Una dimostrazione alternativa
per il problema della scacchiera mutilata

ALESSIA VASTOLA
DAVIDE CANEPA
ELEONORA GUERRA
FEDERICO CORALLO
FIAMMA FLAVIA PAOLUCCI
GIORGIA CASTELLAN
GIOVANNI MARIA PASQUARELLI
LUCA ARGIRO'
LUCREZIA GERMANO
SARA MATRICARDI

Abstract

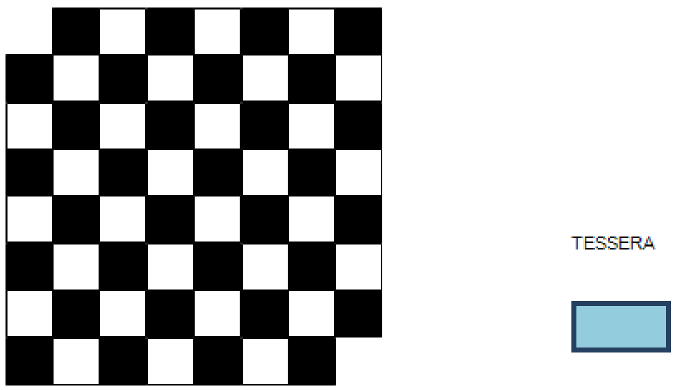
Il problema di matematica ricreativa della "scacchiera mutilata" viene trattato in letteratura con un ben nota argomentazione che fa uso della colorazione delle caselle [1]. In questo lavoro si illustra una dimostrazione alternativa che utilizza procedure costruttive, mettendo in luce alcune proprietà delle tassellazioni tramite bimini.

1.Introduzione

1.1 Il problema della scacchiera mutilata

Come è noto il problema di matematica ricreativa soprannominato 'il problema della scacchiera mutilata' nasce dalla domanda:

"se si eliminano le due caselle bianche poste ai vertici di una scacchiera 8×8 è possibile ricoprire esattamente senza sovrapposizioni la superficie restante con 31 tessere del domino di dimensioni 1 e 2 volte il lato di una casella?"



La risposta è no e lo si può provare con il seguente ragionamento [1].

Si parte dalla considerazione ovvia che ogni tessera posta sulla scacchiera copre sempre una casella nera e una casella bianca; ne segue che dopo aver utilizzato le prime 30 tessere sono state coperte 30 caselle nere e 30 caselle bianche: restano scoperte due caselle entrambe di colore nero (e quindi non adiacenti) che l'ultima tesserina non potrà mai ricoprire!

Con il medesimo ragionamento si prova che il problema non ha soluzione anche nel caso la scacchiera abbia un numero di righe e di colonne $2n\times2n$; vale cioè il seguente teorema.

Teorema della scacchiera mutilata

Se si eliminano le due caselle bianche poste ai vertici di una scacchiera $2n\times2n$non è possibile ricoprire esattamente senza sovrapposizioni la superficie restante con tessere del domino di dimensioni 1 e 2 volte il lato di una casella.

In questo lavoro si illustrerà una dimostrazione alternativa di questo teorema che <u>evita il ricorso alla colorazione</u>, mettendo in luce alcune interessanti proprietà delle "tassellazioni con bimini".

2. Tassellazioni con bimini

2.1 Bimino

Scelta una unità di misura, si dice "bimino" un rettangolo avente i lati di lunghezza 1 e 2.

Es:

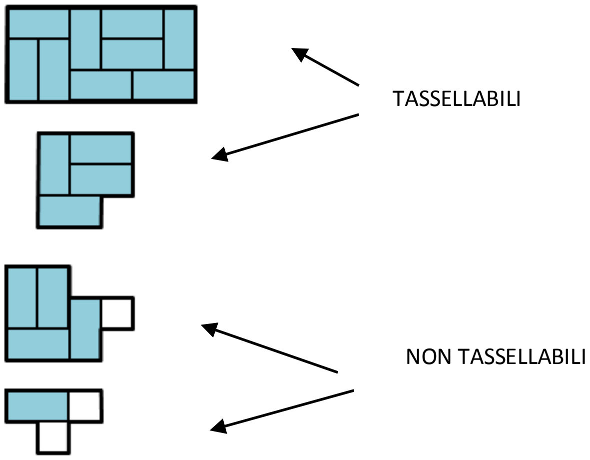
Analogamente diremo che un bimino è parallelo o perpendicolare ad un segmento se lo sono i suoi lati di lunghezza 2.

2.2 Tassellazione

Chiameremo "tassellazione" di un poligono P un suo ricoprimento di bimini ottenuta senza sovrapposizioni e senza uscire dal bordo di P.

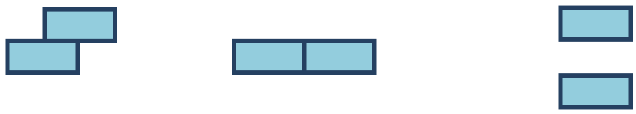
Diremo "tassellabile" ogni poligono che ammette una tassellazione

Es:



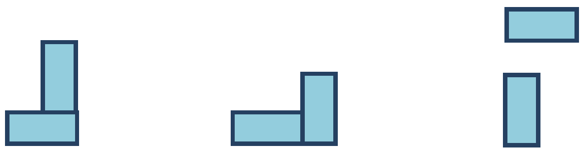
Due bimini si dicono “paralleli” se hanno i lati di lunghezza 2 paralleli

Es:



Due bimini si dicono “perpendicolari “ se hanno i lati di lunghezza 2 perpendicolari

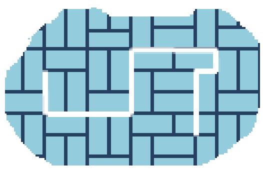
Es:



2.3 Taglio

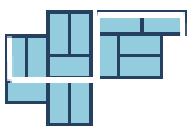
Si dice “taglio” di una tassellazione ogni spezzata che interseca i bimini <u>solo</u> lungo i loro bordi.

Es:



<u>Osservazione</u>: un taglio può contenere tratti del bordo del poligono tassellato

Es:

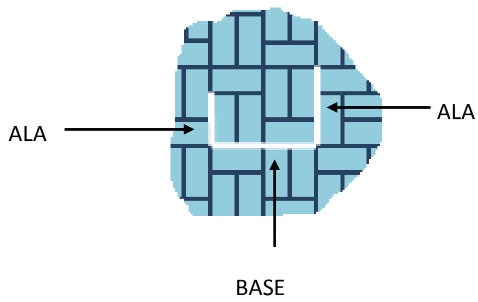


2.4 Graffetta

Si dicono “graffette” tutti i tagli che a meno di rotazioni o ribaltamenti hanno una forma ad “U”.

