenza di infiniti numeri primi del tipo $4n+3$ e del tipo $6n+5$. Si procede sempre per assurdo e si considera il prodotto di tutti i primi del tipo considerato; detto M tale numero, nel primo caso occorre scegliere $L=4M-1$ e nel secondo $L=6M-1$, e si mostra che fra i divisori di L deve necessariamente comparire uno dei fattori primi di M.

Purtroppo non sembra possibile estendere questo tipo di argomentazione per dimostrare l'esistenza di infiniti numeri primi del tipo $3n + 1$: non si arriva infatti ad escludere la possibilità che $L = 3M + 1$ abbia solo divisori primi del tipo $3n + 2$.

È bene comunque ricordare che tutti questi risultati rappresentano dei casi particolari di un teorema molto più generale dimostrato nel 1837 dal matematico Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Tale teorema afferma che comunque presi due numeri naturali a e b coprimi fra loro, esistono infiniti numeri primi fra i termini della progressione aritmetica $an + b$ ($n \in \mathbb{N}$).