Un problema di convergenza di tipo Collatz

ALESSANDRO CASINI
AMANDA PISELLI
CHIARA CEROCCHI
ELISABETTA AVIZZANO
EMANUELE DI CARO
GIORGIO CICCARELLA
IVAN COLAVITA
NICOLETTA CAPOTORTO
SERENA NUNZIATA

Abstract

Nel presente lavoro si studia una variante della successione di Collatz per la quale si riesce a provare un teorema di convergenza a 1. Si riesce inoltre a stabilire per ogni n il numero di passi necessari per raggiungere il valore 1. Vengono studiati inizialmente i numeri che rappresentano potenze di 2 e i loro predecessori, poi, tramite la notazione binaria si ottiene un risultato che vale per tutti gli altri numeri.

0.Introduzione: Il problema di Collatz

A partire da un numero naturale assegnato, m, che chiameremo seme, costruiamone un altro con la seguente regola:

Se m è pari dividiamolo per due, se invece è dispari moltiplichiamolo per tre e sommiamo uno.

Applicando ripetutamente la regola si ottiene una sequenza di numeri. Partendo, per esempio, col numero m =6, si ottiene 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Congettura di Collatz

Partendo da un qualsiasi numero naturale come seme la successione dei valori generati in questo modo arriva sempre, in un numero finito di passi, a uno.

Partendo, per esempio, col numero m =6, la sequenza per arrivare a 1 prende 8 passi 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, con m=11 ci vogliono 14 passi, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 e per m=27 ci vogliono ben 111 passi prima di arrivare ad 1, toccando numeri al di sopra di 9000

Lothar Collatz ha formulato questa congettura nel 1937 ma, da allora, nessuno è stato ancora in grado di dimostrarla o di fornire un controesempio, ovvero un numero naturale per il quale la successione non prende mai il valore uno.
Nel caso in cui esistesse un numero n che non arriva mai ad 1, perché entra in un loop non contenente 1 o perché cresce senza limite, allora la congettura di Collatz risulterebbe falsa.

La congettura, tramite l'utilizzo massiccio dei computer, è stata provata essere vera fino a 2.88×1018. Anche se questo numero è molto grande, non significa che la congettura è vera. Ci sono state altre congetture che si sono dimostrate false solo per valori veramente grandi.

1.1 La funzione di Collatz

Consideriamo la seguente funzione: f: N →N , dove N={1,2,3,4,….}

$$f(m) = \begin{cases} \dfrac{m}{2} & \text{se } m \text{ è pari} \\ 3m+1 & \text{se } m \text{ è dispari} \end{cases}$$

1.2 Orbite e voli

- Dato $m \in N$ indichiamo con O(m) e chiamiamo "orbita" di m la successione

  $O(m)=(a_0 , a_1 ,a_2 ,a_3 , …..)$

  definita ricorsivamente nel seguente modo:

  $a_0 = m$

  $a_{n+1} = f(a_n)$

Esempio:

O(3)= (3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1,4, 2, 1,4, 2, 1,4, 2, 1,….)

- Indichiamo con V(m) e chiamiamo "volo" di m:

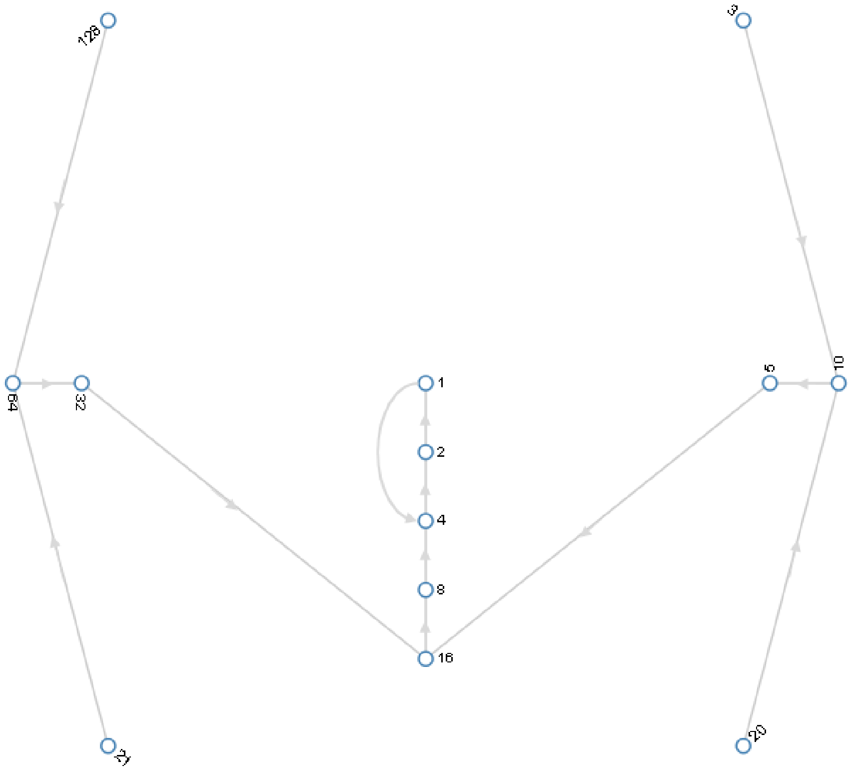
  Il più piccolo k tale che $a_k = 1$

Il volo di m indica quante volte, al minimo, occorre applicare f ad m per ottenere 1.

Esempio: V(3) = 7

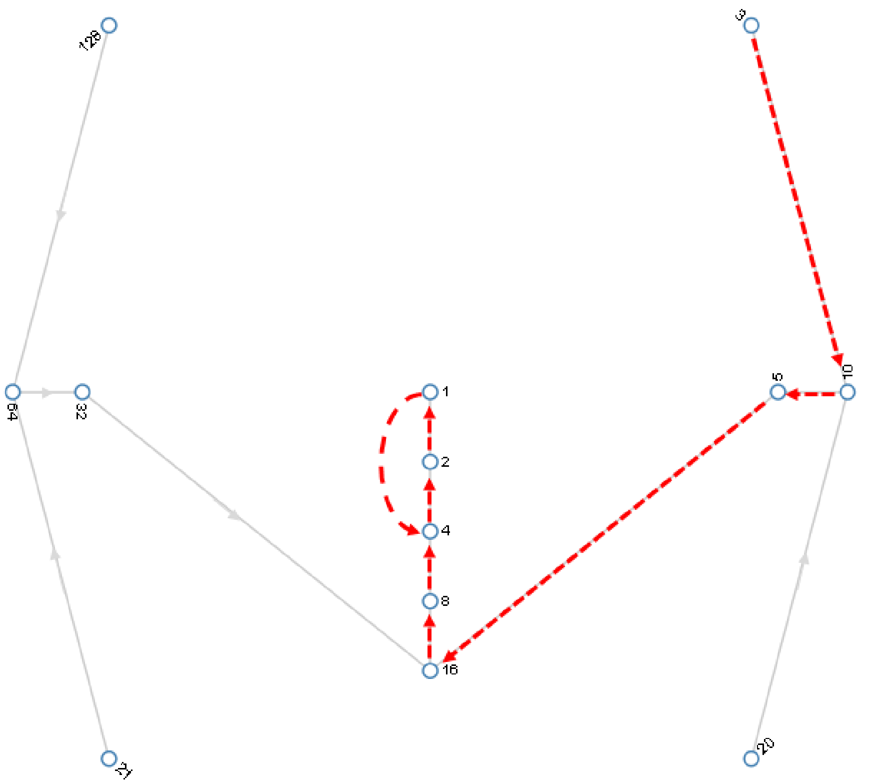
1.3 Grafo della funzione di Collatz

La funzione di Collatz può essere efficacemente rappresentata da un grafo orientato che ha N come insieme dei nodi e un arco orientato tra due numeri m e m' , se f(m)=m'.