In ogni graffetta chiameremo “ali” i due segmenti iniziale e finale, e “base” il segmento intermedio .

Es:

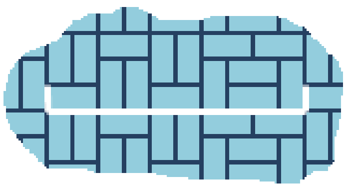


Indicheremo con G(l,m,n) una graffetta di ali di lunghezza l e n e base di lunghezza m.

2.5 Graffetta pari

Si dice graffetta pari una graffetta G (l,m,n) tale che m sia pari e l = n = 1.

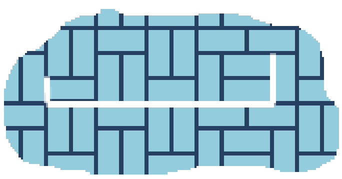
Es:



2.6 Graffetta dispari

Si dice graffetta dispari una graffetta G (l,m,n) tale che m sia dispari e l = 2, n = 1 o viceversa l = 1, n= 2.

Es:

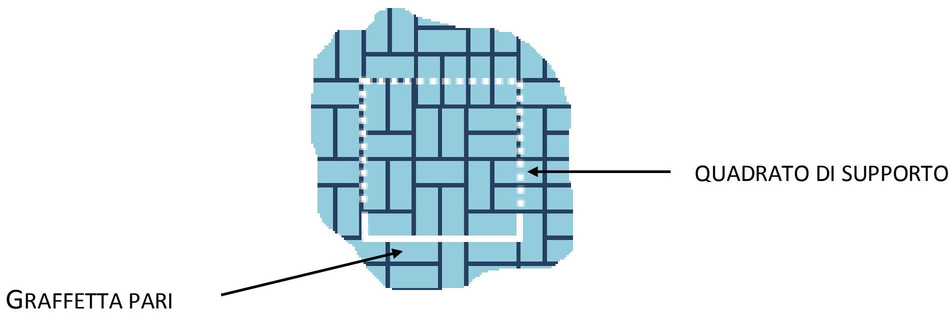


2.8 Quadrato di supporto.

Ogni graffetta pari o dispari, determina un quadrato Q che ha come lato la base della graffetta.

Chiameremo Q "quadrato di supporto" della graffetta.

Es:



3. Proprietà delle graffette

3.1 Lemma delle graffette pari

Data una tassellazione **T** e una graffetta pari G(1,2n,1) con quadrato di supporto interno al poligono tassellato, esiste sempre una tassellazione **T'** tale che:

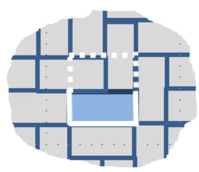
- **T** e **T'** coincidono al di fuori del quadrato di supporto;
- I bimini che toccano la base della graffetta sono tutti paralleli ad essa

DIMOSTRAZIONE (per induzione su n)

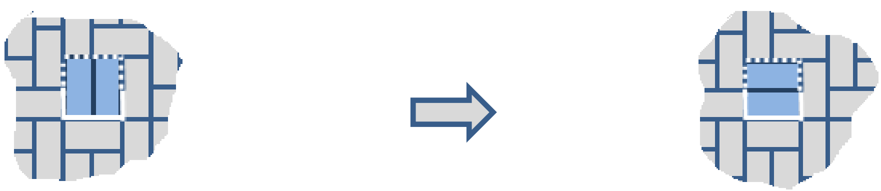
<u>Passo base</u>: n=1, consideriamo una graffette G(1,2·1,1)

Sono possibili due casi:

1° caso: il bimino a contatto con la base è già parallelo

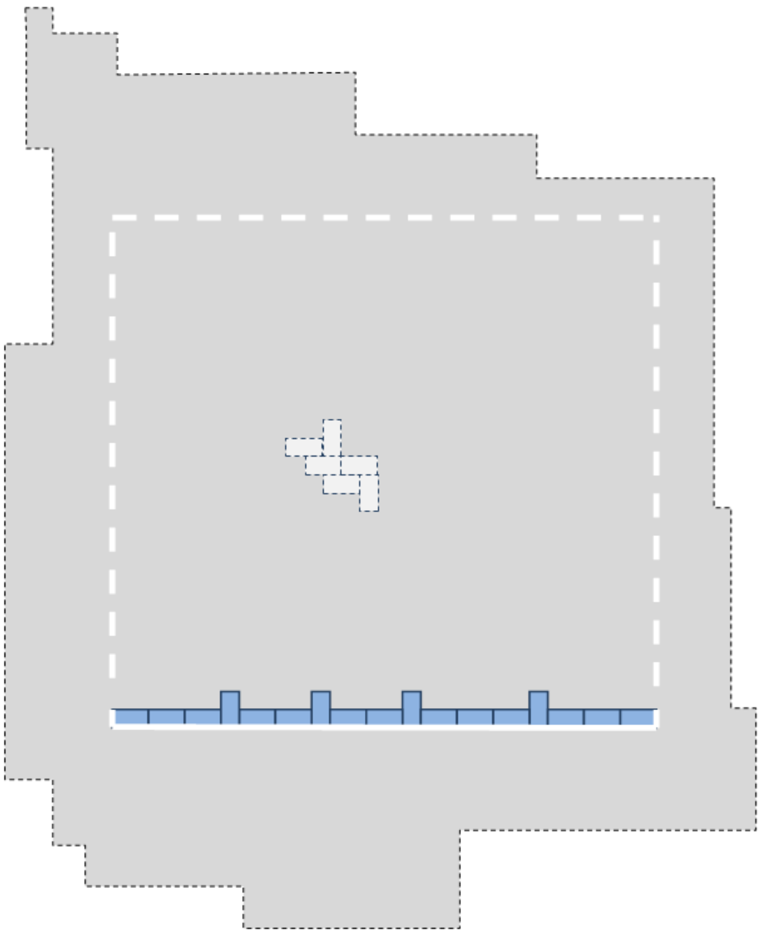


2° caso: i bimini a contatto con la base sono perpendicolari. I due bimini possono essere riposizionati (si noti che vengono coinvolti solo i bimini nel quadrato di supporto)

