Progetto Lauree Scientifiche

# TECNICA DELLA DIMOSTRAZIONE

*MAURIZIO CASTELLAN*

# 1. INTRODUZIONE

## 1.1 AFFERMAZIONI MATEMATICHE

La Matematica è una grande raccolta di affermazioni (proposizioni, enunciati) aventi come oggetto nozioni astratte come i numeri, figure geometriche, o altre strutture simboliche.

Es 1:

- $2+2 = 4$
- ogni numero dispari è primo
- In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti
- Ogni numero pari maggiore di 2 si può scrivere come somma di due numeri primi.
- $3 < 2$
- Per ogni coppia di numeri naturali m e n si ha: $m \times n = n \times m$
- $(3 - 3) \times 4 = 0$
- ...........

Solo una alcune di queste sono ritenute "vere"; occorre però riflettere sul valore che diamo alla nozione di verità che si usa in Matematica: in che senso sono "vere"?.

## 1.2. LA VERITÀ IN UNA INTERPRETAZIONE.

Osserviamo intanto che le affermazioni matematiche si occupano di oggetti e di proprietà che vanno interpretati: dobbiamo cioè assegnare dei significati alle parole numero, ai simboli $<$ , $\times$, $=$ , ecc. Solo dopo possiamo chiederci se una certa affermazione sia vera; va inoltre ricordato che una stessa frase può avere più interpretazioni

Es 2

La proposizione: "esiste un numero x tale che $x+1= 0$" è vera se è interpretata nell'insieme dei numeri interi, è falsa se è interpretata nell'insieme dei numeri naturali.

## 1.3. COME SI FA A DICHIARARE UNA AFFERMAZIONE VERA

Stabilire se una proposizione sia vera in una fissata interpretazione in generale non è semplice perché potrebbe richiedere infinite verifiche, esempio: ogni numero pari maggiore di 2 è somma di due numeri primi; oppure un numero finito ma troppo grande di verifiche, esempio: c'è un numero primo maggiore di $10^{1000000000}$.
Esiste però una valida alternativa: individuare in quell'interpretazione altre proposizioni vere dalle quali "far derivare" la verità della prima, costruendo quella che in matematica si chiama una "dimostrazione".

Es 3.

fissata una interpretazione nella quale risultano vere le seguenti affermazioni :

- la somma di due numeri opposti vale zero
- il prodotto di un numero per zero vale zero

(sono vere ad esempio negli interi)

in quell'interpretazione deve essere vera anche l'affermazione: $( 3 - 3 ) \times 4 = 0$

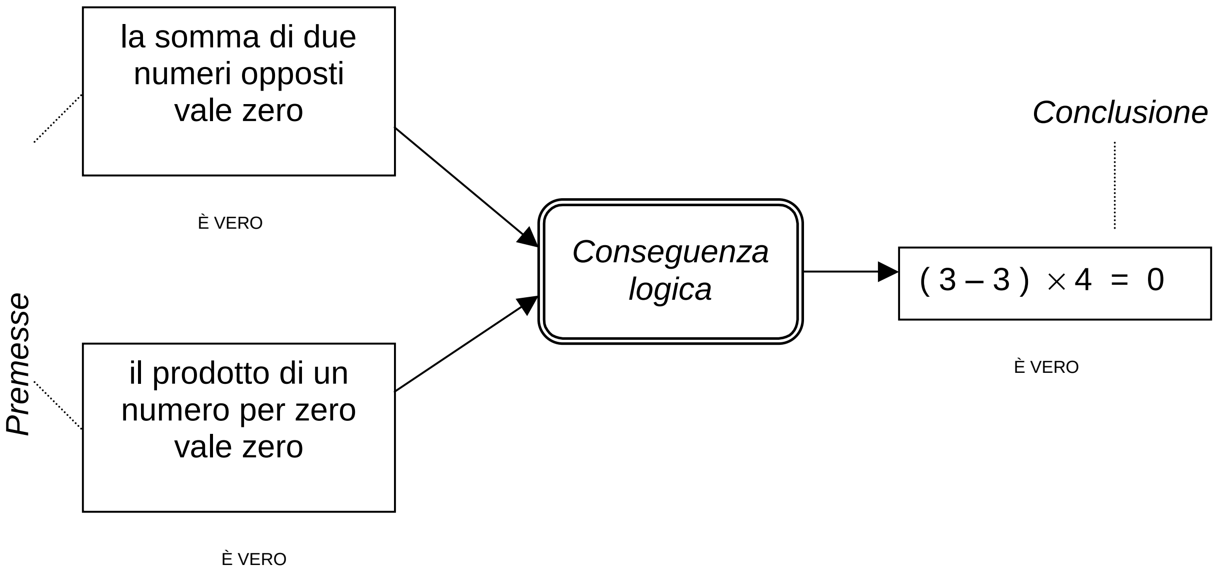
La questione della verità di una affermazione <u>può</u> essere rimandata quindi a quella della verità di altre affermazioni. Nel prossimo paragrafo vedremo come la logica sia lo strumento per realizzare questo legame tra affermazioni.

## 2. CONSEGUENZA LOGICA, ASSIOMI, DIMOSTRAZIONI, TEOREMI, CONGETTURE

### 2.1 CONSEGUENZA LOGICA.

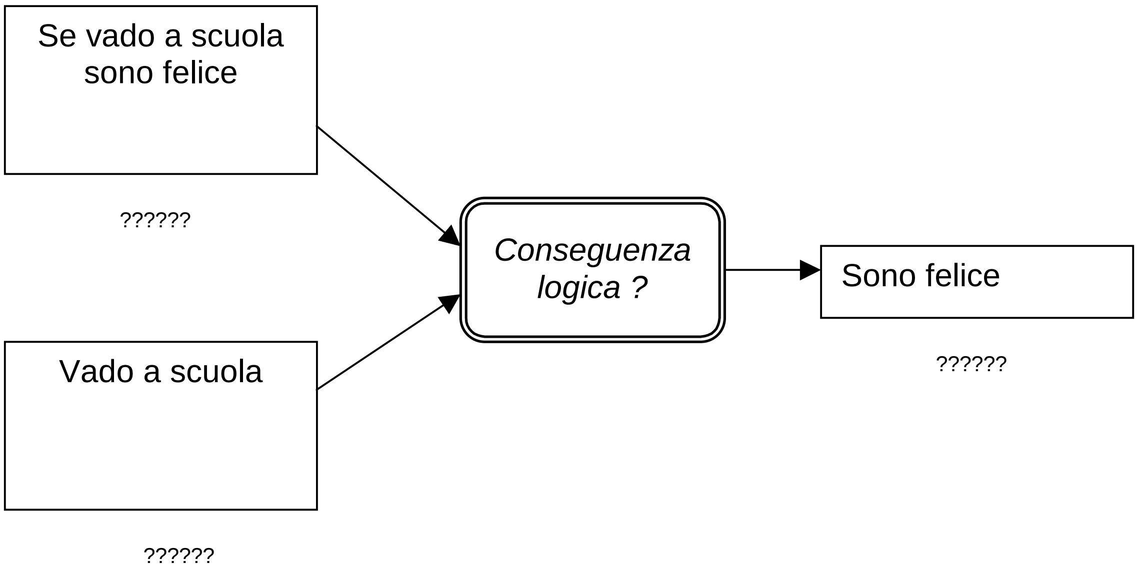
Se ogni interpretazione che rende vere alcune proposizioni dette "premesse", rende vera un'altra proposizione detta "conclusione"( cioè se non è mai possibile trovare un'interpretazione nella quale le premesse siano tutte vere e la conclusione sia falsa), si dice che quest'ultima è "conseguenza logica" delle prime.

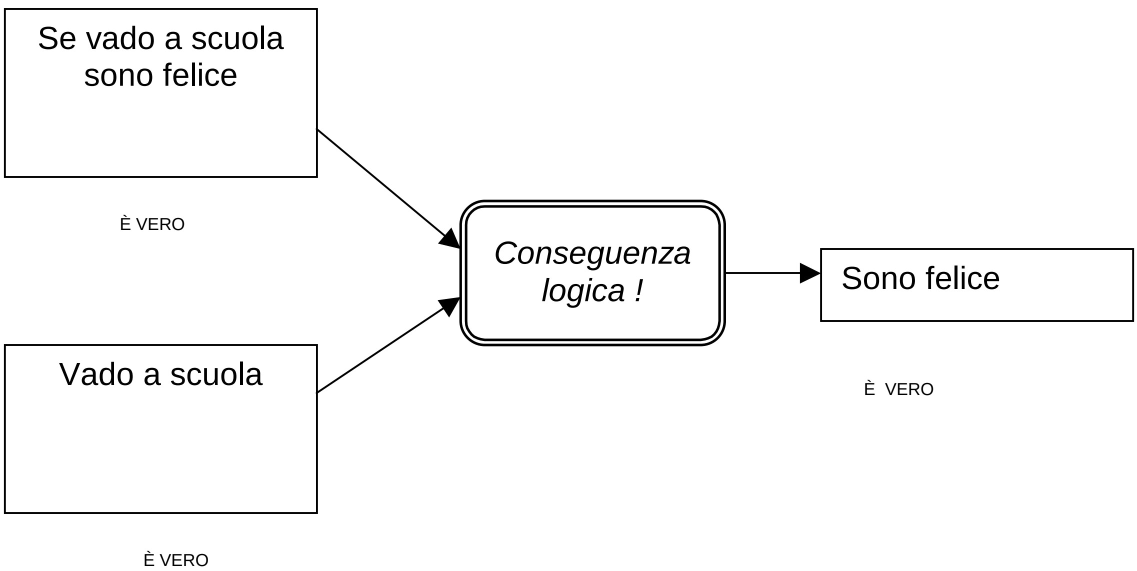
Es 4:




Per stabilire se siamo in presenza di una conseguenza logica occorre verificare cosa accade alla <u>conclusione</u> nelle interpretazioni nelle quali le <u>premesse sono vere (!)</u>:

Es 5:

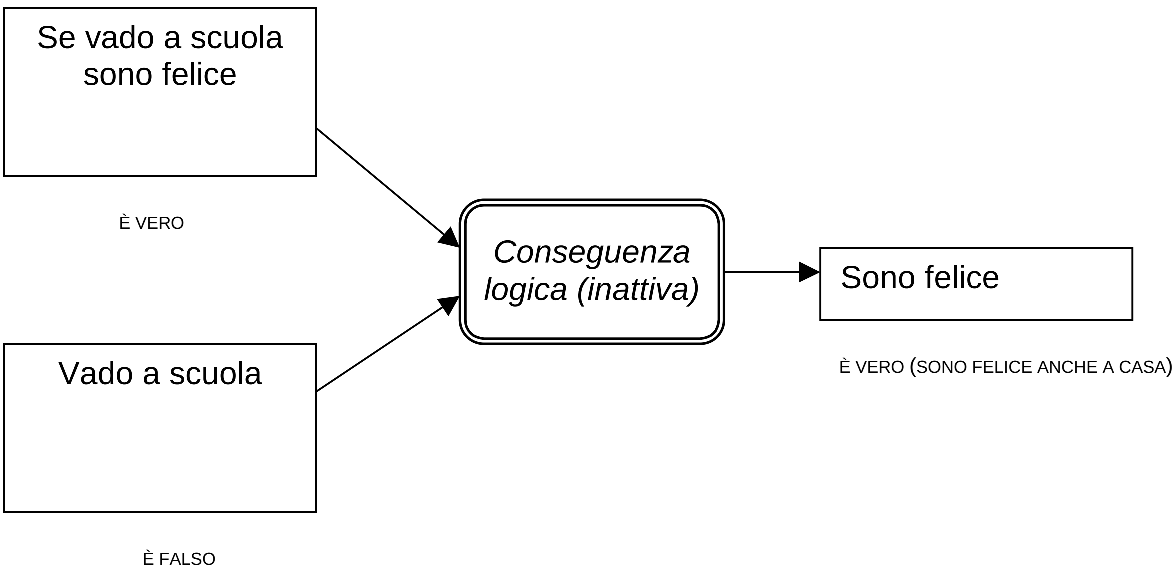


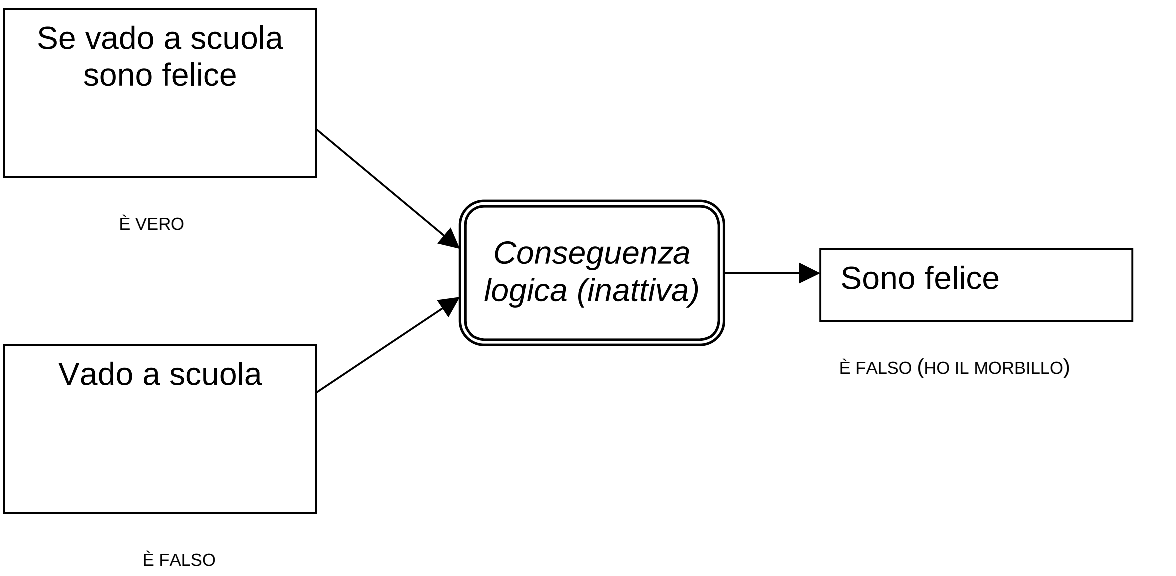




Possiamo quindi concludere che “sono felice” è una conseguenza logica di “se vado a scuola sono felice” e di “vado a scuola”: nelle interpretazioni nelle quali si ha la verità delle premesse si ha sempre la verità della conclusione.

Osserviamo che nelle interpretazioni nelle quali non <u>tutte</u> le premesse sono vere, la verità della conclusione non è più “garantita”, in pratica la relazione di conseguenza logica si “attiva” solo in quelle interpretazioni nelle quali tutte le premesse sono vere:

Es 6:



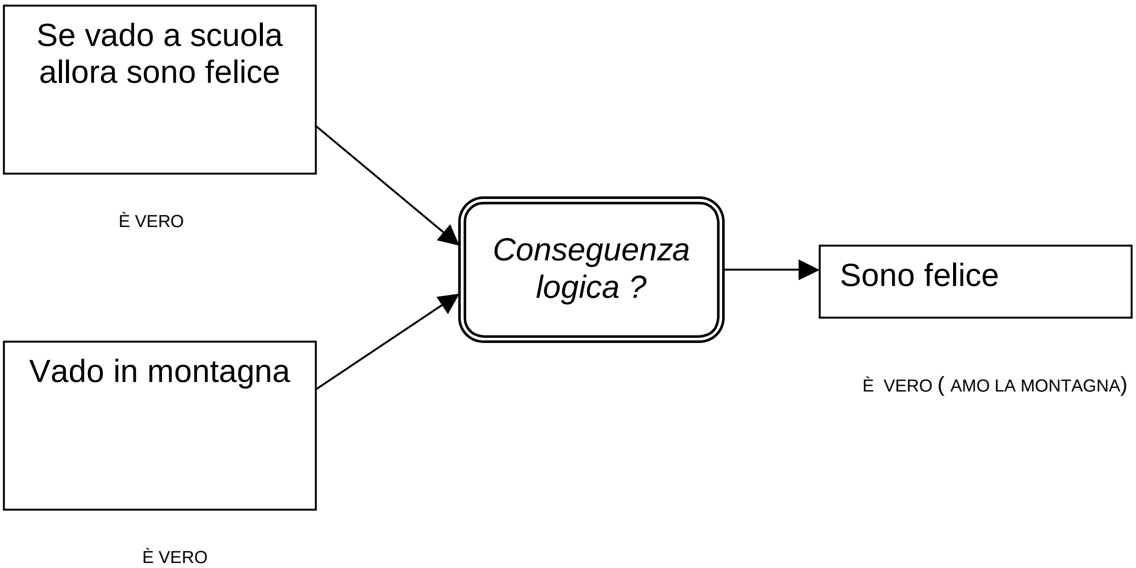




ESERCIZIO 1: Cosa accade nelle interpretazioni nelle quali entrambe le premesse sono false? Giustificate la vostra risposta con degli esempi.

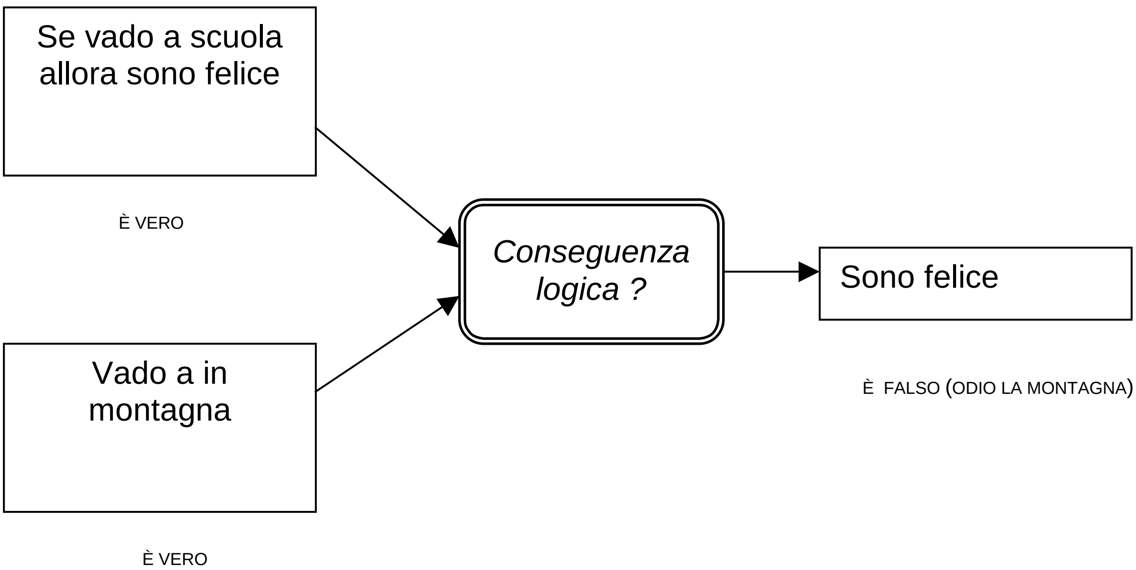
Valutiamo ora se nello schema seguente la conclusione sia o no una conseguenza logica delle premesse.

Es. 7:

1^  interpretazione




2^ interpretazione




Abbiamo quindi trovato una interpretazione (la 2^) nella quale , pur essendo le premesse vere, la conclusione “sono felice” non è vera:
“sono felice” non è quindi conseguenza logica delle premesse.

ESERCIZIO 2: Stabilire se la proposizione “ho un nome italiano” sia una conseguenza logica della proposizione “se sono italiano non ho un nome italiano” e della proposizione “sono italiano”

ESERCIZIO 3: Stabilire se la proposizione “ho un nome francese” sia una conseguenza logica della proposizione “se sono italiano non ho un nome francese” e della proposizione “non sono italiano”

ESERCIZIO 4: Stabilire se la proposizione “mi chiamo Ugo” sia una conseguenza logica della proposizione “sono italiano” e della proposizione “non sono italiano” (suggerimento: vedi definizione all’inizio del paragrafo)

## 2.2 GLI ASSIOMI

Per affermare la verità di una proposizione in una data interpretazione è sufficiente dunque riconoscere che si tratti di una conseguenza logica di premesse vere, ma questo modo non può essere applicato a tutte le proposizioni, altrimenti dovremmo provare la verità delle premesse mostrando che anch’esse sono a loro volta conseguenze logiche di altre premesse vere, e così via in un processo “a ritroso” senza fine.

Si esce da questa situazione scegliendo alcune proposizioni vere nell’interpretazione chiamati “assiomi” o“postulati”, e cercando di collegare in un rapporto di conseguenza logica questi con la proposizione della quale si vuole provare la verità.

Si dice in questo caso che abbiamo costruito un “sistema assiomatico” (“teoria”, “sistema formale”, “sistema ipotetico-deduttivo”) (es: la teoria degli insiemi, la teoria dei grafi, la teoria dei numeri,...). Ogni interpretazione che rende veri gli assiomi di una teoria si dice modello della teoria.

Es 8. la geometria (Euclide)

- Dati due punti, esiste una ed una sola retta che li contiene.
- Ogni segmento può essere prolungato indefinitamente lungo una retta.
- É sempre possibile tracciare un cerchio avente raggio e centro assegnati.
- Tutti gli Angoli Retti sono congruenti.
- Data una retta ed un punto fuori di essa, per questo punto passa una ed una sola parallela alla retta data.

