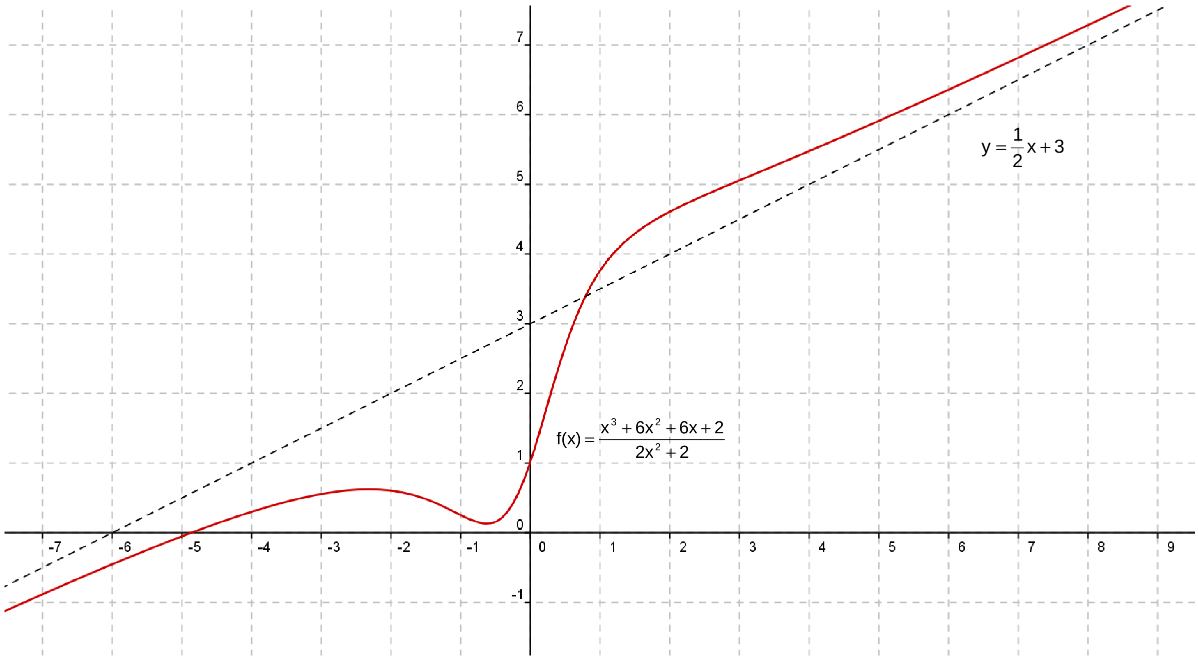
ASINTOTI COME LIMITI DI TANGENTI

ANDREA DI LORENZO
SILVIA FEDI
VALERIO STINCO
RICCARDO VIGNOLI

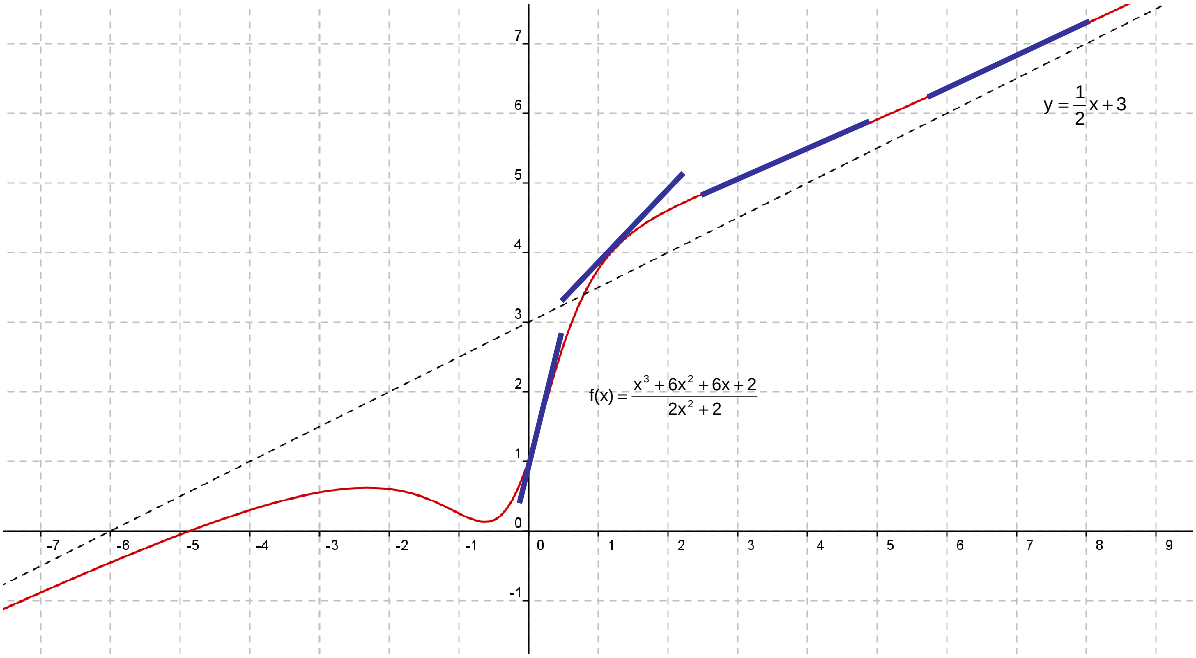
0. UN ESEMPIO

Nel piano cartesiano è riportato il grafico della funzione:

$f(x) = \dfrac{x^3 + 6x^2 + 6x + 2}{2x^2 + 2}$ e il suo asintoto obliquo di equazione $y = \dfrac{1}{2}x + 3$



Se ora tracciamo alcune delle rette tangenti al grafico, ci si rende conto che per $x \to +\infty$ esse