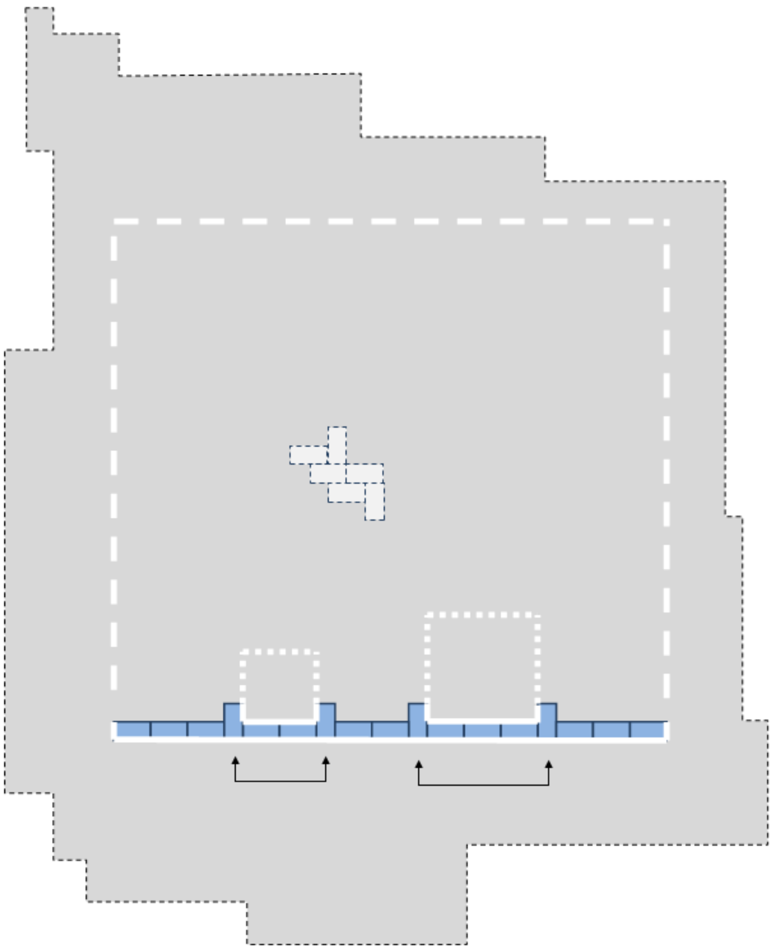


<u>Passo induttivo</u>: consideriamo una graffetta pari G(1,2n,1).

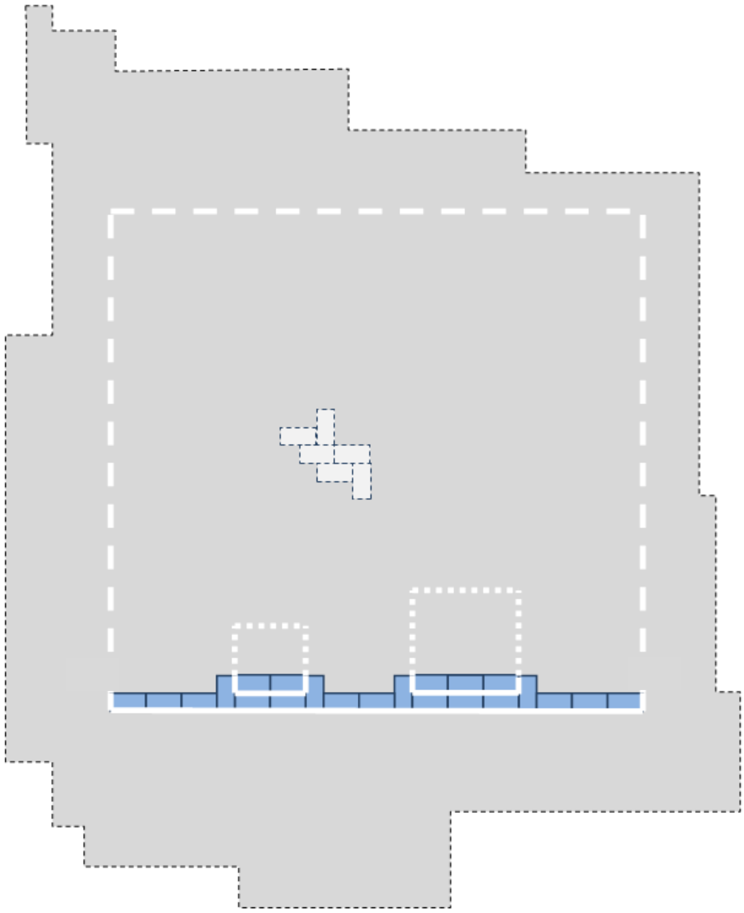
La base della graffetta è a contatto con un numero (pari o dispari) di bimini paralleli alla base con un numero pari di bimini perpendicolari .



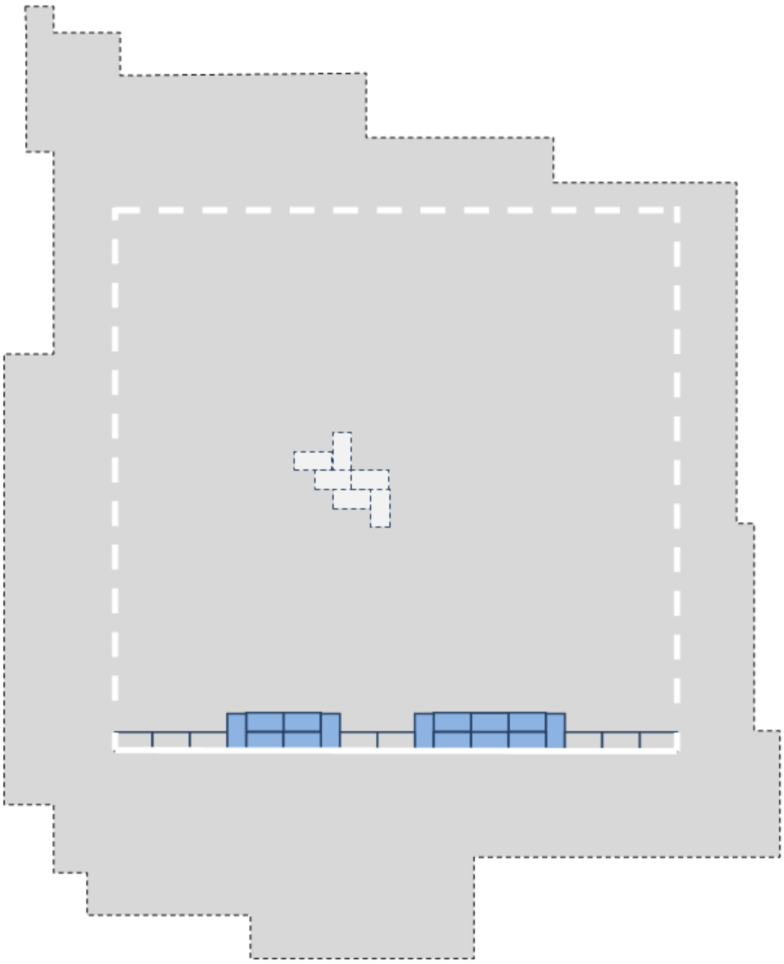
Divisi i bimini perpendicolari in coppie separate solo da bimini paralleli, si nota che le coppie determinano graffette pari G(1,2p,1)   con p < n