Es 9: l’aritmetica (Peano)

- Esiste un numero naturale, 0
- Ogni numero naturale ha un numero naturale successore
- Numeri diversi hanno successori diversi
- 0 non è il successore di alcun numero naturale
- Ogni insieme di numeri naturali che contenga lo zero e il successore di ogni proprio elemento coincide con l'intero insieme dei numeri naturali (assioma dell'induzione)

La scelta degli assiomi è arbitraria (l’unico imprendiscibile criterio è la coerenza); teorie differenti possono contenere assiomi tra di loro in contraddizione (Es: le geometrie non euclidee), la stessa teoria può avere sistemi di assiomi diversi (Es: gli assiomi di Peano e gli assiomi di Hilbert per l'aritmetica)

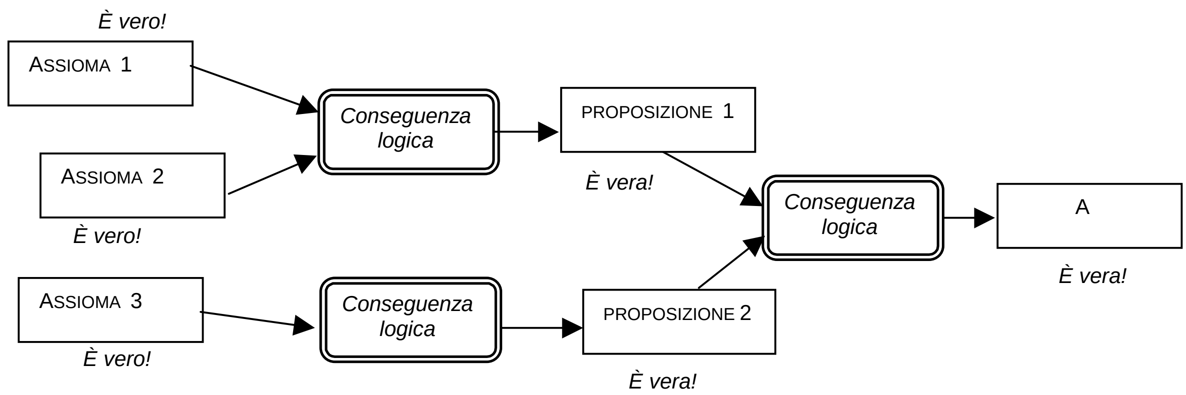
### 2.3 LE DIMOSTRAZIONI

Per provare che una proposizione A è vera in una interpretazione, scelto un sistemi di assiomi veri nell'interpretazione, è sufficiente collegare in maniera "ordinata" un certo numero di proposizioni in maniera tale che:

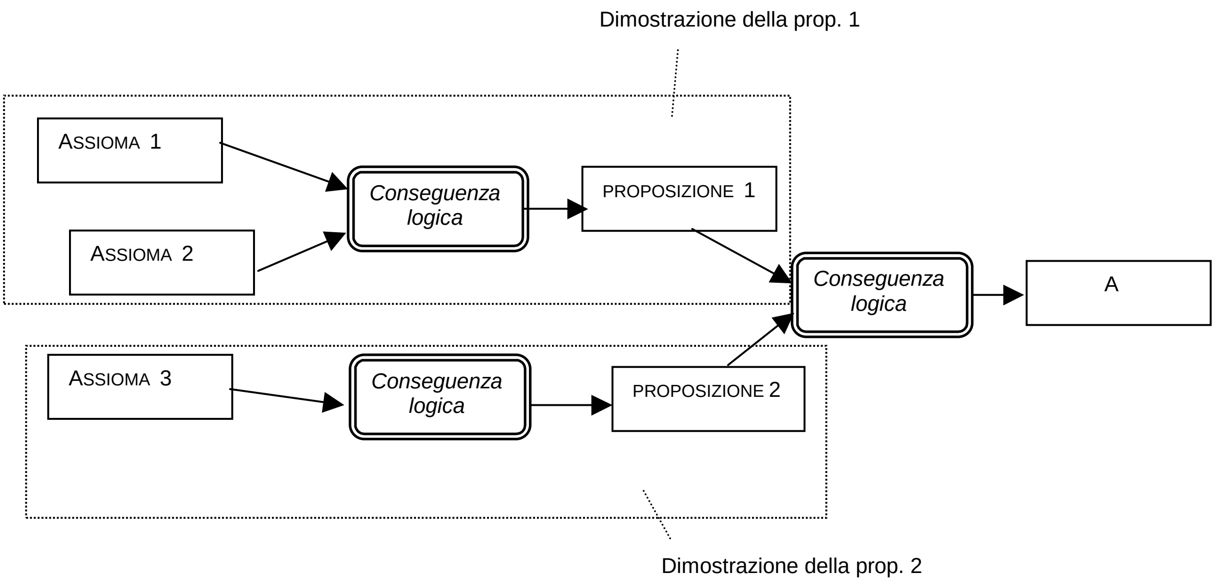
- ogni proposizione sia la conseguenza logica di proposizioni che la precedono;
- le prime proposizioni siano assiomi;
- l'ultima proposizione sia A

ottenendo così quella che si chiama una "dimostrazione" di A. Ora in ogni interpretazione nella quale gli assiomi sono veri ("modelli della teoria") la verità degli assiomi comporta, grazie alle conseguenze logiche, la verità di tutte le altre proposizioni presenti nella dimostrazione, certificando quindi la verità della proposizione finale A.

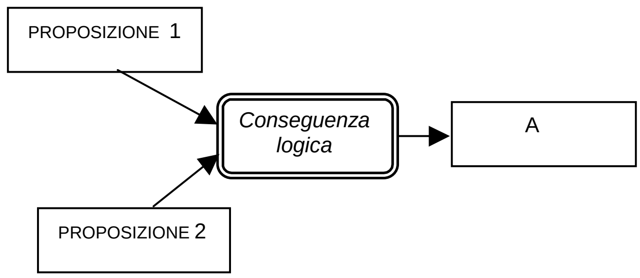
Es 10.




Notiamo che la dimostrazione dell'esempio contiene al suo interno le dimostrazioni della proposizione 1 e della proposizioni 2.



Se queste due dimostrazioni sono già note, la dimostrazione di A si semplifica nel seguente modo:



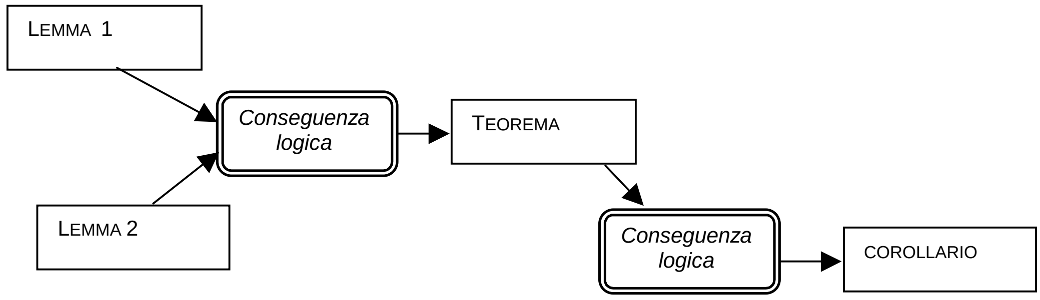

evitando così di partire dagli assiomi.

Abbiamo visto che le dimostrazioni permettono di provare la verità delle affermazioni matematiche, ma il loro compito non si esaurisci qui; va ricordato, infatti, che esse, spesso, diventano un potente strumento di indagine sulla struttura matematica che si sta analizzando, mettendo in luce i rapporti tra gli oggetti, svelando la natura delle relazioni che li legano, permettendo di approfondirne ed ampliarne lo studio.

## 2.4 TEOREMI.

- Si dice "teorema" ogni proposizione per la quale esiste una dimostrazione.
- Si dice "lemma" un teorema già dimostrato che si usa nella dimostrazione di un teorema da dimostrare.
- Si dice "corollario" una immediata conseguenza logica di un teorema già dimostrato.

Es 11:



### 2.5 CONGETTURE.

Si dice “congettura” una proposizione che si presume vera in una certa interpretazione ma per la quale non si è ancora trovata una dimostrazione.

Es 12: la congettura di Goldbach:

è uno dei più vecchi problemi irrisolti nella teoria dei numeri. Essa afferma che ogni numero pari maggiore di 2 può essere scritto come somma di due numeri primi (lo stesso numero primo può essere usato due volte).
Per esempio,

4 = 2 + 2
6 = 3 + 3
8 = 3 + 5
10 = 3 + 7 = 5 + 5
12 = 5 + 7
14 = 3 + 11 = 7 + 7
etc.

## 3. LE REGOLE DEDUTTIVE

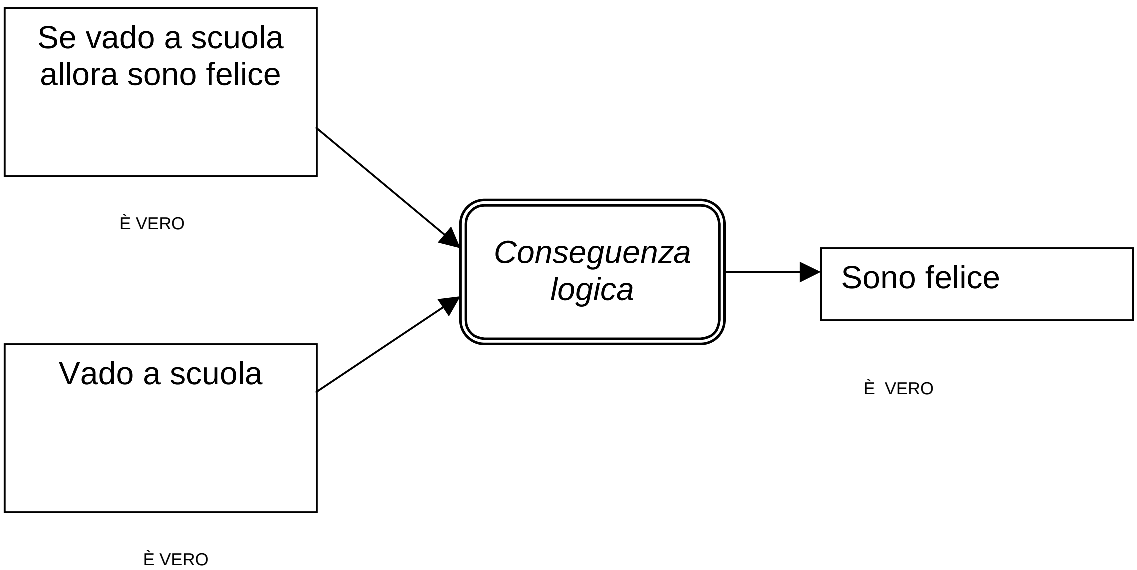
### 3.1 COME SI RICONOSCE LA RELAZIONE DI CONSEGUENZA LOGICA.

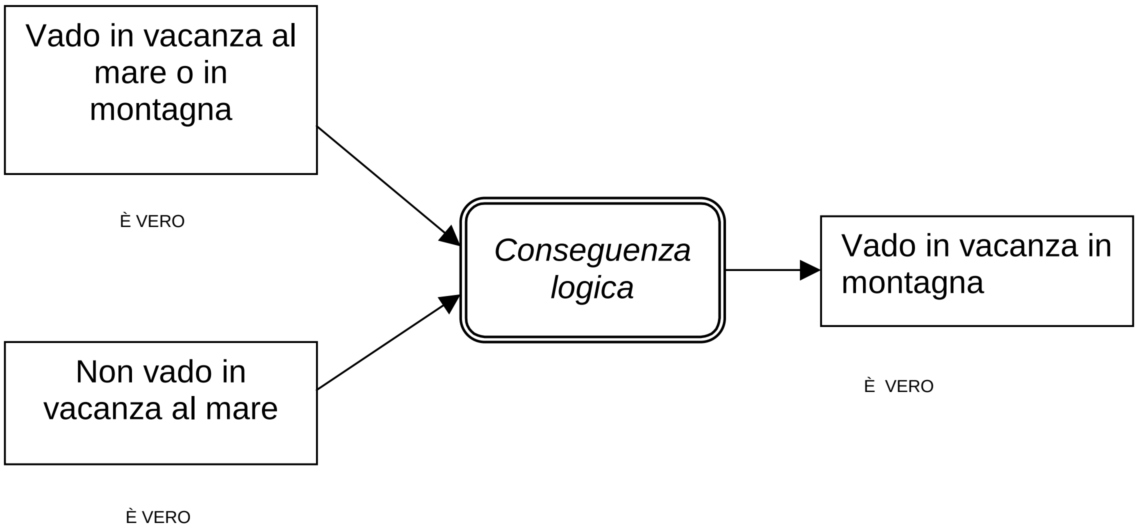
Abbiamo visto che le dimostrazioni sono costruite sulla nozione di conseguenza logica, ora elencheremo vari di combinare proposizioni in modo tale che tra esse ci sia una relazione di conseguenza logica. Gli schemi che illustreremo si dicono “regole deduttive”. Il loro uso è alla base di quello che chiamiamo usualmente “argomentare”.

