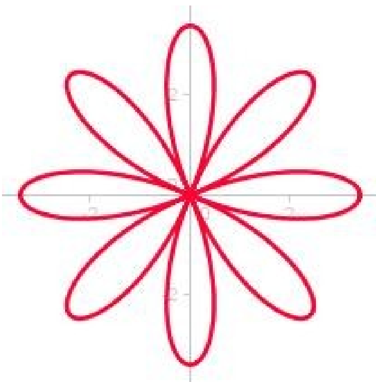
VARIETÀ DI RODONEE

AUTORI
COSTANZO CATERINA
DE LUCA ELISABETTA
MACCHERONI FEDERICO
MANCINI SARA
MORETTI MARGHERITA

ABSTRACT. L'articolo illustra alcune varianti costruite a partire da curve denominate "rodonee", di aspetto particolarmente "gradevole" perché la loro forma richiama quella dei fiori. L'obiettivo è studiare le caratteristiche di tali curve a partire dalle loro equazioni parametriche.

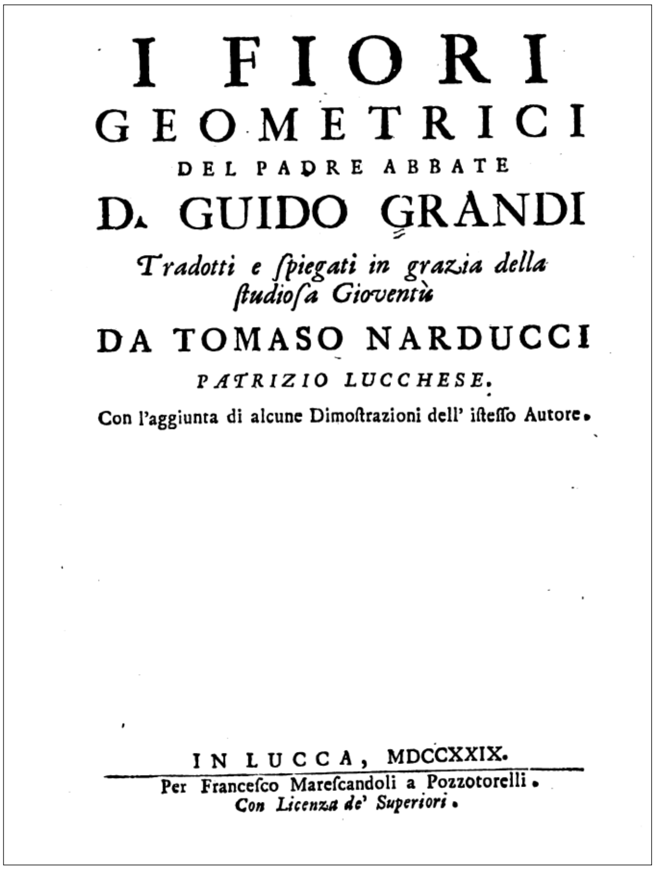
1.INTRODUZIONE

In geometria è detta Rodonea una curva il cui grafico è caratterizzato da una serie di avvolgimenti attorno ad un punto centrale.
Nei casi più noti tali avvolgimenti producono figure a forma di rosone, da cui deriva alla curva il nome di Rodonea (dal greco rhòdon, rosa).



RODONEA CON OTTO PETALI

La curva rodonea è chiamata anche rosa di Grandi da Luigi Guido Grandi, il matematico che la battezzò e studiò intorno al 1725.



I FIORI
GEOMETRICI
DEL PADRE ABBATE
D. GUIDO GRANDI
Tradotti e ſpiegati in grazia della ſtudioſa Gioventù
DA TOMASO NARDUCCI
PATRIZIO LUCCHESE.
Con l'aggiunta di alcune Dimoſtrazioni dell' isteſſo Autore.

IN LUCCA, MDCCXXIX.
Per Franceſco Mareſcandoli a Pozzotorelli.
Con Licenza de' Superiori.

FIORI
GEOMETRICI.