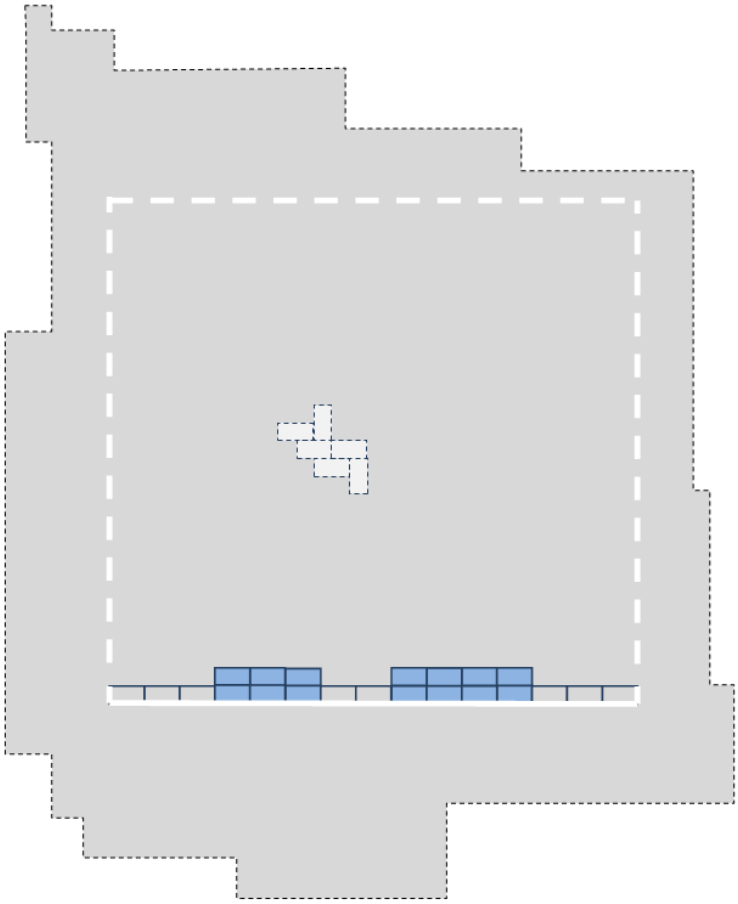
Applicando più volte l'ipotesi induttiva si può dunque ottenere una nuova tassellazione nella quale i bimini a contatto con le basi delle graffette sono tutti paralleli ad esse. Osserviamo che essendo i quadrati di supporto tutti separati, le operazioni di riposizionamento dei bimini non interferiscono tra loro e non coinvolgono bimini al di fuori del quadrato di supporto G(1,2n,1) (si muovono solo i bimini che si trovano all'interno dei vari quadrati di supporto, tutti contenuti nel quadrato di supporto di G(1,2n,1)).



Si ottiene così un certo numero di rettangoli $2(p+1)\times 2$ formati da due file di bimini paralleli chiusi tra due bimini perpendicolari.



Riposizionando i bimini in ogni rettangolo in file di bimini paralleli, si ottiene infine una tassellazione nella quale tutti i bimini a contatto della base della graffetta G(1,2n,1)sono paralleli alla base stessa.



Q.e.d

3.2 Osservazione

L'ipotesi che il quadrato di supporto sia interno al poligono tassellato è necessaria, come si vede banalmente nel seguente controesempio nel quale la graffetta pari corre lungo il bordo.

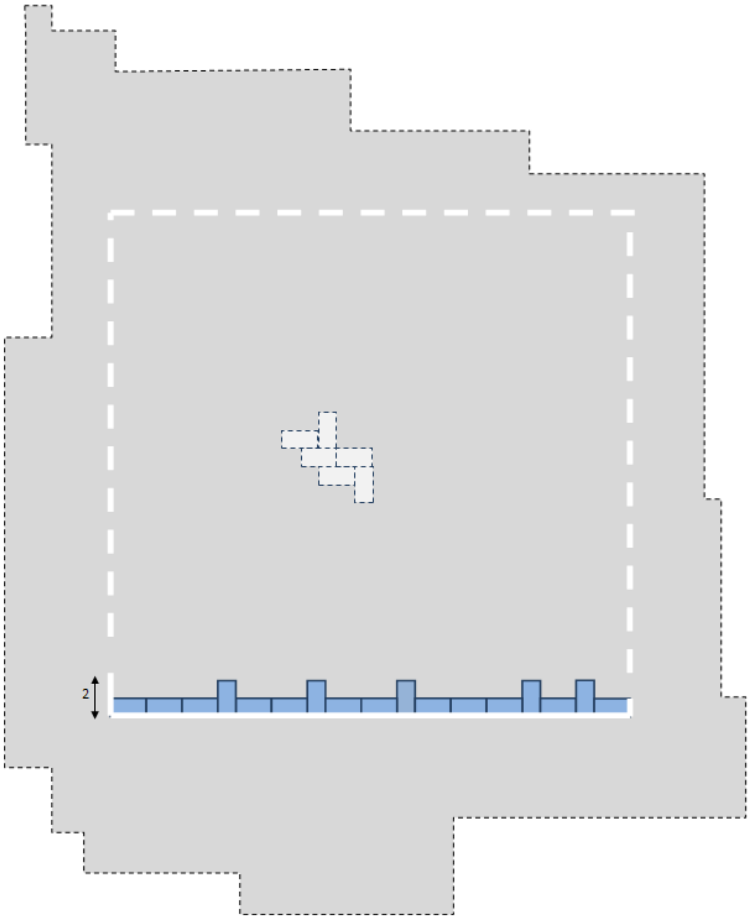
3.3 Lemma delle graffette dispari

Data una tassellazione **T** e una graffetta dispari G(1,2n+1,2) con quadrato di supporto interno al poligono tassellato, esiste sempre una tassellazione **T'** tale che:

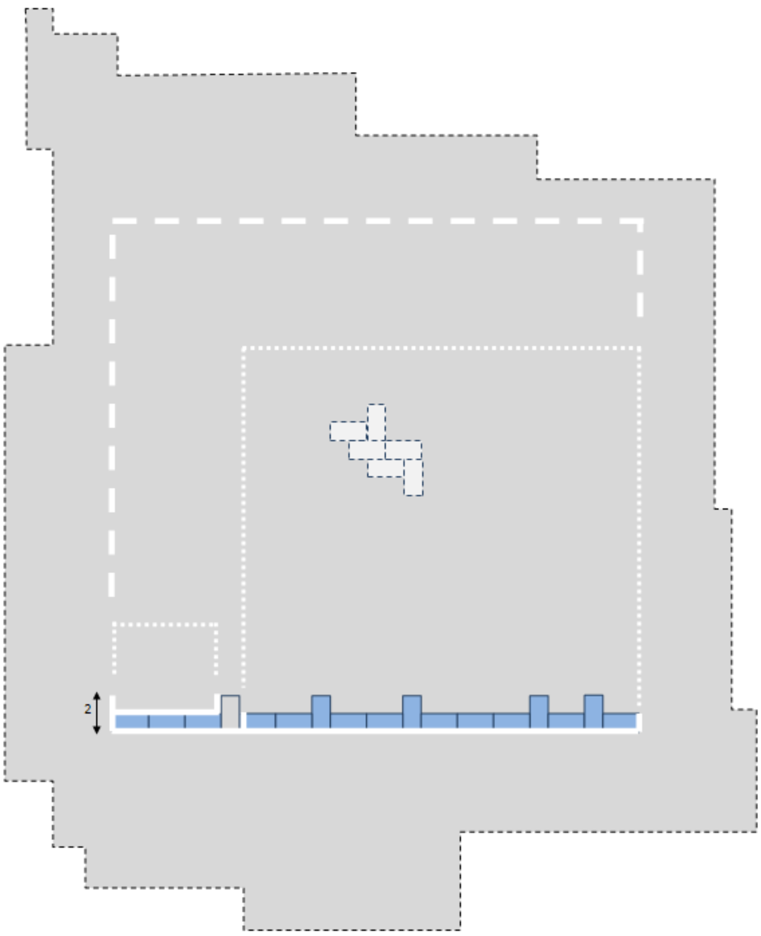
- **T** e **T'** coincidono al di fuori del supporto *Q* ;
- I bimini che toccano la base la base della graffetta sono tutti paralleli ad essa eccetto un bimino perpendicolare che confina con l'ala di lunghezza 2.

DIMOSTRAZIONE

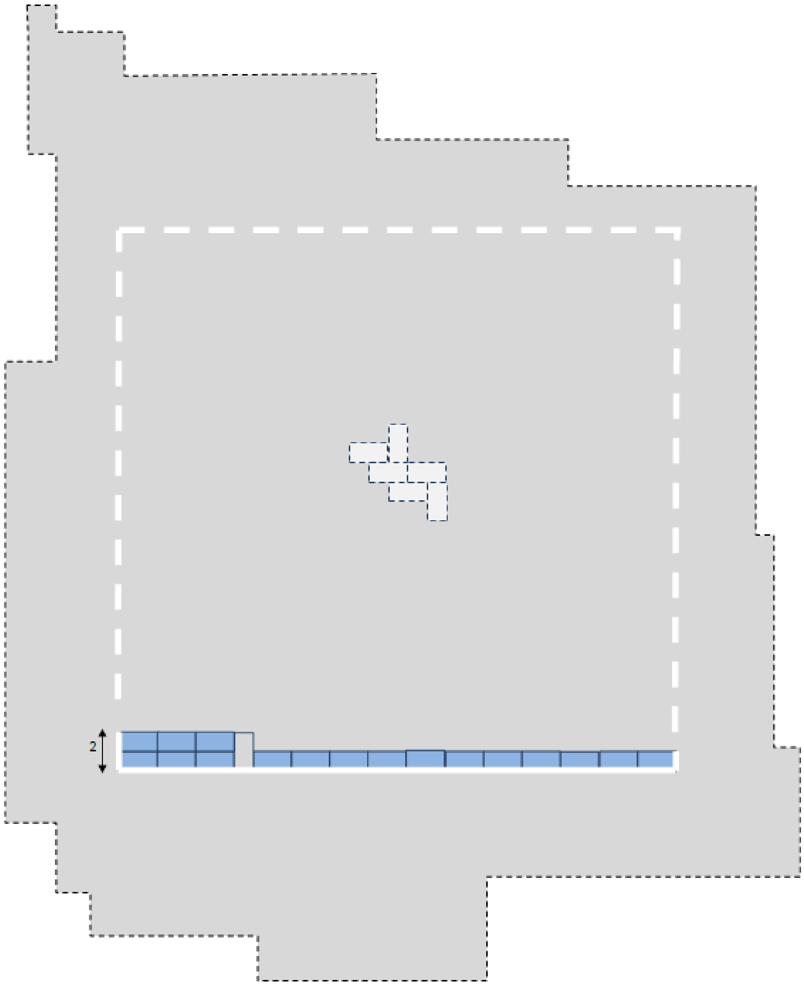
Consideriamo una graffetta dispari G(1,2n+1,1). La base della graffetta è a contatto con un numero (pari o dispari) di bimini paralleli alla base e con un numero dispari di bimini perpendicolari .



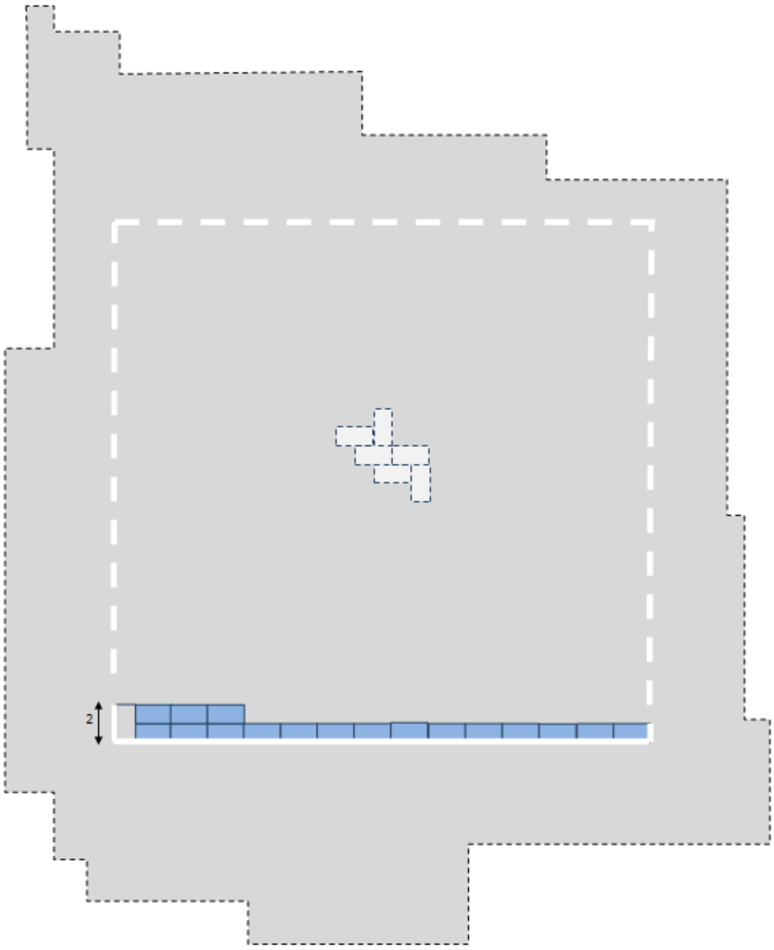
Restano così determinate due graffette pari: una tra il lato di lunghezza 2 e il bimino perpendicolare più vicino, e una tra questo e l’ala di lunghezza 1.