tendono ad "allinearsi" all'asintoto (analogamente per $x \to -\infty$) .



Questo fatto è incidentale o accade sempre? In altre parole:

e' vero, che se il coefficiente angolare della tangente ha limite finito non nullo tale limite è il coefficiente angolare di un asintoto obliquo?

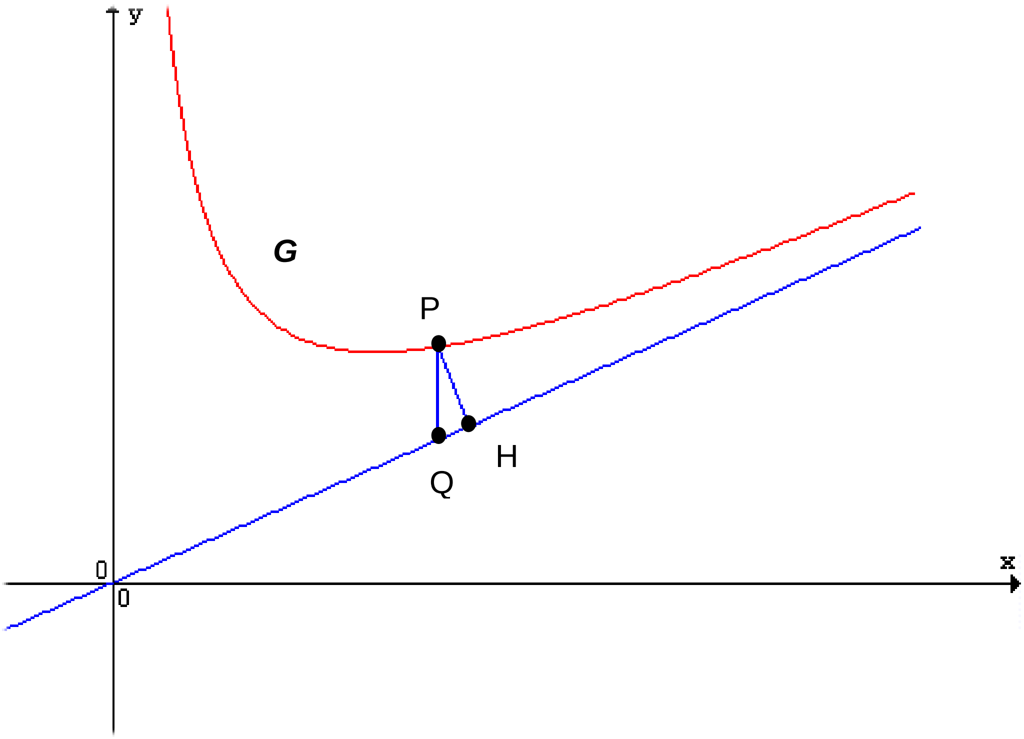
è vero che se c'è un asintoto obliquo allora il coefficiente angolare della tangente ha come limite il coefficiente angolare dell'asintoto?