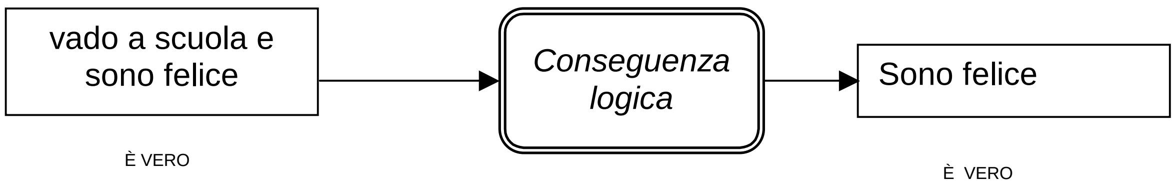
### 3.1 LE REGOLE DEDUTTIVE PROPOSIZIONALI

Per capire di cosa si tratta partiamo da alcuni esempi di conseguenze logiche

Es 13






Queste conseguenze logiche dipendono sostanzialmente dal modo in cui sono scritte le proposizioni e al significato dei cosiddetti “connettivi logici”: “non” (negazione, $\neg$), “e” (congiunzione, $\wedge$), “o” (disgiunzione, $\vee$), “se .. allora...” (implicazione, $\rightarrow$). Attraverso di essi si possono combinare proposizioni per ottenerne altre più complesse. La verità o la falsità di una proposizione complessa sono determinate dalla verità o dalla falsità delle frasi che le compongono in base alle “tavole di verità” nelle quali P e Q rappresentano generiche proposizioni.

| P | $\neg$ P |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

| P | Q | P $\wedge$ Q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

| P | Q | P $\vee$ Q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

| P | Q | P $\rightarrow$ Q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

Si chiamano regole deduttive proposizionali le regole che forniscono esempi “schematici” di relazioni di conseguenza logica basate sui connettivi logici.

Illustriamo le più importanti schematizzandole nel seguente modo:

$$\frac{P_1, P_2, \ldots, P_n}{Q}$$

dove $P_1$, $P_2$, ...., $P_n$ rappresentano le premesse e Q la conclusione.

1) Modus ponens

$$\frac{P \rightarrow Q, \quad P}{Q} \qquad \frac{\text{se piove allora resto a casa,} \quad \text{piove}}{\text{resto a casa}} \qquad \frac{\textit{Vera}, \textit{Vera}}{\textit{Vera}}$$

GIUSTIFICAZIONE TRAMITE LE TAVOLE DI VERITÀ: dobbiamo studiare la tavola di verità che illustra il comportamento di “P”, “Q” e di “se P $\rightarrow$ Q”

| P | Q | P $\rightarrow$ Q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

e vedere qual è il valore di verità di “Q” , nelle interpretazioni nelle quali “P”, e “P $\rightarrow$ Q” sono vere. Ciò accade solo nella prima riga, ma in questa riga “Q” risulta essere vera.

2) Modus tollens

$$\frac{P \rightarrow Q, \quad \neg Q}{\neg P} \qquad \frac{\text{se ho fame allora mangio,} \quad \text{non mangio}}{\text{non ho fame}} \qquad \frac{\textit{Vera}, \textit{Vera}}{\textit{Vera}}$$

3) Eliminazione della congiunzione

$$\frac{P \wedge Q}{P} \qquad \frac{\text{mangio e bevo}}{\text{mangio}} \qquad \frac{\textit{Vera}, \textit{Vera}}{\textit{Vera}}$$

4) Introduzione della disgiunzione

$$\frac{P}{P \vee Q} \qquad \frac{\text{2 è maggiore di 0}}{\text{2 è maggiore o uguale a zero}} \qquad \frac{\textit{Vera}}{\textit{Vera}}$$

5) Sillogismo disgiuntivo

$$\frac{P \vee Q, \quad \neg Q}{P}$$

$$\frac{\text{il quadro è bianco o nero , il quadro non è bianco}}{\text{il quadro è nero}} \qquad \begin{matrix} \textit{Vera, Vera} \\ \textit{Vera} \end{matrix}$$

6) Sillogismo ipotetico (catena di implicazioni)

$$\frac{P \rightarrow R, \quad R \rightarrow Q}{P \rightarrow Q}$$

$$\frac{\text{se piove allora resto a casa, se resto a casa allora guardo la tv}}{\text{se piove allora allora guardo la tv}} \qquad \begin{matrix} \textit{Vera, Vera} \\ \textit{Vera} \end{matrix}$$

7) Terminiamo mostrando una regola “errata”

$$\frac{P \rightarrow Q, \quad \neg P}{\neg Q}$$

$$\frac{\text{se vado al mare allora sono felice, non vado al mare}}{\text{non sono felice}} \qquad \begin{matrix} \textit{Vera, Vera} \\ \textit{Falsa} \end{matrix}$$

sono felice perché mi trovo in montagna e mi piace molto.

GIUSTIFICAZIONE TRAMITE LE TAVOLE DI VERITÀ : dobbiamo studiare la tavola di verità che illustra il comportamento di P, Q , $\neg$ P, $\neg$ Q, P $\rightarrow$ Q

| P | Q | $\neg$ P | $\neg$ Q | P $\rightarrow$ Q |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V |
| V | F | F | V | F |
| F | V | V | F | V |
| F | F | V | V | V |

e vedere qual è il valore di verità di $\neg$ Q , nelle interpretazioni nelle quali $\neg$ P, e P $\rightarrow$ Q sono <u>contemporaneamente vere</u>. Ciò accade solo nella terza e quarta riga, ma in queste righe $\neg$Q risulta essere una volta vera e una volta falsa: possono esistere interpetazioni nelle quali $\neg$ P, e P $\rightarrow$ Q sono <u>contemporaneamente vere</u> e $\neg$Q è falsa.

ESERCIZI

1. Sapendo che Giorgio è francese, Giovanni è italiano e Maria è argentina stabilite, con l'aiuto delle tavole di verità, la verità o falsità delle seguenti proposizioni dopo averle riscritte per esteso (P, Q e R indicano le tre proposizioni di partenza):

$P \to \neg Q$

$(P \wedge \neg Q) \vee R$

$(P \wedge \neg Q) \to \neg R$

2. Giustificare, utilizzando le tavole di verità, le regole 2-3-4-5.

3. Studiare la correttezza delle seguenti regole:

(i) $\dfrac{P}{P \wedge Q}$

(ii) $\dfrac{P \vee Q}{P}$

(iii) $\dfrac{P}{\neg\neg P}$

(iv) $\dfrac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \vee \neg Q}$

(v) $\dfrac{\neg P, P \vee Q}{Q}$

(vi) $\dfrac{P \to Q}{\neg P \to \neg Q}$

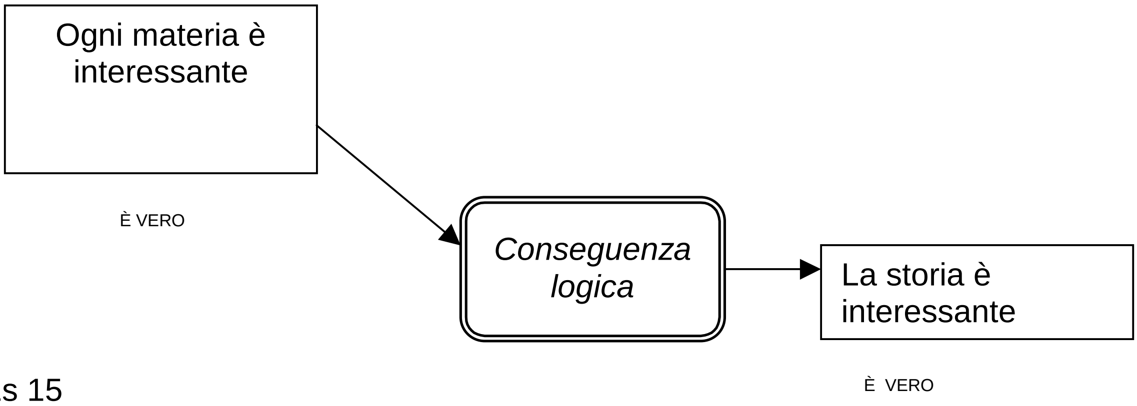
(vii) $\dfrac{P \to Q}{\neg Q \to \neg P}$

(viii) $\dfrac{P \to R, Q \to R}{(P \vee Q) \to R}$

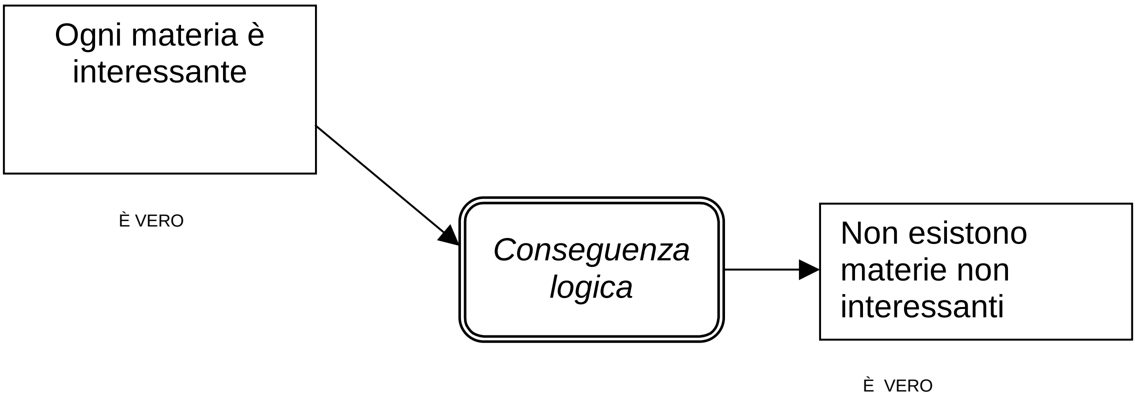
### 3.3. LE REGOLE DEDUTTIVE PREDICATIVE

Per capire di cosa si tratta partiamo anche qui da alcuni esempi.

Es 14




Es 15




Nei due esempi il rapporto di conseguenza logica non dipende <u>esclusivamente</u> dai connettivi logici: e, o, non, implica. Si usa qui in maniera sostanziale la forma avverbiale “per ogni” ed il verbo“esiste”, che ci permettono di arricchire il nostro linguaggio con l’introduzione di nuove proposizioni nel modo che segue.

I) Si introduce un universo del discorso che si dice “dominio” (negli esempi 13 e 14 è l’insieme delle materie);

II) Si introducono delle variabili: x, y, z, .... e costanti, che rappresentano generici o particolari elementi del dominio (negli esempi 13 e 14 la nostra variabile è “materia”, la storia è una costante)

III) Si costruiscono delle espressioni (“proposizioni aperte”) che contengono delle variabili (es: “la materia è interessante”,”x è non è un numero pari”,”y è maggiore o uguale ai z”,....) e che diventano proposizioni se si sostituiscono le variabili con costanti (es: “la geografia è interessante”,”4 non è un numero pari”,”5 è maggiore o uguale a 2”,....) (notate che abbiamo usato anche i connettivi logici “o” e “non”)

IV) Si costruiscono delle nuove proposizioni applicando le espressioni "per ogni" ("quantificatore universale") e "esiste" ("quantificatore esistenziale") a proposizioni aperte (Es: "Ogni materia è noiosa", "esiste un numero x che non è pari", "Per ogni numero y e per ogni numero z si ha che y è maggiore o uguale a z")

V) Si possono combinare le proposizioni ottenute con i connettivi logici (Es: Ogni numero naturale x è maggiore o uguale a zero e Parigi è la capitale delle Francia)

NOTAZIONE: se con A(x) indichiamo una proposizione aperta che contiene la variabile x nel dominio D, indichiamo con:

$\forall x \in U$ , A(x) : la proposizione : "Per ogni x si ha A(x)"
$\exists x \in U$ , A(x) : la proposizione : "Esiste un x tale che A(x)"

Esempi:

- la proposizione "esiste un numero x che non è pari" si sintetizza:
- "$\exists x \in N$ che non è pari"
- la proposizione "per ogni numero y e per ogni numero z si ha che y è maggiore o uguale a z") si sintetizza:
- "$\forall y \in N$ , $\forall z \in N$ si ha $y \geq z$"

Vediamo ora come si fa a stabilire in una data interpretazione la verità e la falsità delle proposizioni della forma

$\forall x \in U$, A(x)
$\exists x \in U$, A(x)

Si interpreta la proposizione aperta A(x) e le costanti, e si applica la tabella

Tabella 1

| | VERA | FALSA |
|---|---|---|
| $\forall x \in U$ , A(x) | Ogni interpretazione di x rende vera la proposizione aperta A(x) | C'è almeno un'interpretazione di x che rende falsa la proposizione aperta A(x) |
| $\exists x \in U$ , A(x) | C'è almeno un'interpretazione di x che rende vera la proposizione aperta A(x) | Ogni interpretazione di x rende falsa la proposizione aperta A(x) |

Es. 16

| | |
|---|---|
| $\forall x \in N$ , $x>3$ | É falsa, perché c'è almeno un numero naturale, il 2, tale che $2>3$ è falsa |
| $\exists x \in N$ , $x>3$ | É vera, perché c'è almeno un numero naturale, il 7, tale che $7>3$ è vera. |

Siamo ora in grado di studiare alcune regole che ci permettono di realizzare relazioni di conseguenza logica quando sono presenti i quantificatori (regole deduttive predicative).