FIORI GEOMETRICI ſi dicono in generale tutte quelle Figure circonſcritte da una qualche curva pel giro di qualche foglie, che ſi vanno allargando da un medeſimo Centro, i quali appunto moſtrano le figure (1. 2. 3. 4. 5. 13.) ſe ſono nell' isteſſo piano; ſe poi ſono ſopra una superficie curva, ſono eſpreſſi dalle figure (32. 33. 34.) i quali Fiori ſecondo il numero delle foglie ſi dicono *unifolii*, *bifolii*, *trifolii*, *tetrafolii*, *pentafolii*, *eſafolii*, *&c.*

Eſſendo innumerabili i modi, co i quali tali Fiori ſi poſſono generare, ſi prenderanno ad eſporre due ſole generazioni de' medeſimi: una delle quali forma le *Rodonee*, e l'altra le *Clelie*.

2. PREQUISITI: RAPPRESENTAZIONI PARAMETRICHE.

Si dice rappresentazione parametrica di una curva $\mathcal{C}$ del piano una coppia di funzioni con dominio D $\subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_p(t) \\ y_p(t) \end{cases} \quad t \in D$$

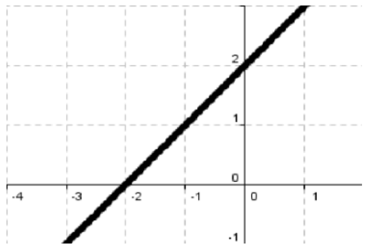
tale che, al variare di t in D, il punto P(x_P(t);y_P(t)) descriva la curva $\mathcal{C}$.

3. ESEMPI.

Illustriamo ora alcuni esempi di rappresentazioni parametriche di curve della geometria del piano.

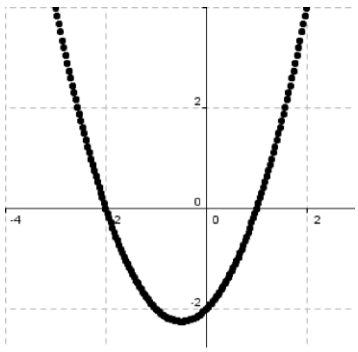
I) La retta *r* di equazione cartesiana : $y = x + 2$

$$\begin{cases} x_p(t) = t \\ y_p(t) = t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$



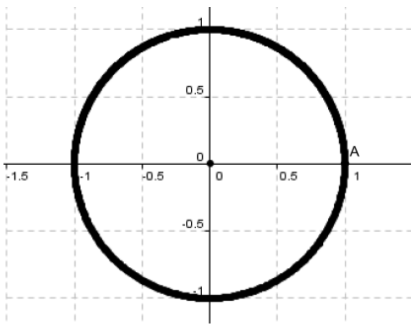
II) La parabola $\mathscr{P}$ di equazione cartesiana : $y = x^2 + x - 2$

$$\begin{cases} x_p(t) = t \\ y_p(t) = t^2 + t - 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$



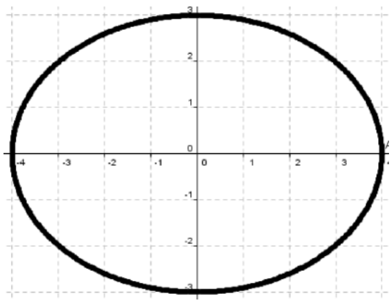
III) La circonferenza $\mathscr{C}$ di equazione cartesiana : $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} x_p(t) = cos(t) \\ y_p(t) = sin(t) \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi)$$



IV) L'ellisse $\mathscr{E}$ di equazione cartesiana : $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

$$\begin{cases} x_p(t) = 4cos(t) \\ y_p(t) = 3sin(t) \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi)$$



4. LE RODONEE: RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA.

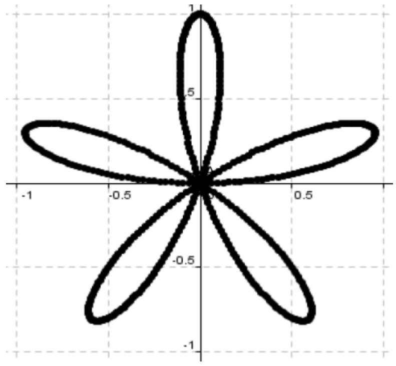
Si dicono “rodonee” tutte le curve con equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_p(t) = \sin(kt)\cos(t) \\ y_p(t) = \sin(kt)\sin(t) \end{cases} \quad t \in D$$

dove D è un opportuno dominio

Esempio: ($k = 5$)

$$\begin{cases} x_p(t) = \sin(5t)\cos(t) \\ y_p(t) = \sin(5t)\sin(t) \end{cases} \quad t \in [0; \pi)$$