SONO RIPORTATI I NODI N CON V(N) ≤ 8 .

L'orbita di un numero n è rappresentato dal cammino orientato che parte dal nodo. Nell'esempio seguente abbiamo evidenziato l'orbita di 3.



1.4 Congettura di Collatz (convergenza)

Per ogni $m \in N$,

$1 \in O(m)$

Cioè per ogni $m \in N$, applicando la funzione di Collatz un numero finito di volte, si ottiene sempre 1,

o in maniera equivalente:

per ogni $m \in N$

$$V(m) \text{ è finito}$$

2. La variante easy-Collatz

Argomento del presente lavoro è una variante "più trattabile" del problema di Collatz. Si parte anche in questo caso dalla definizione di una funzione : $f: N \rightarrow N$ per casi.

2.1 La funzione easy-Collatz

Consideriamo la seguente funzione: $f: N \rightarrow N$, dove N={1,2,3,4,....}

$$f(m) = \begin{cases} \dfrac{m}{2} & \text{se } m \text{ è pari} \\ m+1 & \text{se } m \text{ è dispari} \end{cases}$$

Essendo il dominio N={1,2,3,4,....} , per ogni $m \in N$ si ha $f(m) > 0$.

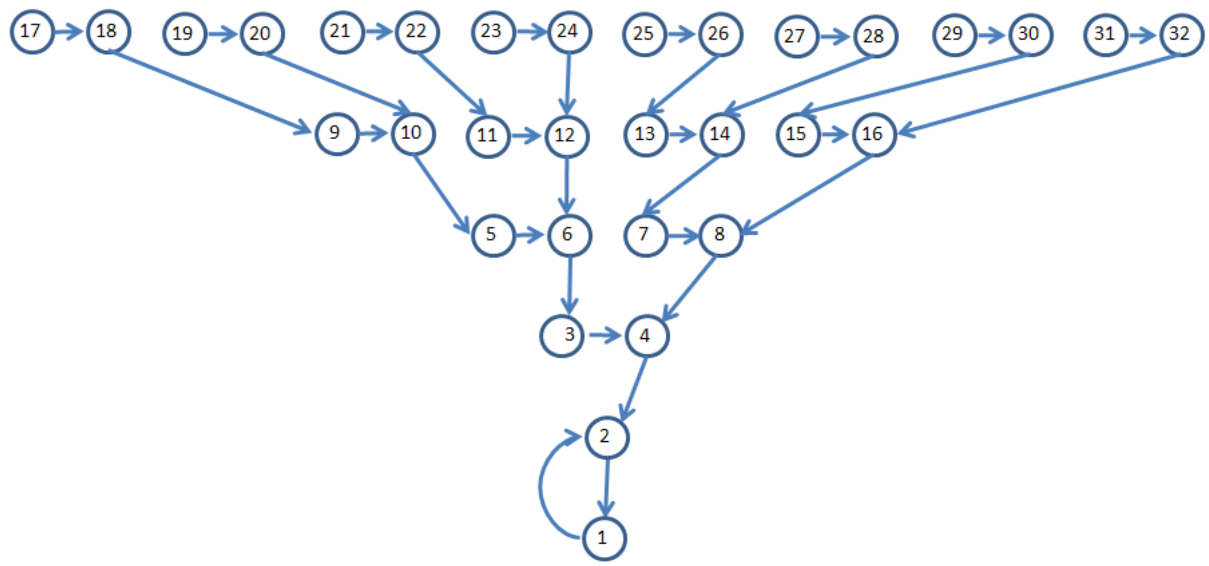
2.2 Orbite, voli, grafo

Indicheremo con O(m) l'orbita di m determinata dalla funzione easy-Collatz.