1) Eliminazione del quantificatore universale (Particolarizzazione) (vedi es 13)

$$\frac{\forall x \in U, A(x)}{A(k)}$$

K È UNA COSTANTE E A(k) È LA PROPOSIZIONE CHE SI OTTIENE SOSTITUENDO k AD x NELLA PROPOSIZIONE A

$$\frac{\forall x \in N, x+0=x}{3+0=3} \qquad \begin{matrix} \textit{Vera} \\ \textit{Vera} \end{matrix}$$

GIUSTIFICAZIONE: Se $\forall x \in U, A(x)$ è vera allora (vedi tab 1) ogni elemento del dominio U rende vera la prop. A(x), in particolare ciò avviene per l'elemento k.

2) Introduzione del quantificatore esistenziale

$$\frac{A(k)}{\exists x \in U, A(x)}$$

K È UNA COSTANTE E A(k) È LA PROPOSIZIONE CHE SI OTTIENE SOSTITUENDO k AD x NELLA PROPOSIZIONE A

$$\frac{12 \text{ è un multiplo di } 3}{\exists x \in N, x \text{ è un multiplo di } 3} \qquad \begin{matrix} \textit{Vera} \\ \textit{Vera} \end{matrix}$$

GIUSTIFICAZIONE: Se A(k) è vera allora c'è un elemento k del dominio che la rende vera e quindi (vedi tab 1) è vera la prop. $\exists x \in U, A(x)$.

3) Negazione del quantificatore universale

$$\frac{\neg(\forall x \in U, A(x))}{\exists x \in U, \neg A(x)}$$

$$\frac{\text{non è vero che ogni numero primo è dispari}}{\text{esiste almeno un primo non dispari}} \qquad \begin{matrix} \textit{Vera} \\ \textit{Vera} \end{matrix}$$

4) Scambio dei quantificatori

$$\frac{\exists x \in U, (\forall y \in U, A(x,y))}{\forall y \in U, (\exists x \in U, A(x,y))}$$

$$\frac{\text{esiste un numero dispari che divide ogni numero (uno per tutti)}}{\text{ogni numero ha un numero dispari che lo divide (ad ognuno il suo)}} \qquad \begin{matrix} \textit{Vera} \\ \textit{Vera} \end{matrix}$$

5) Esistenziale di una congiunzione

$$\frac{\exists x \in U, (A(x) \wedge B(x))}{(\exists x \in U, A(x)) \wedge (\exists x \in U, B(x))}$$

$$\frac{\exists x \in N, ((x \text{ è divisore primo di } 6) \text{ e } (x \text{ è divisore primo di } 10))}{(\exists x \in N, x \text{ è divisore primo di } 6) \text{ e } (\exists x \in N, x \text{ è divisore primo di } 10)} \quad \begin{array}{l} \textit{Vera} \\ \textit{Vera} \end{array}$$

Presentiamo ora due esempi di regole “scorrette”

6) Scambio dei quantificatori (regola scorretta)

$$\frac{\forall y \in U, (\exists x \in U, A(x,y))}{\exists x \in U, (\forall y \in U, A(x,y))}$$

$$\frac{\forall x \in N, (\exists y \in N, x < y) \text{ (ad ognuno il suo)}}{\exists y \in N, (\forall x \in N, x < y) \text{ (uno per tutti)}} \quad \begin{array}{l} \textit{Vera} \\ \textit{Falsa} \end{array}$$

La seguente regola permette la sostituzione di due elementi una volta provato che si tratta dello stesso oggetto

7) Congiunzione di due esistenziali (regola scorretta)

$$\frac{(\exists x \in U, A(x)) \wedge (\exists x \in U, B(x))}{\exists x \in U, (A(x) \wedge B(x))}$$

$$\frac{(\exists x \in N, x \text{ è divisore primo di } 9) \text{ e } (\exists x \in N, x \text{ è divisore primo di } 10)}{\exists x \in N, ((x \text{ è divisore di } 9) \text{ e } (x \text{ è divisore di } 10))} \quad \begin{array}{l} \textit{Vera} \\ \textit{Falsa} \end{array}$$

Finiamo con due regole che descrivono due usuali procedimenti dimostrativi. Non sono propriamente regole deduttive perché la loro correttezza non dipende solo dalle premesse e dalle conclusioni, ma anche dalla parte di dimostrazione che precede la loro applicazione.

8) Introduzione del quantificatore universale (Generalizzazione)

$$\frac{A(x)}{\forall x \in U, A(x)} \qquad\qquad \frac{x+0=x}{\forall x \in N, x+0=x}$$

X È UNA VARIABILE DEL DOMINIO SUL QUALE NON È STATA FATTA PRECEDENTEMENTE NESSUNA IPOTESI ECCETTO LA VERITÀ DI $A(x)$ NELL'INTERPRETAZIONE

GIUSTIFICAZIONE: x rappresenta un solo elemento del dominio ma la sua generalità permette di provare la proprietà espressa dalla A(x) per tutti gli elementi del dominio.

9) Eliminazione del quantificatore esistenziale

$$\frac{\exists x \in U, A(x)}{A(k)} \qquad\qquad \frac{\exists x \in N, x \text{ è un multiplo di } 3}{k \text{ è un multiplo di } 3} \quad \begin{matrix} \textit{Vera} \\ \textit{Vera} \end{matrix}$$

K È UNA COSTANTE DEL DOMINIO SUL QUALE NON È STATA FATTA NESSUNA IPOTESI ECCETTO LA VERITÀ DI $A(k)$ NELL'INTERPRETAZIONE (ANCHE SE NON POSSIAMO DIRE CHI È K)

GIUSTIFICAZIONE: k rappresenta quel particolare elemento del dominio che rende vera $A(x)$ quando è vera la proposizione: $\exists x \in U, A(x)$.

ESERCIZI

1. Stabilite, utilizzando le tavole di verità e la tab 1, se le seguenti proposizioni sono vere o false (il dominio U è l'insieme dei numeri naturali minori di 6: U ={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6})

$\forall x \in U, (\exists y \in U, x < y)$

$(\exists x \in U, x < 4) \text{ e } (\exists x \in U, x > 5)$

$\exists x \in U, ((x < 4) \text{ e } (x > 5))$

$\forall x \in U, (\text{se } x \neq 6 \text{ allora } (\exists y \in U, x < y))$

2. Giustificare, utilizzando la tab 1 e le tavole di verità, la correttezza delle regole 3-4-5, e delle seguenti regole, e mostrate degli esempi di applicazione:

$$\frac{\neg(\exists x \in U, A(x))}{\forall x \in U, \neg A(x)}$$

$$\frac{\exists x \in U, (A(x) \vee B(x))}{(\exists x \in U, A(x)) \vee (\exists x \in U, B(x))}$$

$$\frac{(\exists x \in U, A(x)) \vee (\exists x \in U, B(x))}{\exists x \in U, (A(x) \vee B(x))}$$

$$\frac{\forall x \in U, (A(x) \vee B(x))}{(\forall x \in U, A(x)) \vee (\forall x \in U, B(x))}$$

$$\frac{(\forall x \in U, A(x)) \vee (\forall x \in U, B(x))}{\forall x \in U, (A(x) \vee B(x))}$$

$$\frac{\forall x \in U, (A(x) \wedge B(x))}{(\forall x \in U, A(x)) \wedge (\forall x \in U, B(x))}$$

$$\frac{(\forall x \in U, A(x)) \wedge (\forall x \in U, B(x))}{\forall x \in U, (A(x) \wedge B(x))}$$

$$\frac{\exists x \in U, (A(x) \vee B(x))}{(\exists x \in U, A(x)) \vee (\exists x \in U, B(x))}$$

$$\frac{\forall x \in U, (A(x) \rightarrow B(x))}{\forall x \in U, A(x) \rightarrow \forall x \in U, B(x)}$$

$$\frac{\forall x \in U, A(x) \rightarrow \forall x \in U, B(x)}{\forall x \in U, (A(x) \rightarrow B(x))}$$

### 3.4 Assiomi logici e assiomi dell'uguaglianza.

Alcune affermazioni, in virtù della loro struttura logica indicata dai connettivi logici e dai quantificatori in esse contenuti, risultano vere in ogni interpretazione, e prendono il nome di "tautologie". Ad esempio utilizzando le tavole di verità o la tabella 1 dei quantificatori si verifica subito che le due proposizioni:

$P \vee \neg P$

$\forall x \in U, A(x) \rightarrow \neg(\exists x \in U, \neg A(x))$

sono vere in ogni interpretazione.

Le tautologie possono quindi introdursi (come gli assiomi della teoria) in ogni punto di una dimostrazione senza alterare la catena logica; per questo motivi si dicono *assiomi logici*.

Infine, nelle teorie che utilizzano l'uguaglianza, si introducono i seguenti assiomi che ne descrivono il comportamento

<u>Assiomi dell'uguaglianza</u>:

$\forall x \in U, x = x$ *(proprietà riflessiva)*

$\forall x, y \in U, x = y \rightarrow x = y$ *(proprietà simmetrica)*

$\forall x, y, z \in U, x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$ *(proprietà transitiva)*

$\forall x, y \in U, x = y \rightarrow (P(x) \rightarrow P(y))$ *(proprietà di invarianza per sostituzione)*

L'ultimo assioma permette di sostituire in ogni proposizione un elemento x del dominio con un altro y se sappiamo che x=y.

Esempio:

se 12 = $3 \times 4$ allora, se 12 termina con 2 anche $3 \times 4$ termina con 2 .

ESERCIZI

1. Dimostra utilizzando le tavole di verità o la tabella 1 dei quantificatori che le seguenti proposizioni sono tautologie:

$\neg\neg P \rightarrow P$

$P \rightarrow P$

$(P \wedge \neg P) \rightarrow Q$

$A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$

$(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

$\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \wedge \neg Q)$

$(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$

$\forall x \in U, \neg A(x) \rightarrow \neg(\exists x \in U, A(x))$

$(\forall x \in U, A(x)) \wedge (\forall x \in U, B(x)) \rightarrow \forall x \in U, (A(x) \wedge B(x))$

$\exists x \in U, (A(x) \vee B(x)) \rightarrow (\exists x \in U, A(x)) \vee (\exists x \in U, B(x))$

2. Dimostra che la seguente proposizione: $P \wedge Q \rightarrow P$ ottenuta legando con l'implicazione la premessa e la conclusione della regola deduttiva $\dfrac{P \wedge Q}{P}$ è una tautologia.