5. Le rodonee: proprietà.

1° caso: $k \in \mathbb{N}$ con $k > 0$

In questo caso:

- se k è pari le due funzioni $x_P(t)$ e $y_P(t)$ sono periodiche con periodo 2π, fissato D= [0; 2π), le due funzioni determinano una rodonea con $\frac{k}{2}$ petali
- se k è dispari le due funzioni $x_P(t)$ e $y_P(t)$ sono periodiche con periodo π, fissato

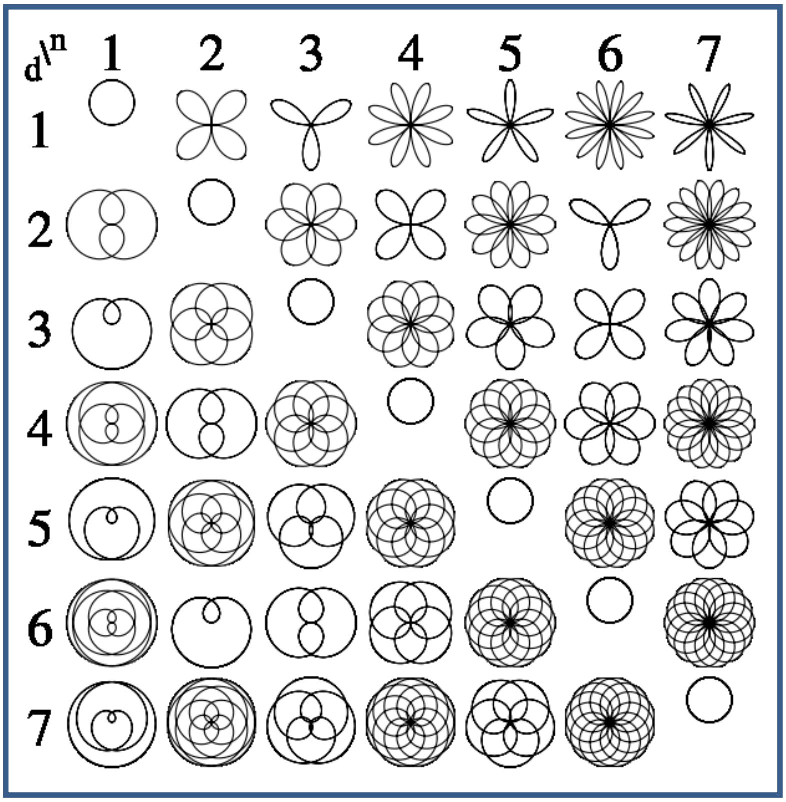
  D= [0; π), le due funzioni determinano una rodonea con k petali

  (nel caso k =1 si ottiene una circonferenza)

2° caso: $k \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$ con $k > 1$

In questo caso i petali risultano sovrapposti, inoltre:

- se $k = \frac{n}{d}$ con n e d primi tra loro ed entrambi dispari si ottiene una rodonea con n petali
- se $k = \frac{n}{d}$ con n e d primi tra loro ed uno pari e uno dispari si ottiene una rodonea con $2n$ petali



RODONEE OTTENUTE PER VALORI DIVERSI DI K

3° caso: $k \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ con $k > 0$

In questo caso si ottiene una rodonea con infiniti petali

6. VARIANTI DI RODONEE

A questo punto abbiamo provato a modificare la rappresentazione parametrica delle rodonee alla ricerca di una formulazione "più simmetrica", in questo modo:

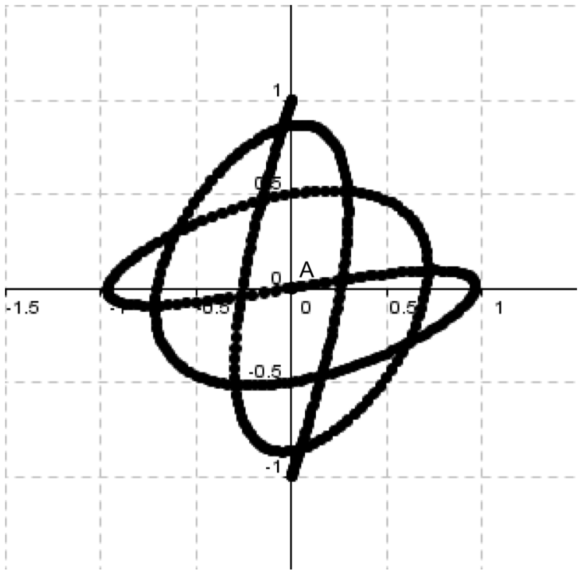
$$\begin{cases} x_p(t) = \sin(kt)\cos(t) \\ y_p(t) = \cos(kt)\,\sin(t) \end{cases} \quad t \in D$$

ottenendo così una nuova famiglia di curve che chiameremo "quadronee".

Ne illustriamo un esempio con k pari e uno con k dispari:

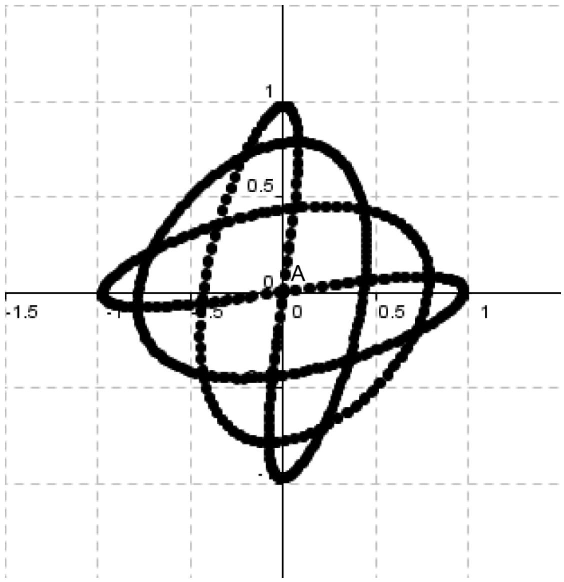
$$\begin{cases} x_p(t) = sin(6t)cos(t) \\ y_p(t) = cos(6t)\ sin(t) \end{cases} \quad t \in [0;\ 2\pi)$$

ESEMPIO 1



$$\begin{cases} x_p(t) = sin(7t)cos(t) \\ y_p(t) = cos(7t)\ sin(t) \end{cases} \quad t \in [0;\ \pi)$$

ESEMPIO 2



7. PROPRIETÀ DELLE QUADRONEE

Sia $k \in \mathbb{N}\ con\ \ k > 0$

- se k è pari le due funzioni $x_P(t)$ e $y_P(t)$ sono periodiche con periodo 2π, fissato

  D= [0; 2π), le due funzioni determinano una quadronea aperta;

- se k è dispari le due funzioni $x_P(t)$ e $y_P(t)$ sono periodiche con periodo π, fissato

  D= [0; π), le due funzioni determinano quadronea chiusa

  (nel caso k = 1 si ottiene il segmento di estremi (-√2 , -√2) e (√2 , √2))

<u>Dimostrazione</u>

Sia $k = 2h$ allora :

$$x_p(t + 2\pi) = sin\big(k(t + 2\pi)\big)cos(t + 2\pi) = sin\big(2h(t + 2\pi)\big)cos(t + 2\pi) =$$
$$= sin(2ht + 4h\pi)cos(t + 2\pi) = sin(2ht)cos(t)\ = sin(kt)cos(t)\ = x_p(t)$$

$$y_p(t + 2\pi) = cos\big(k(t + 2\pi)\big)sin(t + 2\pi) = cos\big(2h(t + 2\pi)\big)sin(t + 2\pi) =$$
$$= cos(2ht + 4h\pi)sin(t + 2\pi) = cos(2ht)sin(t)\ = cos(kt)sin(t)\ = y_p(t)$$