In questo lavoro cercheremo delle risposte a questi quesiti. Occorre però introdurre alcuni prerequisiti.

1. RICHIAMI TEORICI

1.1 ASINTOTI.

Si dice che la curva *G* (eventualmente grafico di una funzione di equazione y=f(x)) ammette la retta r come asintoto se la distanza del generico punto P della curva dalla retta r tende a zero quando P si allontana indefinitamente su *G*.



Cioè:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{Dist}(P;H) = 0$$

1.2 ASINTOTI OBLIQUI DI UNA FUNZIONE y=f(x)

Se si ha:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

è lecito chiedersi se esista un "asintoto obliquo", e cioè se il grafico della funzione si accosti (quando *x* tende a più o meno infinito) a quello di una retta di equazione: y=mx+q (ove $m \neq 0$, altrimenti si tratterebbe di un asintoto orizzontale); naturalmente possiamo avere due diversi asintoti obliqui per *x* che tende a più o meno infinito.

Per scoprirlo dobbiamo calcolare il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Se tale limite esiste ed è finito, ci dà il valore di m; si procede effettuando il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right).$$

Di nuovo, se tale limite esiste ed è finito, esso ci dà il valore di *q.* e quindi l'asintoto obliquo esiste per *x* che tende a più infinito ed ha equazione y=mx+q .

Lo stesso tipo di analisi va compiuto per x che tende a meno infinito.

1.3 Teorema di Lagrange

Data una funzione f continua in [a,b] e derivabile in (a,b), esiste $c \in (a, b)$ tale che:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

1.4 Teorema di de l' Hospital (per $x \to \infty$)

Date due funzioni f e g continue e derivabili in un intervallo $(a, +\infty)$, se $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, +\infty)$ e se:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$ (dove L indica un limite finito o infinito)

allora: $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

2. Risultati

Iniziamo intanto a studiare come sono legati tra loro i due limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad e \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x)$$

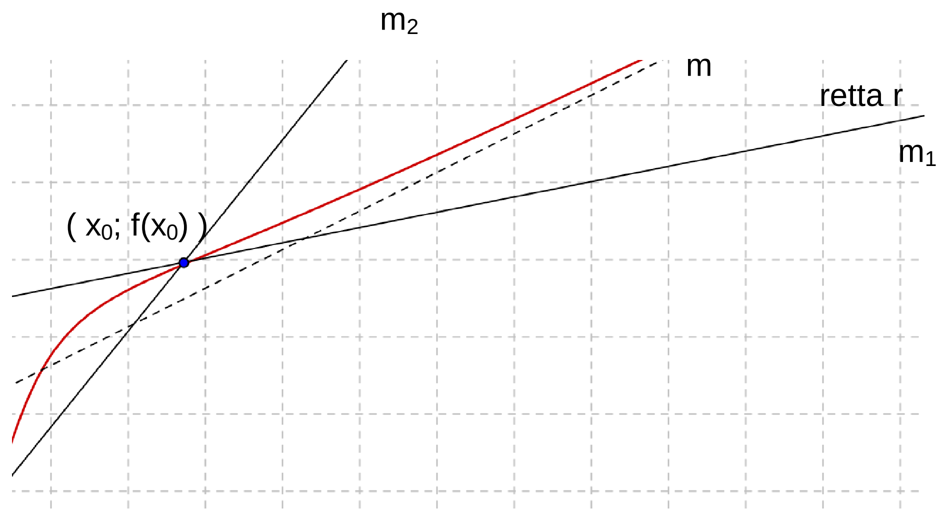
2.1 Proposizione

Sia f(x) continua e derivabile in un intervallo (a; +∞), allora:

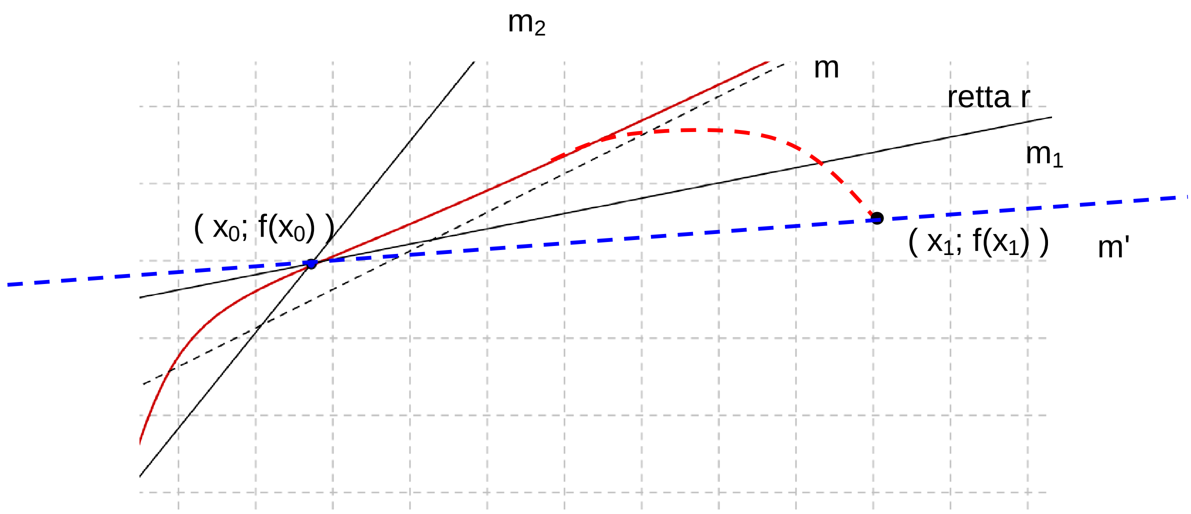
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m \neq 0 \ \Rightarrow \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$$

<u>Dimostrazione.</u>

Supponiamo che m>0, allora, per la definizione di limite, per ogni m_1 e m_2 tali che $0 < m_1 < m < m_2$ esiste un intervallo (b, +∞) con b >a tale che per ogni x in (b, +∞) si ha $f'(x) > m_1$. Considerata ora la retta r passante per (x_0; $f(x_0)$) per qualche x_0 in (b, +∞) con coefficiente angolare pari a m_1, risulta che per ogni $x \in (x_0, +\infty)$ il grafico di f(x) sta sopra tale retta.



Se così non fosse dovrebbe esistere un punto del grafico (x_1; f(x_1)) con $x_1 > x_0$ al di sotto della retta r, ma allora la retta secante passante per (x_0; f(x_0)) e (x_1; f(x_1)) avrebbe un coefficiente angolare $m' \leq m_1$; e per il teorema di Lagrange (1.3) dovrebbe esistere un $c \in (x_0, x_1)$ tale che $f'(c)=m' \leq m_1$; ma questo è assurdo perché per ogni $x \in (x_0, +\infty) \subseteq (b; +\infty)$ $f'(x) > m_1$.



Confrontando la funzione f(x) e la retta r nell'intervallo $(x_0, +\infty)$ si conclude che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Se fosse m<0 con analoghi ragionamenti si arriverebbe a:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

2.2 PROPOSIZIONE

Sia f(x) continua e derivabile in un intervallo (a; +∞), e m≠0 allora:

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

Dimostrazione

Applicando il teorema di de L'Hospital alle funzioni f(x) e g(x)=x (è facile vedere che valgono tutte le ipotesi del teorema, in particolare $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ si ha per la prop. 2.1)

si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{1} = m$$

2.3 OSSERVAZIONE.

Vale il viceversa? La risposta è affermativa per le funzioni razionali fratte..