3. Dimostra che la seguente proposizione $\exists x \in U, A(x) \rightarrow \neg(\forall x \in U, \neg A(x))$ è una tautologia e il seguente schema $\dfrac{\exists x \in U, A(x)}{\neg(\forall x \in U, \neg A(x))}$ una regola deduttiva

4. Dimostra che ogni tautologia della forma $A \rightarrow B$ determina una regola deduttiva della forma: $\dfrac{A}{B}$ e viceversa (generalizza gli esercizi 2 e 3)

5. (*ex falso quodlibet)* Applicando l'esercizio 4 alla tautologia $(P \wedge \neg P) \rightarrow Q$ quale regola deduttiva denominata si ottiene? Qual è il suo significato?

# 4. TECNICHE DIMOSTRATIVE

## 4.1 .COME SI FANNO LE DIMOSTRAZIONI.

Ora che conosciamo le principali regole di deduzione dobbiamo imparare ad utilizzarle nel modo più efficace nelle nostre dimostrazioni.
Anche se non esiste un metodo sistematico per associare ad ogni teorema una particolare dimostrazione, tuttavia sulla base della struttura logica del teorema alcuni metodi di dimostrazione risultano più efficaci.

Illustreremo ora le forme ricorrenti dei teoremi e i metodi dimostrativi più indicati

## 4.2. DIMOSTRAZIONE DIRETTA

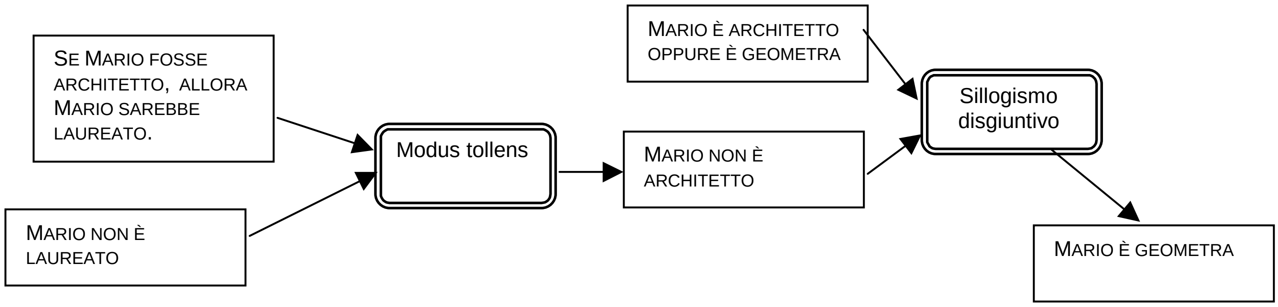
Una dimostrazione si dice diretta quando inizia con gli assiomi o con teoremi già dimostrati e termina con la proposizione da dimostrare (vedi schema 7). La struttura ramificata della dimostrazione si può sostituire con una di tipo sequenziale come illustrato di seguito. Al termine della dimostrazione di solito si scrive Q.E.D. (quod erat demonstrandum), C.D.D (come dovevasi dimostrare), C.V.D (come volevevasi dimostrare), o simboli come ■ oppure □.

Es 17:

**Assiomi:**
- *Mario è architetto oppure è geometra.*
- *Se Mario fosse architetto, allora Mario sarebbe laureato.*
- *Mario non è laureato.*

**Teorema:**
*Mario è geometra*.

1^ Dimostrazione: struttura ramificata (ad albero)



<u>2^ Dimostrazione: struttura sequenziale in colonna</u> (indicando i vari passi e le loro giustificazioni)

(1) *Se Mario fosse architetto, allora Mario sarebbe laureato* (Assioma)
(2) *Mario non è laureato* (Assioma)
(3) *Mario non è architetto* (Modus tollens da (1) e (2))
(4) *Mario è architetto oppure è geometra* (Assioma)
(5) *Mario è geometra* (Sillogismo disgiuntivo da (3) e (4))

Q.e.d.

Si può inoltre scegliere di "dosare" il formalismo semplificando alcuni passaggi e lasciandone altri sottointesi, usando in maniera "più o meno spinta" il simbolismo.

<u>3^ Dimostrazione: struttura sequenziale in riga</u> (i vari passi vengono separati da una freccia, da non confondere con il simbolo di implicazione, si possono usare abbreviazioni, Ax per assioma, M.T. per modus tollens, ecc)

*Se Mario fosse architetto, allora Mario sarebbe laureato (Ax)* $\Rightarrow$ *Mario non è laureato (Ax)*
$\Rightarrow$ *Mario non è architetto* (M. T.) $\Rightarrow$ *Mario è architetto oppure è geometra* (Ax) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ *Mario è geometra* (S. D.)

Q.e.d.

<u>4^ Dimostrazione: informale</u> (si usa uno stile discorsivo)

*Se Mario fosse un architetto, allora Mario sarebbe laureato, ma Mario non è laureato quindi Mario non può essere un architetto; ma sappiamo anche che Mario poteva essere o un architetto o un geometra, e siccome non è un architetto può essere solamente un geometra.*

## <u>4.3. Dimostrazioni indirette</u>

Vedremo ora che esistono strategie alternative alle dimostrazioni dirette per provare che una proposizione A è vera in una interpretazione. Le diverse tecniche che illustreremo garantiscono ogni volta che le interpretazioni che rendono veri gli assiomi, rendono vera anche la proposizione A. Tuttavia è importante ricordare che c'è sempre un metodo effettivo per ricavare da tali tecniche <u>anche</u> una dimostrazione diretta di A.

### 4.3.1 Dimostrazione di una implicazione $A \rightarrow B$

#### <u>4.3.1.1 Premessa</u>

Molti teoremi sono delle implicazione: hanno cioè la forma se A allora B.

Es 18:

**se** il triangolo ABC ha due angoli congruenti **allora** il triangolo ABC è isoscele

La proposizione dopo il “se” si dice “ipotesi” (Hp), quella dopo l'”allora” si dice “tesi” (Th).
(Nel caso in cui ci siano più ipotesi $A_1,A_2,...A_n$ la struttura logica del teorema è quella di una implicazione della forma $(A_1 \wedge A_2,... \wedge A_n) \rightarrow B$ )

Es 19:

**se** il quadrilatero ABCD ha i lati opposti paralleli **e** i lati congruenti **allora** il quadrilatero ABCD è un rombo.

Condizioni necessarie e condizioni sufficienti.

Quando si ha un teorema della forma $A \rightarrow B$ , si dice anche che A è “condizione sufficiente” affinché si verifichi B (CS) (B se A), e che B è “condizione necessaria al verificarsi di A (CN) (A soltanto se B).

Esempi 20:

**se** Mario è nato a Roma **allora** Mario è italiano (vero)

Nascere a Roma è una condizione sufficiente per essere italiano.

Essere italiano è una condizione necessaria per essere nato a Roma

Alcune condizioni sono sufficienti ma non necessarie: nascere a Roma non è una condizione necessaria per essere italiano, infatti

**se** Luigi è italiano **allora** Luigi è nato a Roma (falso, Luigi è nato a Milano )

altre sono necessarie ma non sufficienti: avere i lati opposti paralleli è una condizione necessaria per essere rombo ma non sufficiente, infatti:

**se** il poligono ABCD è un rombo **allora** il poligono ABCD ha i lati opposti paralleli (vero)

**se** il poligono EFGH ha i lati opposti paralleli **allora** il poligono EFGH è un rombo (falso, il poligono EFGH è parallelogramma ma non un rombo)

In alcuni casi una condizione A può essere necessaria e sufficiente per B (CNES) (B sse A), cioè sia $A \rightarrow B$ che $B \rightarrow A$ sono vere: per un triangolo avere due angoli congruenti è una condizione necessaria e sufficiente per essere isoscele, infatti:

**se** il triangolo ABC ha due angoli congruenti **allora** il triangolo ABC è isoscele (vero)

**se** il triangolo ABC è isoscele **allora** ha due angoli congruenti (vero)

(Osserviamo che se A è CNES per B, allora B è CNES per A)

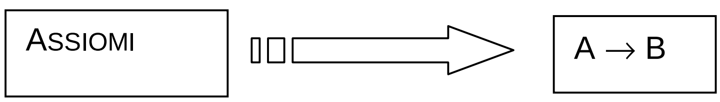
<u>Inverse, contronominali,contrarie .</u>

Ogni proposizione  $A \rightarrow B$  è associata ad altre tre implicazioni:
$B \rightarrow A$    (“inversa”)
$\neg A \rightarrow \neg B$   (“contraria”)
$\neg B \rightarrow \neg A$    (“contronominale”)
Si dimostra facilmente che la proposizione di partenza è un teorema se e soltanto se lo è la contronominale, e che l’inversa è un teorema se e soltanto se lo è la contraria.

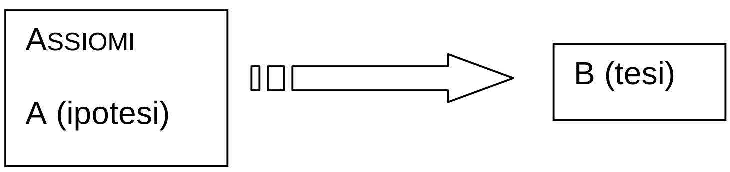
<u>4.3.1.2 Metodo dimostrativo</u>

Per dimostrare $A \rightarrow B$  si può costruire una dimostrazione che parte dagli assiomi, da teoremi già dimostrati e dalla proposizione A (ipotesi) (l’ipotesi A viene trattata come un ulteriore assioma), e che finisce con la proposizione B (tesi). Infatti in questo modo avremo fatto vedere che le interpretazioni che rendono veri gli assiomi e l’ipotesi A,  rendono vera (grazie alla conseguenza logica) anche la tesi B; ne segue che in quelle interpretazioni l’implicazione $A \rightarrow B$  è vera, perché l’unico caso in cui è falsa si ha quando A è vera e B è falsa, ma questo per quanto visto non può accadere.

In sintesi invece di costruire una dimostrazione del tipo:




si esegue una dimostrazione del tipo:



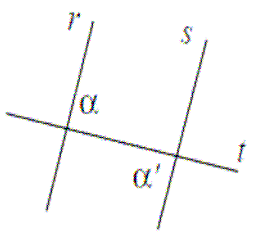

Es. 21:

**Assiomi e teoremi noti:**

- *Se gli angoli $\alpha$ e $\alpha'$ (alterni interni) formati dalle rette r e s tagliate dalla trasversale t sono congruenti allora r e s sono parallele (teorema delle parallele)*
- *se gli angoli $\alpha$ e $\alpha'$ sono retti allora sono congruenti (teorema ottenuto per particolarizzazione dell’assioma: tutti gli angoli retti sono congruenti)*

**Teorema:**
*se le rette r e s sono perpendicolari alla retta t allora sono parallele*

Quindi il teorema è della forma A $\rightarrow$ B dove:
A: *le rette r e s sono perpendicolari alla retta t* è l'ipotesi;
B: *le rette r e s sono parallele* è la tesi;




Dimostrazione 1

(1) *le rette r e s sono perpendicolari alla retta t* ($\alpha$ e $\alpha'$ sono retti) (Ipotesi A)
(2) *se gli angoli $\alpha$ e $\alpha'$ sono retti allora sono congruenti* (Teorema)
(3) *$\alpha$ e $\alpha'$ sono congruenti* (Modus ponens da (1) e (2))
(4) *se gli angoli $\alpha$ e $\alpha'$ sono congruenti allora r e s sono parallele* (Teorema)
(5) *r e s sono parallele* (Modus ponens da (3) e (4)) (Tesi B)

si poteva procedere anche così:

Dimostrazione 2

(1) *le rette r e s sono perpendicolari alla retta t* ($\alpha$ e $\alpha'$ sono retti) (Ipotesi A)
(2) *se gli angoli $\alpha$ e $\alpha'$ sono retti allora sono congruenti* (Teorema)
(3) *se gli angoli $\alpha$ e $\alpha'$ sono congruenti allora r e s sono parallele* (Teorema)
(4) *se gli angoli $\alpha$ e $\alpha'$ sono sono retti allora r e s sono parallele* (Sillogismo ipotetico)
(5) *r e s sono parallele* (Modus ponens da (1) e (4)) (Tesi B)

ma allora abbiamo dimostrato A $\rightarrow$ B cioè:*se le rette r e s sono perpendicolari alla retta t allora sono parallele.*

Q.e.d.