Sia $k = 2h+1$ allora :

$$x_p(t+\pi) = sin\big(k(t+\pi)\big)cos(t+\pi) = sin\big((2h+1)(t+\pi)\big)cos(t+\pi) =$$
$$= sin\big((2h+1)t + 2h\pi + \pi\big)\big(-cos(t)\big) = sin\big((2h+1)t+\pi\big)\big(-cos(t)\big) =$$
$$= -sin\big((2h+1)t\big)\big(-cos(t)\big) = sin(kt)cos(t) = x_p(t)$$

$$y_p(t+\pi) = cos\big(k(t+\pi)\big)sin(t+\pi) = cos\big((2h+1)(t+\pi)\big)sin(t+\pi) =$$
$$= cos\big((2h+1)t + 2h\pi + \pi\big)\big(-sin(t)\big) = cos\big((2h+1)t+\pi\big)\big(-sin(t)\big) =$$
$$= -cos\big((2h+1)t\big)\big(-sin(t)\big) = cos(kt)sin(t) = y_p(t)$$

Inoltre

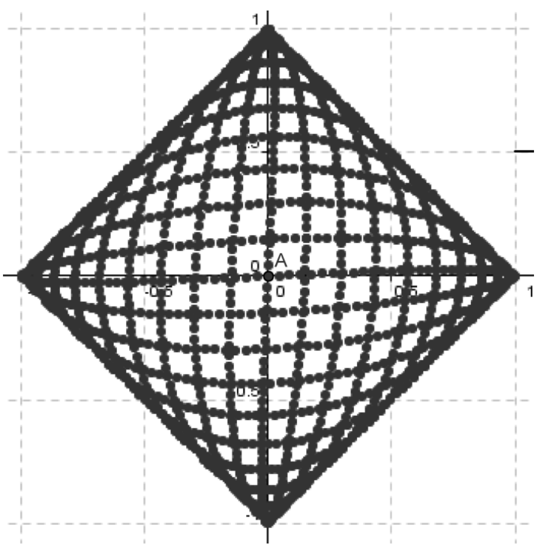
- se k è pari si ottiene una quadronea aperta (esempio 1);
- se k è dispari si ottiene una quadronea chiusa (esempio 2)

8. Il quadrato limite

Infine abbiamo constatato che più k cresce, più la figura tende ad assomigliare a un quadrato:

$$\begin{cases} x_p(t) = \sin(21t)\cos(t) \\ y_p(t) = \cos(21t)\,\sin(t) \end{cases} \quad t \in [0;\pi)$$

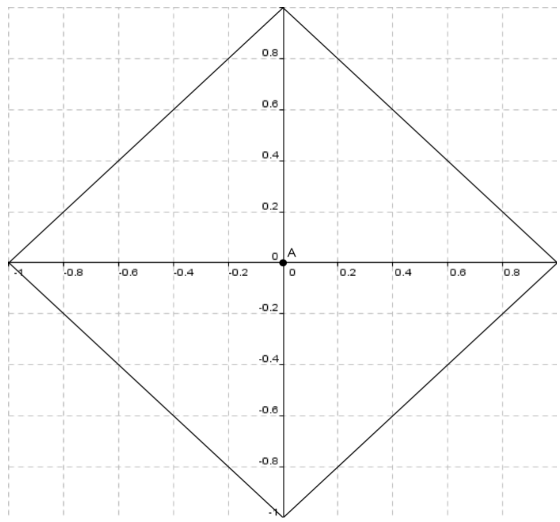
Esempio 3



Per spiegare il comportamento di queste curve, occorre intanto osservare che esse sono inscritte dentro la figura espressa dall'equazione:

d: $|x|+|y|=1$

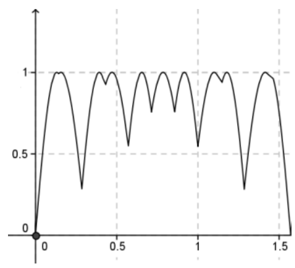
e cioè il quadrato di vertici (1;0) (0; 1) (-1;0) (0;-1)