Applicando due volte il lemma 3.1, operando all'interno del quadrato di supporto, si ottiene una tassellazione nella quale tutti i bimini a contatto della base della graffetta G(1,2n,1)sono paralleli eccetto il bimino perpendicolare più vicino all'ala di lunghezza 2 , che risulta separata da questo tramite un rettangolo formato da due file di bimini paralleli.



A questo possiamo traslare il rettangolo e posizionare il bimino perpendicolare a contatto con l'ala di lunghezza 2.

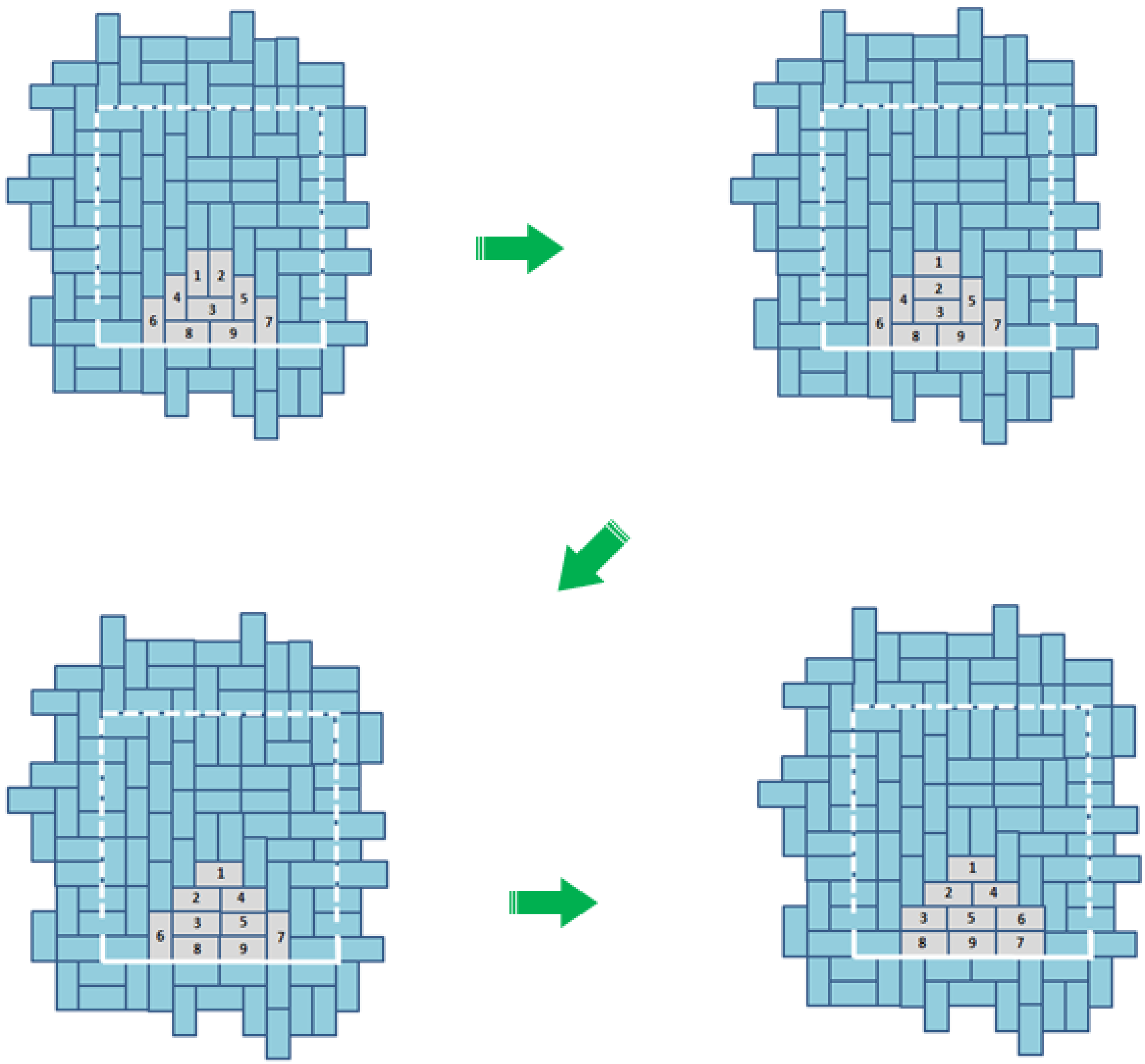


Q.e.d

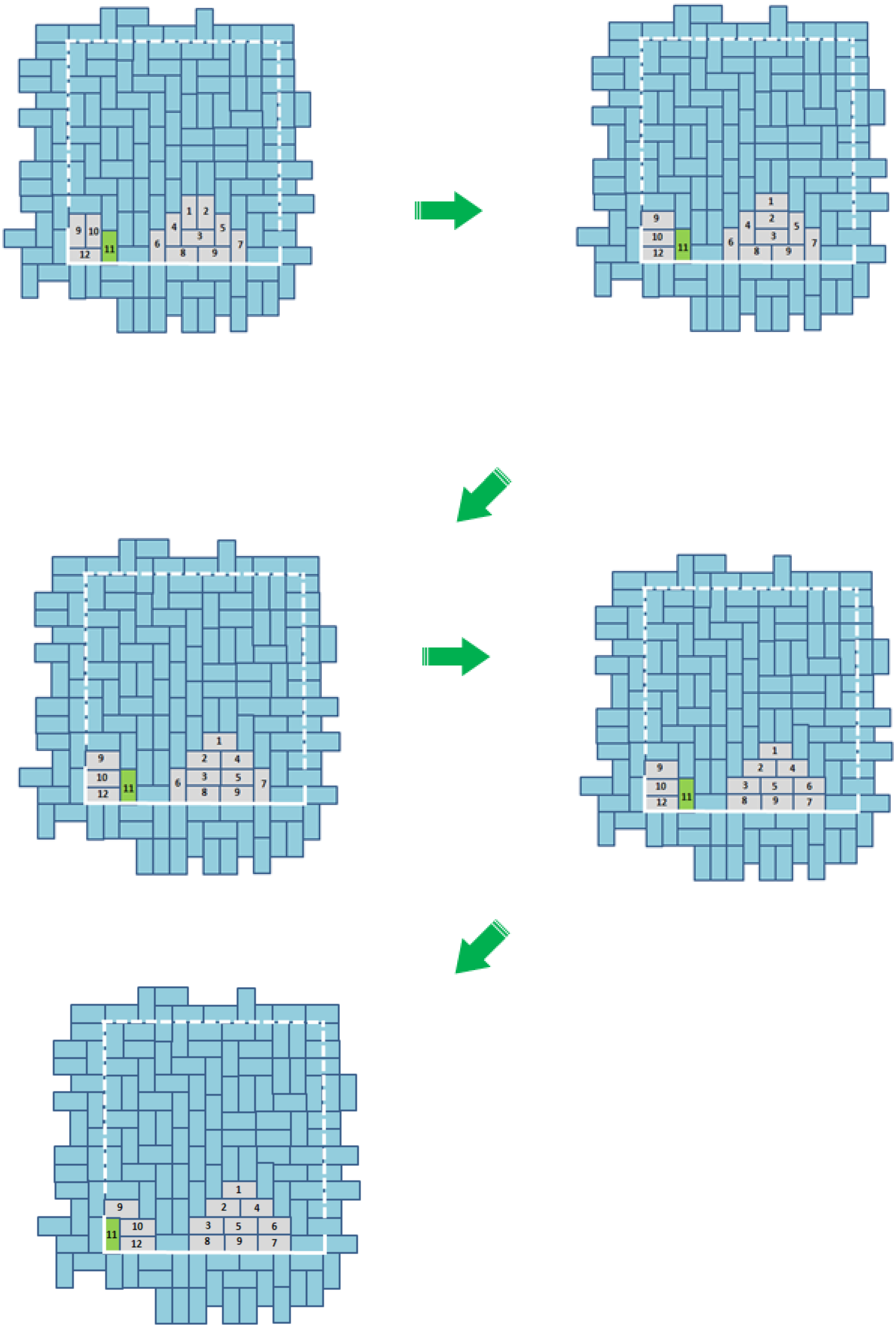
3.4 Esempi di riposizionamento dei bimini

I due lemmi 3.1 e 3.2 indicano delle procedure “ricorsive” di riposizionamento dei bimini che illustriamo con due esempi nei quali abbiamo evidenziato i bimini che vanno riposizionati

Graffetta pari



Graffetta dispari