### 4.3.2 DIMOSTRAZIONE DI UNA PROPOSIZIONE QUANTFICATA UNIVERSALMENTE: $\forall x \in U, A(x)$

4.3.2.1 Premessa

Dobbiamo dimostrare che una certa proprietà vale per tutti gli elementi del dominio del discorso.

Es: Ogni numero naturale è maggiore o uguale a 1

<u>4.3.2.2 Metodo dimostrativo</u>

Per dimostrare una proposizione del tipo $\forall x \in U$, A(x), si considera un generico elemento del dominio indicato con t, e trattandolo con la massima generalità, senza cioè attribuirgli proprietà che non siano godute da tutti gli elementi del dominio, si cerca di dimostrare la proposizione A(t) da cui per la regola di generalizzazione si conclude $\forall x \in U$, A(x).

Es 22

Indichiamo con Z l'insieme degli interi. Ricordiamo che un numero intero n è multiplo di un numero intero m se esiste un numero intero k tale che: n = km.

**Assiomi e teoremi noti:**

- $\forall x,y,z \in Z$, $(xy)z = x(yz)$ (Assioma: proprietà associativa della moltiplicazione)
- $6 = 2\times 3$ (Teorema)

**Teorema:**
$\forall x \in M$, x è pari (avendo indicato con M: l'insieme dei multipli di 6)

<u>Dimostrazione 1</u>

(1) Sia t un generico multiplo di 6, e k il numero che $t = 6k$ (Uso dell'elemento generico t)
(2) $6 = 2\cdot 3$ (Teorema)
(3) $6 = 2\cdot 3 \to (t = 6k \to t = (2\cdot 3)\,k)$ (Sostituzione)
(4) $t = 6k \to t = (2\cdot 3)\,k$ (M.P. da (2) e (4))
(5) $t = (2\cdot 3)\,k$ (M.P. da (1) e (5))
(6) $\forall x,y,z \in Z$, $(xy)z = x(yz)$ (Assioma)
(7) $(2\cdot 3)k = 2\,(3k)$ (Particolarizzazione da (6))
(8) $(2\cdot 3)k = 2\,(3k) \to (t = (2\cdot 3)\,k \to t = 2(3k))$ (Sostituzione )
(9) $(t = (2\cdot 3)\,k \to t = 2(3k))$ (M.P da (7) e (8))
(9) $t = 2(3k)$ (M.P da (5) e (9))
(10) $\exists x \in Z$, $t = 2x$ , cioè t è pari (Regola di introduzione dell'esistenziale)
(11) $\forall x \in M$, x è pari ( Regola di generalizzazione)

Q.e.d.

oppure

<u>Dimostrazione 2</u>

Sia t un generico multiplo di 6, e k il numero che $t = 6k$ , valendo $6 = 2\cdot 3$ e la proprietà associativa della moltiplicazione, possiamo scrivere (per sostituzione): $t = 6k = (2\cdot 3)\,k = 2\,(3k)$ , da cui (si usa la proprietà transitiva dell'uguaglianza) $t = 2\,(3k)$ , e quindi t è pari (t è il prodotto di 2 per il numero 3k). Essendo t un generico multiplo di 6 concludiamo (per generalizzazione) con $\forall x \in M$, x è pari.

Q.e.d.

<u>4.3.2.3 Osservazione</u> La regola di generalizzazione permette spesso di evitare l'uso del quantificatore universale all'interno di una dimostrazione, introducendolo solo alla fine, semplificando il lavoro del dimostratore. L'assenza del quantificatore universale è controbilanciata dalla generalità del termine generico, ne segue che spesso per semplicità si fa a meno del quantificatore universale anche nell'enunciare il teorema.

Es.

Il teorema: *per ogni numero naturale n si ha: n+0=0*
si scrive nella forma equivalente: *n+0=n , dove n è un generico numero naturale*

4.3.3 DIMOSTRAZIONE DI UNA PROPOSIZIONE QUANTIFICATA ESISTENZIALMENTE: $\exists x \in U$, $A(x)$

<u>4.3.3.1 Premessa</u>

Dobbiamo dimostrare che una certa proprietà vale almeno per un elemento del dominio del discorso.

Es: C'è un numero naturale che è maggiore di 3

Si usa spesso per provare che una proposizione del tipo $\forall x \in U$, $A(x)$ è falsa e che quindi è vera la sua negazione $\neg$ ($\forall x \in U$, $A(x)$ ) equivalente a $\exists x \in U$, $\neg$ $A(x)$ che afferma l'esistenza di un elemento ("controesempio") per cui non vale la proprietà $A(x)$.

<u>Metodo dimostrativo</u>

Individuato l'elemento, si mostra semplicemente che per esso vale la proprietà $A(x)$ e poi si applica la regola di introduzione del quantificatore esistenziale

Es 23:

**Assiomi e teoremi noti:**
- $\forall x \in N$, $0+x=x$ (Teorema)
- $0 < 1$ (Teorema)
- $\forall x,y,z \in N$ , $x<y \rightarrow x+z<y+z$ (Teorema)

**Teorema:**
$\exists x \in N$ , $3 < x$

<u>Dimostrazione 1</u>

(1) $0 < 1$ (Teorema)
(2) $\forall x,y,z \in U$ , $x<y \rightarrow x+z<y+z$ (Teorema)
(3) $0 < 1 \rightarrow 0+3 < 1+3$ (Particolarizzazione da (2))
(4) $0+3 < 1+3$ (M.P. da (1) e (3))

(5) $\forall x \in N$, $0+x=x$ (Teorema)
(6) $0+3=3$ (Particolarizzazione da (5))
(7) $0+3=3 \rightarrow (0+3 < 1+3 \rightarrow 3 < 1+3)$ (Sostituzione)
(8) $(0+3 < 1+3 \rightarrow 3 < 1+3)$ (M.P. da (6) e (7))
(9) $3 < 1+3$ (M.P. da (4) e (9))
(10) $\exists x \in N$, $3 < x$ (Introduzione del quantificatore esistenziale)

Q.e.d.

oppure

Dimostrazione 2

$0 < 1 \Rightarrow 0+3 < 1+3 \Rightarrow 3 < 1+3 \Rightarrow \exists x \in N, 3 < x$

Q.e.d.

### 4.3.4 DIMOSTRAZIONE DI UNA PROPOSIZIONE DELLA FORMA: $\forall x \in U, (A(x) \rightarrow B(x))$

#### 4.3.4.1 Premessa

E' la forma di teorema più diffusa.

Es. Per ogni triangolo ABC, se ABC è isoscele allora ABC ha due angoli congruenti.

#### 4.3.4.2 Metodo dimostrativo

Si usano insieme i metodi descritti in 4.3.1, e 4.3.2.

Es. 24

Ricordiamo che un naturale n è dispari se esiste un numero naturale k tale che:
$n = 2k+1$.

**Assiomi e teoremi noti:**

- $\forall x,y,z \in N$, $x+(y+z) = (x+y)+z$ (Teorema: proprietà associativa della somma)
- $\forall x \in N$, $x \cdot 1 = x$ (Teorema: proprietà dell'elemento neutro del prodotto)
- $\forall x,y,z \in N$, $xy + xz = x(y+z)$ (Teorema: proprietà distributiva della moltiplicazione)

**Teorema:**
$\forall x \in N$, se x è dispari allora x+1 è pari

Dimostrazione

Consideriamo un generico numero n e diamo per vero che sia dispari $n = 2k+1$; se sommiamo 1 a destra e a sinistra (stiamo usando le proprietà dell'uguaglianza: $n+1=n+1 \rightarrow n+1=(2k+1)+1$ ecc.) otteniamo: $n+1=(2k+1)+1$ da cui (proprietà associativa della somma, elemento neutro del prodotto, proprietà distributiva del prodotto, proprietà dell'uguaglianza) $n+1=(2k+1)+1= 2k+(1+1)=2k+2 = 2k+2\cdot 1 = 2(k+1)$; n+1 risulta quindi uguale al prodotto del numero k+1 per 2, cioè è pari.
A questo punto(vedi 4.3.1.2) abbiamo dimostrato l'affermazione che scelto un generico n: se n è dispari allora n+1 è pari , ma n è stato trattato da generico numero naturale (se n è dispari allora n+1 è pari, ma n potrebbe anche essere pari) quindi per generalizzazione si ha: $\forall x \in N$ , se x è dispari allora x+1 è pari . Q.e.d.

### 4.3.5 Dimostrazione per assurdo

#### 4.3.5.1 Premessa

Tale metodo è risolutivo nei casi in cui riesce più agevole trattare con la negazione $\neg A$ del teorema A, piuttosto che con il teorema stesso, ed è basato sul fatto che una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa ("principio di non contraddizione")

#### 4.3.5.2 Metodo dimostrativo

Si costruisce una dimostrazione che parte dagli assiomi, da teoremi già dimostrati e dalla proposizione $\neg A$, e si cerca di arrivare attraverso le regole deduttive o alla proposizione A, oppure alla negazione di un assioma o di un teorema già dimostrato, oppure ad una coppia di proposizioni della forma B e $\neg B$. Ne seguirebbe che una interpretazione che rendesse veri gli assiomi e la proposizione $\neg A$, dovrebbe rendere vera A, oppure la negazione di un teorema o di un assioma, oppure contemporaneamente le proposizioni B e $\neg B$. Questo non è possibile, e allora ogni interpretazione che rende veri gli assiomi deve rendere vera A.

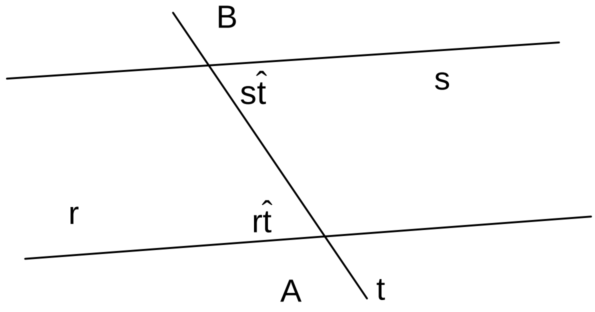
Es.25.