Infatti presa in considerazione la funzione:

$$|x_P|+|y_P| = |\sin(kt)\cos(t)| + |\cos(kt)\sin(t)|$$

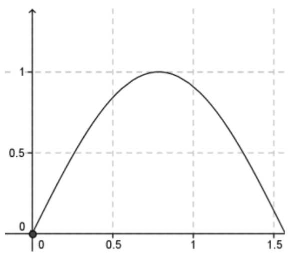
e rappresentato Il suo grafico (realizzato nell'esempio per $k=21$)



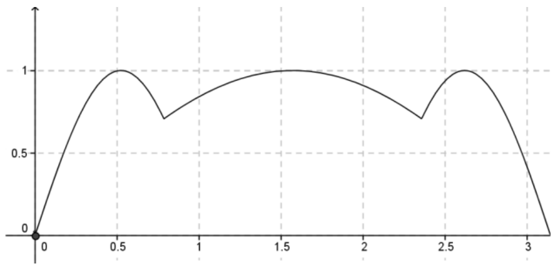
si vede chiaramente che la funzione è tale che:

$$|x_P|+|y_P| \leq 1$$

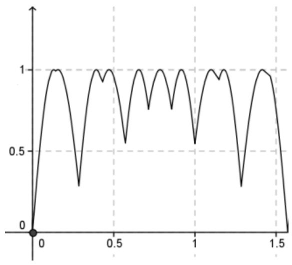
è che quindi la quadronea è delimitata dal quadrato. Si nota inoltre quante volte la funzione assume valori uguali a 1, corrispondentemente la quadronea incontra il bordo del quadrato e tale comportamento si accentua sempre di più al crescere di k .