4. Teorema della scacchiera mutilata

Siamo ora in grado di dare una dimostrazione alternativa per il problema della scacchiera mutilata.

La dimostrazione sarà fatta per induzione sulla dimensione della scacchiera. La chiave della dimostrazione sarà mostrare, tramite i lemmi 3.1 e 3.3, come dall'esistenza di una tassellazione di una scacchiera mutilata di lato 2(n+1) si deduca l'esistenza di una tassellazione di una scacchiera mutilata di lato 2n.

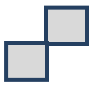
4.1 Teorema

Per ogni $n \in N$ con $n \geq 1$ la scacchiera mutilata di lato 2n non è tassellabile

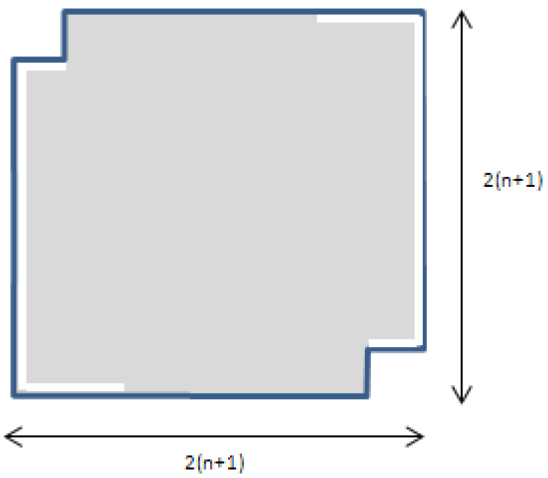
<u>Dimostrazione (per induzione su n)</u>

<u>Passo base</u>: n=1

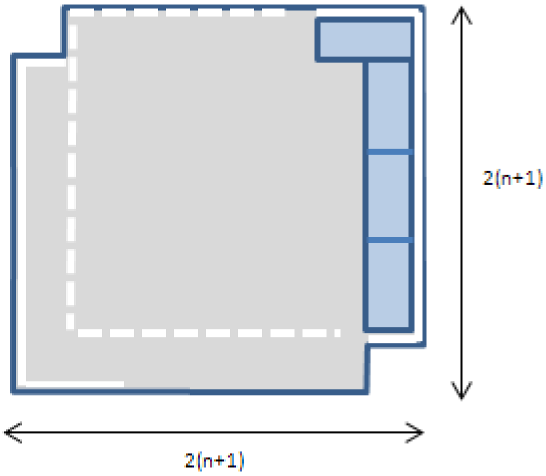
La scacchiera mutilata di lato 2 è composta di 2 soli caselle unite in un solo vertice che banalmente non può essere tassellata