**Assiomi e teoremi noti:**

- *Per ogni coppia di punti A,B distinti passa una ed una sola retta* (Assioma)
- *Ogni terna di punti A,B,C distinti e non allineati determinano un triangolo* (Teorema 1)
- *In ogni triangolo ogni angolo esterno è sempre maggiore dei due angoli non adiacenti* (Teorema 2: dell'angolo esterno)

**Teorema:**

*Se due rette r e s, tagliate da una trasversale t nei punti A e B distinti, formano angoli alterni interni congruenti, allora sono parallele* (Teorema delle parallele)




Dimostrazione (per assurdo)

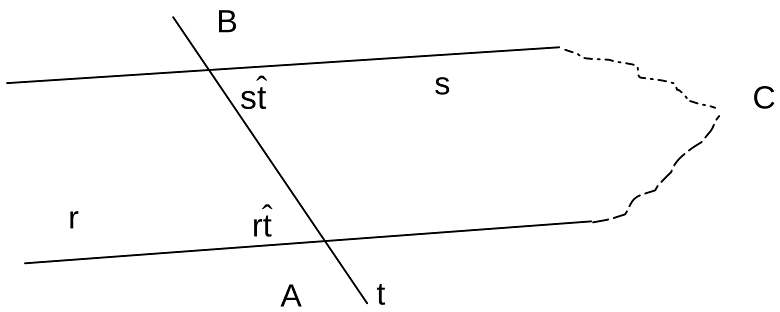
La tesi ha la forma : $r\hat{t} \cong s\hat{t} \rightarrow r /\!/ s$ (dove $r\hat{t}$ e $s\hat{t}$ sono angoli alterni interni). Proviamo a dimostrarla per assurdo. La sua negazione si scrive: $\neg(r\hat{t} \cong s\hat{t} \rightarrow r /\!/ s)$ cioè $(r\hat{t} \cong s\hat{t}) \wedge (\neg r /\!/ s)$ , si procede quindi nel seguente modo

(1) $(r\hat{t} \cong s\hat{t}) \wedge (\neg r /\!/ s)$ (Ipotesi assurda)

(2) $(\neg r /\!/ s)$ cioè hanno un punto in comune indicato con C (Eliminazione del connettivo $\wedge$ da (1))

(3) A,B,C non sono allineati (Lemma si dimostra per assurdo utilizzando le ipotesi e l'assioma)

(4) A,B,C determinano un triangolo (teorema + regole varie)




(5) In ogni triangolo ogni angolo esterno è sempre maggiore dei due angoli non adiacenti (Teorema 2)

(6) $r\hat{t} > s\hat{t}$ e quindi $r\hat{t} \not\cong s\hat{t}$ (Particolarizzazione da (5))

(7) $r\hat{t} \cong s\hat{t}$ (Eliminazione del connettivo $\wedge$ da (2))

Abbiamo a questo punto ottenuto l'assurdo perché abbiamo dimostrato $r\hat{t} \cong s\hat{t}$ e $r\hat{t} \not\cong s\hat{t}$ possiamo quindi concludere:

(8) $r\hat{t} \cong s\hat{t} \rightarrow r /\!/ s$ (per l'assurdo da (6) e (7))

Q.e.d.

### 4.3.6 DIMOSTRAZIONE PER CASI

4.3.6.1 Premessa

Il teorema è della forma $(A \vee B) \rightarrow C$ , cioè l'ipotesi del teorema si divide in due casi.

Es:

Se un numero ha uno sviluppo decimale finito o illimitato periodico allora è un numero razionale

4.3.6.2.Metodo dimostrativo

Si possono cercare due dimostrazioni una della proposizione $A \rightarrow C$ (1°caso) e una della proposizione $B \rightarrow C$ (2°caso), da queste due attraverso la regola deduttiva:

$$\frac{A \rightarrow C, B \rightarrow C}{(A \vee B) \rightarrow C}$$

si ottiene la conclusione.

La dimostrazioni per casi si può utilizzare anche nel modo seguente:
supponiamo di voler dimostrare C, allora possiamo provare a dimostrare per casi la seguente proposizione: $(A \vee \neg A) \rightarrow C$ e una volta ottenuta terminare la dimostrazione di C nel seguente modo:

(..) .......

| | | |
|---|---|---|
| (n-2) | $(A \vee \neg A) \rightarrow C$ | |
| (n-1) | $A \vee \neg A$ | (Tautologia) |
| (n) | C | (M.P. da (n-2) e (n-1) ) |

Es.26.

**Assiomi dei numeri interi**

**Teorema:**

Per ogni intero x si ha che $x(x + 1)$ is pari.

Dimostrazione

Un generico numero intero x o è pari o è dispari

Caso 1: supponiamo che x sia pari, cioè c'é un intero k tale che $x = 2k$. Allora si ha $x(x+1) = 2k(2k+1)$, e quindi $x(x + 1)$ is pari.

Caso 2: supponiamo che x sia dispari. cioè c'é un intero k tale che $x = 2k + 1$.
Allora si ha: $x(x+1) = (2k+1)(2k+2)= 2(2k+1)( k+1)$ , e quindi $x(x + 1)$ is pari.

Q.e.d.

ESERCIZI

Dimostra le seguenti proposizioni:

- Il quadrato di un numero dispari è un numero dispari
- Il quadrato di un numero pari è un numero pari
- Dati p e q numeri interi dispari, allora $p^2 + q^2$ non è divisibile per 4.
- Quattro persone: A, B,C,D devono dividere tra di loro la somma di 1.000€. Si dimostri che almeno una persona riceve almeno 250€.

### 4.3.7 DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

#### 4.3.7.1 Premessa

Trova il suo utilizzo quando si ha a che fare con proposizioni del tipo: $\forall n \in N$, A(n), cioè proposizioni aperte quantificate universalmente aventi come dominio l'insieme dei numeri naturali, oppure l'insieme nei naturali a partire da un numero k, cioè del tipo:
$\forall n \in N$ e $n \geq k$, A(n).

Esempi

- $\forall n \in N,\ 2^n > n$
- $\forall n \in N,\ n^3 + 5n$ è divisibile per 6
- $\forall n \in N$ e $n \geq 1$, $1+2+3+4+........+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

4.3.7.2 Metodo dimostrativo

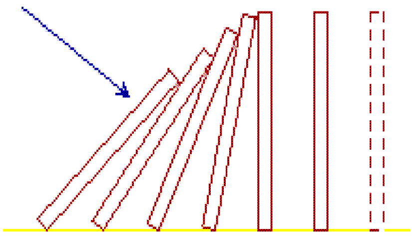
Si utilizza la seguente regola deduttiva

$$\frac{P(0),\quad \forall n \in N, (P(n) \rightarrow P(n+1))}{\forall n \in N, (P(n)}$$

In pratica la proposizione $\forall n \in N$ , P(n) si dimostra tramite i due passi:

(a) base dell'induzione: si dimostra la proposizione P(0);
(b) passo induttivo: si dimostra la proposizione $P(n) \rightarrow P(n+1)$ dove n è un generico numero naturale (per dimostrare $P(n) \rightarrow P(n+1)$ si cerca di dimostrare P(n+1) considerando vera P(n) (vedi 4.3.1.2 ) )

Quello che accade con la dimostrazione per induzione può essere visualizzato con l'immagine di una successione di pezzi di domino, posti verticalmente in equilibrio ad una distanza minore della loro altezza. Facendo cadere il primo della fila, tutti gli altri cadranno.



Es 27:

**Assiomi dei numeri interi**

**Teorema:**

$\forall n \in N$, $n^3 - n$ è divisibile per 3

Dimostrazione (per induzione)

(a) base dell'induzione: $0^3 - 0 = 0$ e 0 è un multiplo di 3, è vera!
(b) passo induttivo: supponiamo che la proposizione sia vera per un generico n; cioè $n^3 - n$ è divisibile per 3, e cerchiamo di dimostrare che la proposizione è vera per n +1: se $n^3 - n$ è divisibile per 3 allora esiste k tale $n^3 - n=3k$; se calcoliamo $(n+1)^3 - (n+1)$ otteniamo $(n+1)^3 - (n+1) = n^3+3n^2+3n+1-n-1= n^3-n +3n^2+3n$ , e sapendo che $n^3 - n=3k$ si ha: $(n+1)^3 - (n+1) = 3k +3n^2+3n = 3(k+n^2+n)$, cioè $(n+1)^3 - (n+1)$ è multiplo di 3.

Q.e.d.

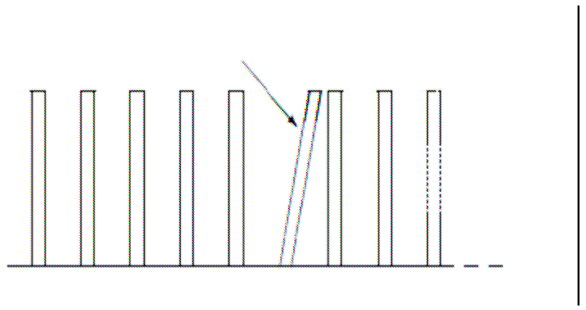
4.3.7.3 Induzione con base diversa da 0

Per dimostrare proposizione del tipo $\forall n \in N$ e $n \geq k$, A(n), si può utilizzare lo schema seguente (equivalente al principio di induzione)

Si utilizza la seguente regola deduttiva

$$\frac{P(k), \quad \forall n \in N \text{ e } n \geq k, (P(n) \to P(n+1))}{\forall n \in N \text{ e } n \geq k, P(n)}$$

Stavolta facendo cadere la tessera di posto k, cadranno tutti quelli successivi.



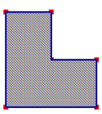
ESERCIZI

Prova per induzione le seguenti proposizioni scegliendo un opportuno passo base

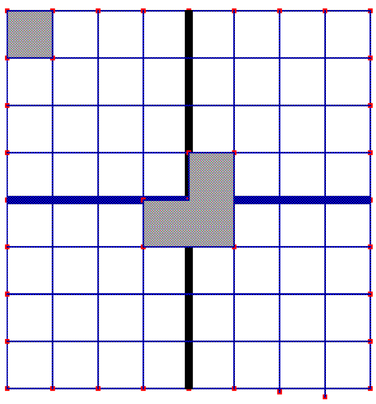
- $1+2+3+4+........(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $1^3+2^3+3^3+......+n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
- $1^2+2^2+3^2+.......+n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $2+2^2+2^3+........+2^n = \sum_{i=1}^{n} 2^i = 2(2^n-1)$
- $2+4+6+.....+2n = \sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$
- $1+3+5+......+(2n-1) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$
- $1+5+9+........+(4n-3) = \sum_{i=1}^{n} (4i-3) = n(2n-1)$

- $2^n > n$
- $2^n > n^2$
- $n^3 + 5n$ è divisibile per 6
- $3^{2n+1}+2^{n+2}$ è divisibile per 7
- $8^n+6$ è divisibile per 14
- $10^n - 1$ è divisibile per 9
- $4^n - 1$ è divisibile per 3
- $n^5 - n$ è divisibile per 5
- $n^7 - n$ è divisibile per 7
- $n^k - n$ è divisibile per k
- 20 Ogni grafo ha un numero pari di nodi dispari
- Un insieme con n elementi ha $2^n$ sottoinsiemi.

- Una scacchiera da dama con $2^n \times 2^n$ quadrati (o celle) dalla quale un quadrato angolare è stato rimosso, può essere ricoperta esattamente da “trimini” come in Figura.



trimino



BIBLIOGRAFIA


- Mendelson E., (1972), *Introduzione alla logica matematica*, Bollati Boringhieri
- Lolli. G, (1991), *QED Fenomenologia della dimostrazione*, Bollati Boringhieri
- Lolli. G, (1991), *Introduzione alla logica formale*, Il Mulino
- Lolli, G., (1978), *Lezioni di logica matematica*, Boringhieri
- Maraschini W., Palma M., (2000), *Multi format: logica di base*, Paravia


SITOGRAFIA


- http://math.berkeley.edu/~ianagol/113.F10/proofs.pdf
- http://www.batmath.it/matematica/a_induz/induz.htm
- umi.dm.unibo.it/old/italiano/Matematica2003/sesta/14_TASSE.PDF