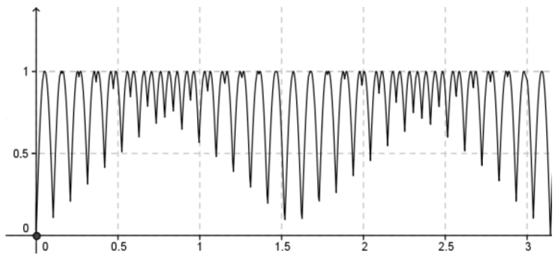
$\kappa = 1$



$\kappa = 12$



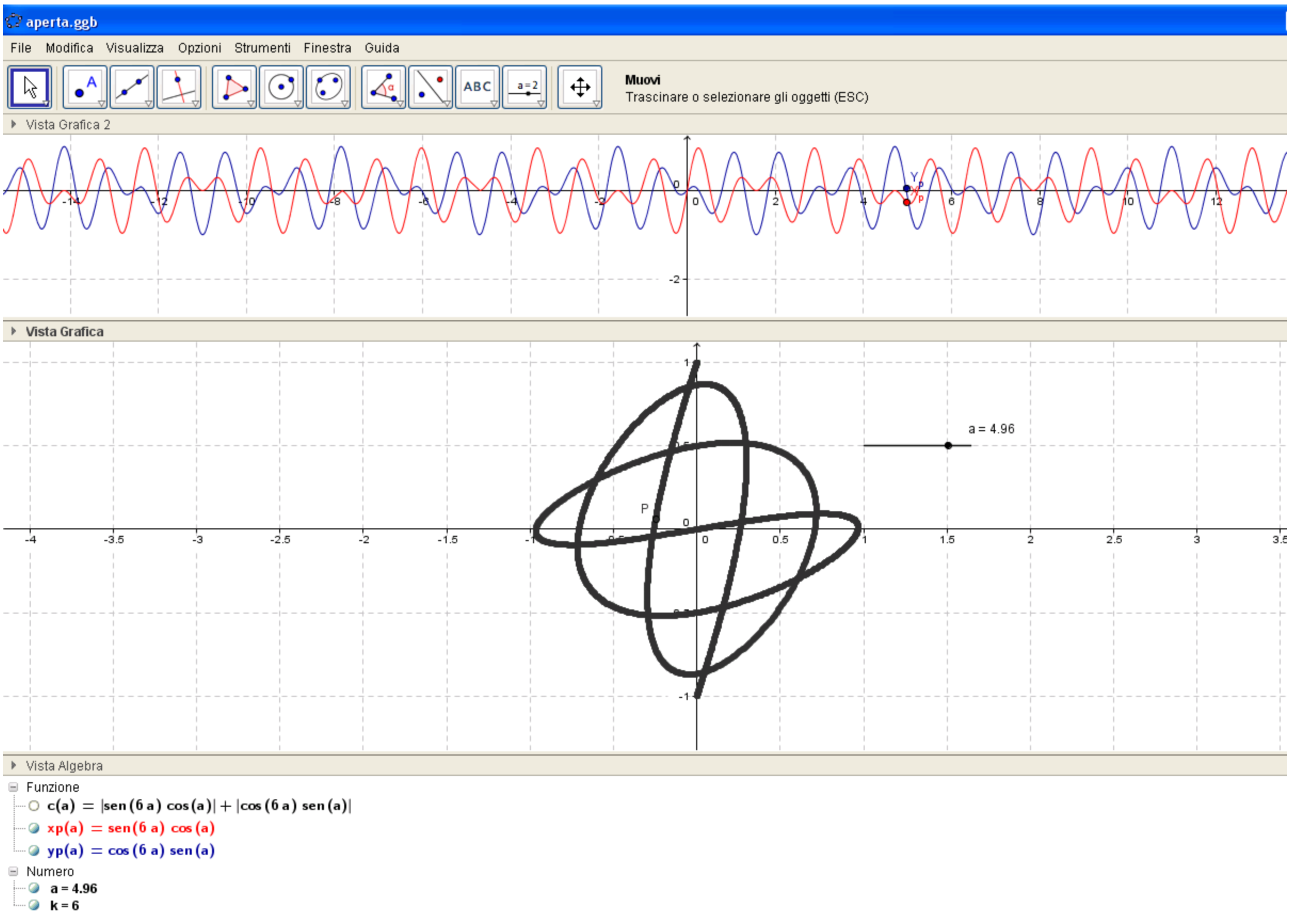
$\kappa = 21$



$\kappa = 30$

9. Conclusioni

Nella nostra ricerca si è messo un luce come la matematica sia in grado di colpire, anche ad un semplice livello di piacere visivo, grazie ad oggetti matematici particolarmente gradevoli; ma tale riflessione ne fa scattare immediatamente un'altra: la natura di queste creazioni si regge su costruzioni analitiche che ne permettono uno studio completo e la possibilità di generare nuove oggetti con proprietà prestabilite. Nello specifico, si è fatto un uso costante della forma di rappresentazione parametrica delle curve che permette di scomporre la natura bidimensionale degli oggetti del piano mediante l'analisi delle due funzioni $x_P(t)$, $y_P(t)$. Lo studio separato delle loro proprietà e il loro confronto facilita lo studio della curva che esse rappresentano. Infine l'uso del parametro t introduce una dimensione "dinamica" nella definizione della curva che si "crea" punto per punto al variare di t, con una forte allusione alla traiettoria di un punto P che si muove al variare del tempo. Questa caratteristica permette, tramite software dedicati (come geogebra), la realizzazione di istruttive animazioni nelle quali la curva è “tracciata” al variare di t nel suo dominio. Tali strumenti permettono, come in effetti è stato fatto nel nostro lavoro, di confrontare contestualmente (usando più finestre) lo sviluppo dei grafici delle funzioni $x_P(t)$, $y_P(t)$ e della curva durante il suo “tracciamento”.



Resta ancora aperta, e potrebbe indicare un seguito al presente articolo, la ricerca di giustificazioni rigorose ad alcune delle affermazioni fatte come ad esempio la distinzione tra quadronee chiuse ed aperte, oppure la costruzione tramite combinazioni di funzioni analitiche note di nuove curve da studiare tramite rappresentazione parametrica.

10. Bibliografia e sitografia

- Luciano Cresci, *Le curve matematiche. Tra curiosità e divertimento.* Hoepli editore
- http://it.wikipedia.org/wiki/Rodonea
- Guido Grandi, *I fiori geometrici*, Google eBook