2.4 PROPOSIZIONE

Sia f(x) una funzione razionale fratta e m≠0, allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = m$$

Dimostrazione

Essendo $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$, la funzione razionale fratta è del tipo: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_{n+1}x^{n+1} + .. + a_0}{b_n x^n + .. + b_0}$

ed inoltre $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_{n+1}x^{n+1} + .. + a_0}{b_n x^n + .. + b_0} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_{n+1}x^{n+1} + .. + a_0}{b_n x^{n+1} + .. + b_0 x} = \frac{a_{n+1}}{b_n}$

Calcolando $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ si ottiene:

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[(n+1)a_{n+1}x^n + .. + a_1\right]\left(b_n x^n + .. + b_0\right) - \left(a_{n+1}x^{n+1} + .. + a_0\right)\left(nb_n x^{n-1} + .. + b_1\right)}{\left(b_n x^n + .. + b_0\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{[(n+1)a_{n+1}b_n - a_{n+1}nb_n]x^{2n}}{{b_n}^2 x^{2n}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_{n+1}b_n}{{b_n}^2} = \frac{a_{n+1}}{b_n} = m$$

Nella proposizione che segue si vede che le domande poste all'inizio hanno per le funzioni razionali fratte una risposta affermativa.

2.5 PROPOSIZIONE

Una funzione razionale fratta f(x) ha un asintoto obliquo sse $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m \neq 0$

Dim.

Se f(x) ha un asintoto obliquo allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ e quindi per la prop 2.4 si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m.$$

Viceversa se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m \neq 0$, ancora per la prop. 2.4 si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$; ma nel caso delle funzioni razionali fratte questo comporta necessariamente l'esistenza di un numero q tale che:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) .= q \ ,$$

da cui l'esistenza dell'asintoto obliquo di equazione: y=mx+q

2.6 OSSERVAZIONE.

La prop 2.2 si può invertire in generale aggiungendo l'ipotesi dell'esistenza dei limiti $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$.

2.7 PROPOSIZIONE

Sia f(x) continua e derivabile in un intervallo (a; +∞) e m≠0 ed inoltre esistano $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$, allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = m$$

Dimostrazione

Applicando ancora il teorema di de L'Hospital alle funzioni f(x) e g(x)=x (il $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ esiste per ipotesi, e non può essere finito, altrimenti $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m = 0$, quindi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$) si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

2.8 OSSERVAZIONE.

L' ipotesi relativa all'esistenza di $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ è essenziale, come risulta dal seguente esempio nel quale non esiste $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

Esempio 1:

f(x)= x + sen x $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x + \text{sen}\, x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\text{sen}\, x}{x}\right) = 1$

f'(x)= 1 + cos x $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1 + \cos x) = \neg\exists$

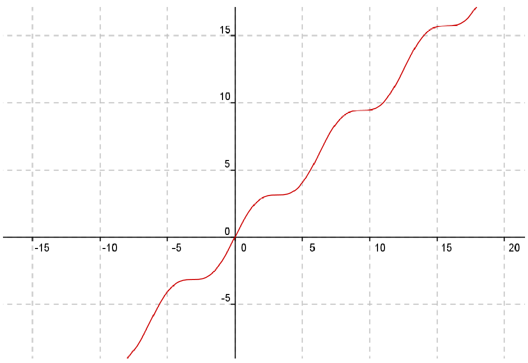


GRAFICO DI f(x)

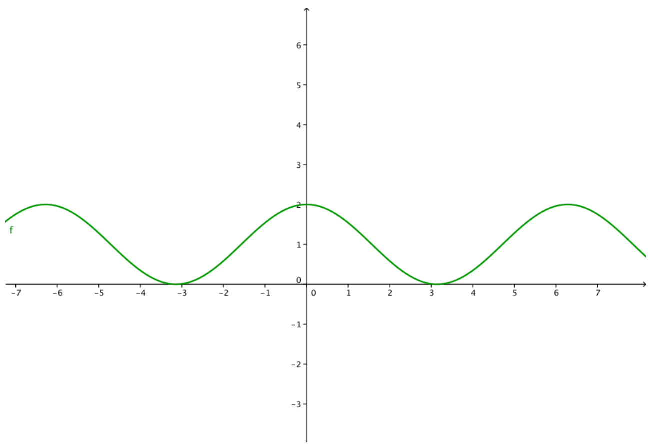


GRAFICO DI f'(x)

Si noti che in questo caso la funzione f(x) non ha un asintoto obliquo, infatti il limite per determinare q non esiste:

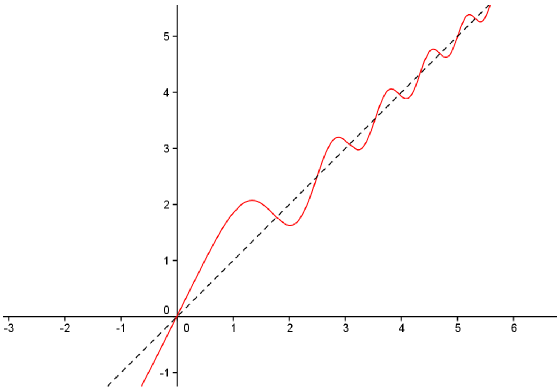
$$\lim_{x\to+\infty} (x + \text{sen}\, x - x) = \lim_{x\to+\infty} \text{sen}\, x = \neg\exists$$

Si potrebbe essere indotti a pensare che la prop. 2.2 non si inverta in questo caso proprio per la mancanza dell'asintoto obliquo; ma non è così come risulta dal prossimo esempio.
Esempio 2

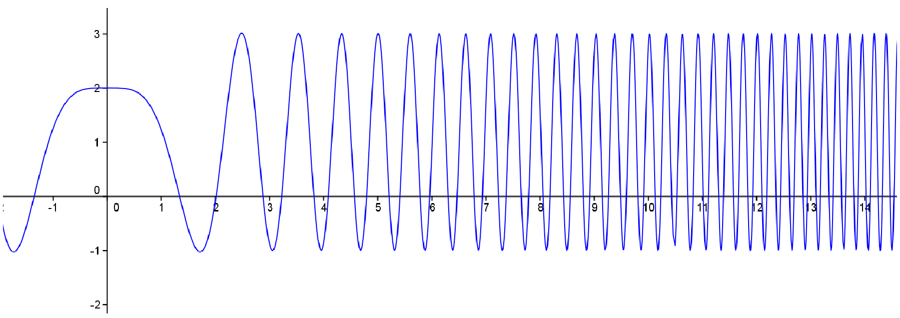
$$f(x)= x+\frac{1}{x}\operatorname{sen}x^2 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\operatorname{sen}x^2\right)\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\operatorname{sen}x^2}{x^2}\right)=1=m$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\operatorname{sen}x^2-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\operatorname{sen}x^2\right)=0=q$$

dunque la funzione f(x) ha un asintoto obliquo di equazione $y=x$



$$f'(x)= 1+2\cos x^2-\frac{\operatorname{sen}x^2}{x^2} \qquad \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+2\cos x^2-\frac{\operatorname{sen}x^2}{x^2}\right)=\neg\exists$$



In questo esempio si vede come l'esistenza dell'asintoto obliquo non comporti necessariamente l'esistenza del limite: $\lim_{x\to+\infty}f'(x)$.

3. Conclusioni

All'inizio di questo lavoro c'eravamo posti due quesiti.

1) E' vero, che se il coefficiente angolare della tangente ha limite finito non nullo tale limite è il coefficiente angolare di un asintoto obliquo?

Abbiamo stabilito nella prop. 2.2 che se $m \neq 0$ allora in generale:

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = m \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

ora se si ha anche $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right) = q$ (e per le funzioni razionali fratte ciò accade sempre), la funzione ha un asintoto obliquo $y=mx+q$ con coefficiente angolare m

2) E' vero che se c'è un asintoto obliquo allora il coefficiente angolare della tangente ha come limite il coefficiente angolare dell'asintoto?

Per la prop. 2.4 l'affermazione vale per le funzioni razionali fratte, ma non è vero in generale (vedi esempio 2 Oss. 2.8).

4. Bibliografia e sitografia

M.Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi, *Moduli di matematica Lineamenti di Analisi*, Zanichelli, 2008

M. Castellan (2010), *Logica*, http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads/2010/04/Logica.pdf

Silvia Fedi (3^H PNI)
Andrea Di Lorenzo (3^D PNI)
Valerio Stinco (3^D PNI)
Riccardo Vignoli (3^D PNI)

(Liceo classico Orazio di Roma, a.s. 2009-2010)