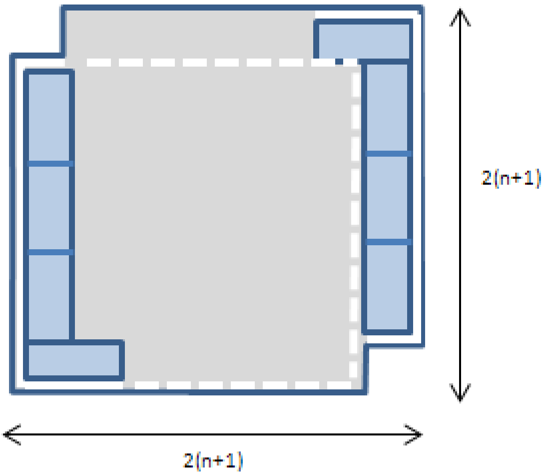
<u>Passo induttivo</u>: $n \to n+1$



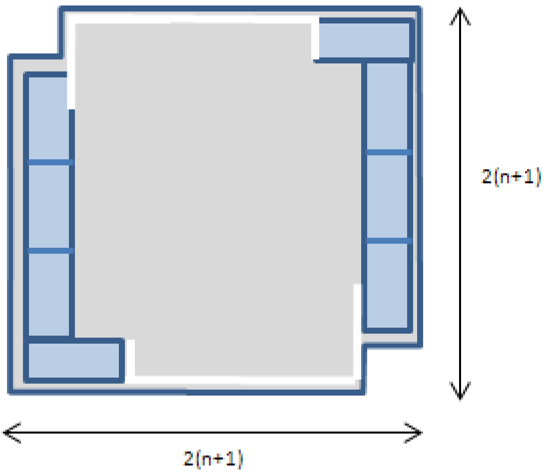
Supponiamo per assurdo che la scacchiera mutilata di lato 2(n+1) sia tassellabile. Consideriamo allora le due graffette dispari aventi come basi due lati opposti del quadrato mutilato e come ali di lato 2 una parte degli altri due lati della scacchiera.



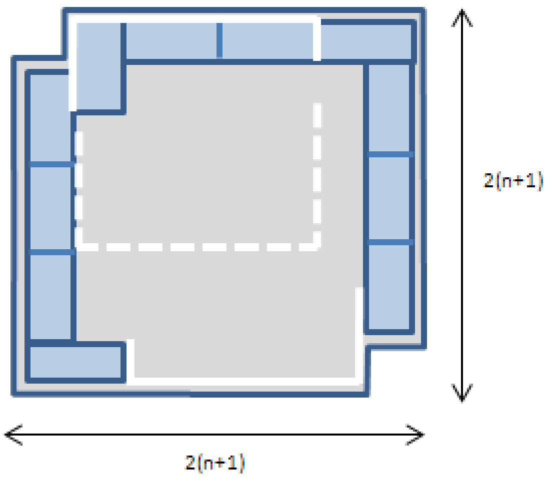
Applicando due volte il lemma 3.3 è possibile trasformare la tassellazione di partenza in una nella quale le basi delle graffette sono a contatto solo con bimini paralleli, eccetto due bimini perpendicolari che occupano le caselle della scacchiera non eliminate.



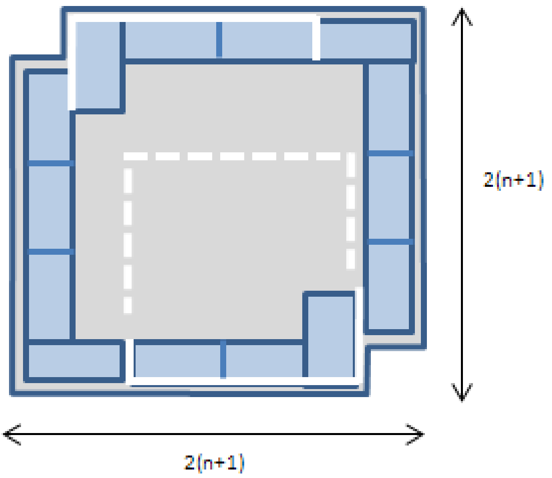
Osserviamo che la seconda applicazione del lemma non influenza i bimini a contatto con la base della prima graffetta perché questi sono al di fuori del quadrato di supporto della seconda.

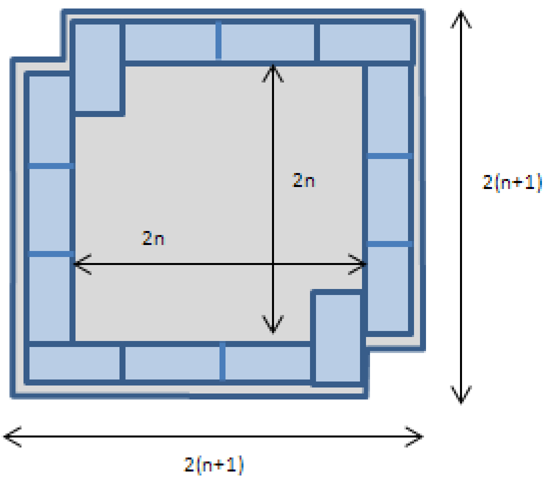


Restano ora determinate altre due graffette dispari che hanno le basi sugli altri due lati opposti della scacchiera, e le ali di lunghezza 2 confinanti con le caselle eliminate. Possiamo dunque applicare di nuovo il lemma 3.3



Anche in questo caso la posizione e le dimensioni dei quadrati di supporto permettono di riposizionare i bimini di una graffetta senza coinvolgere quelli già riposizionati.





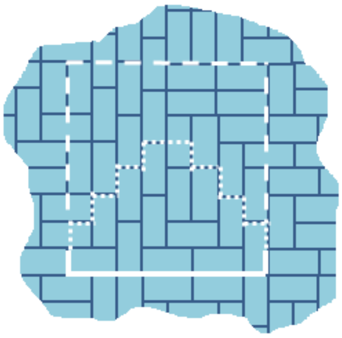
Si ottiene così alla fine una cornice di bimini all'interno della quale è presente una tassellazione di una scacchiera mutilata di lato 2n; ma questo, per ipotesi induttiva, è assurdo.

Q.e.d

5. Conclusioni e problemi aperti.

Lo studio effettuato nel presente lavoro avevo lo scopo principale di trovare una dimostrazione “alternativa” al problema della scacchiera mutilata. I risultati trovati lungo la strada hanno però messo in luce alcuni aspetti interessanti delle tassellazioni con bimini. In particolare abbiamo visto come sia possibile con procedure “ricorsive” riposizionare alcuni bimini senza alterare tutta una tassellazione; procedure che potrebbero essere studiate in maniera più approfondita.

E’ possibile ad esempio provare un risultato più forte di quello stabilito nel lemma 3.1. Infatti si dimostra che in realtà i bimini da riposizionare sono tutti all’interno di una struttura piramidale a sua volta contenuta nel quadrato di supporto.



6. Bibliografia e sitografia

[1] Martin Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, Vol. 1, Sansoni, Firenze 1972.

[2] Martin Gardner , *Dracula, Platone e Darwin, Giochi matematici e riflessioni sul mondo,* Zanichelli 2010.

[3] http://www.matefilia.it/scolerivolftp/lettori/aprile03/scacchiera_mutilata.PDF