Esempio: O(28)=(28, 14, 7, 8, 4, 2, 1, 2, 1, 2, 1, …)

Come già visto per la funzione di Collatz (vedi 1.3) è possibile definire il grafo della funzione easy-Collatz

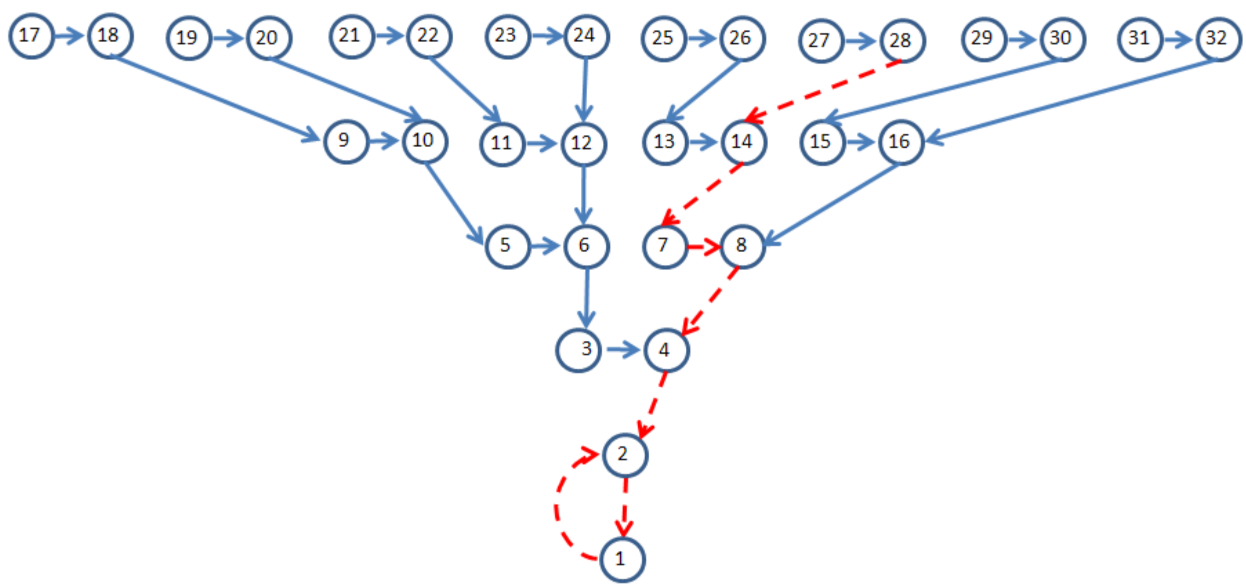
....



SONO RIPORTATI I NODI N CON V(N) ≤ 9.

Nel grafo sottostante abbiamo evidenziato l'orbita di 28 : O(28)=(28, 14, 7, 8, 4, 2, 1, 2, 1, 2, 1, …)

....



3.Convergenza

Proveremo che, a partire da ogni m, dopo un numero finito di passi si arriva sempre a 1, ovvero “la convergenza” della funzione easy-Collatz. Questo può essere formulato come già visto per la funzione di Collatz (vedi 1.4) in termini di orbite e di voli.

3.1 Lemma (“Doppio passo”)

Considerata per ogni m l’orbita O(m)=(a_0 , a_1 ,a_2 ,a_3 , …..)

per ogni n= 0, 1, 2, 3, … se $a_n>2$ allora $a_n > a_{n+2}$

DIMOSTRAZIONE

1° caso: $a_n > 2$ e pari. Ne segue che:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$$

sottocaso A) $\frac{a_n}{2}$ pari. Ne segue che:

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{4} \quad \text{e quindi} \quad a_n > \frac{a_n}{4} = a_{n+2}$$

sottocaso B) $\frac{a_n}{2}$ dispari. Ne segue che:

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{2} + 1 \quad \text{ed essendo } a_n>2 \text{ si ha:}$$

$$a_n = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} > \frac{a_n}{2} + 1 = a_{n+2}$$

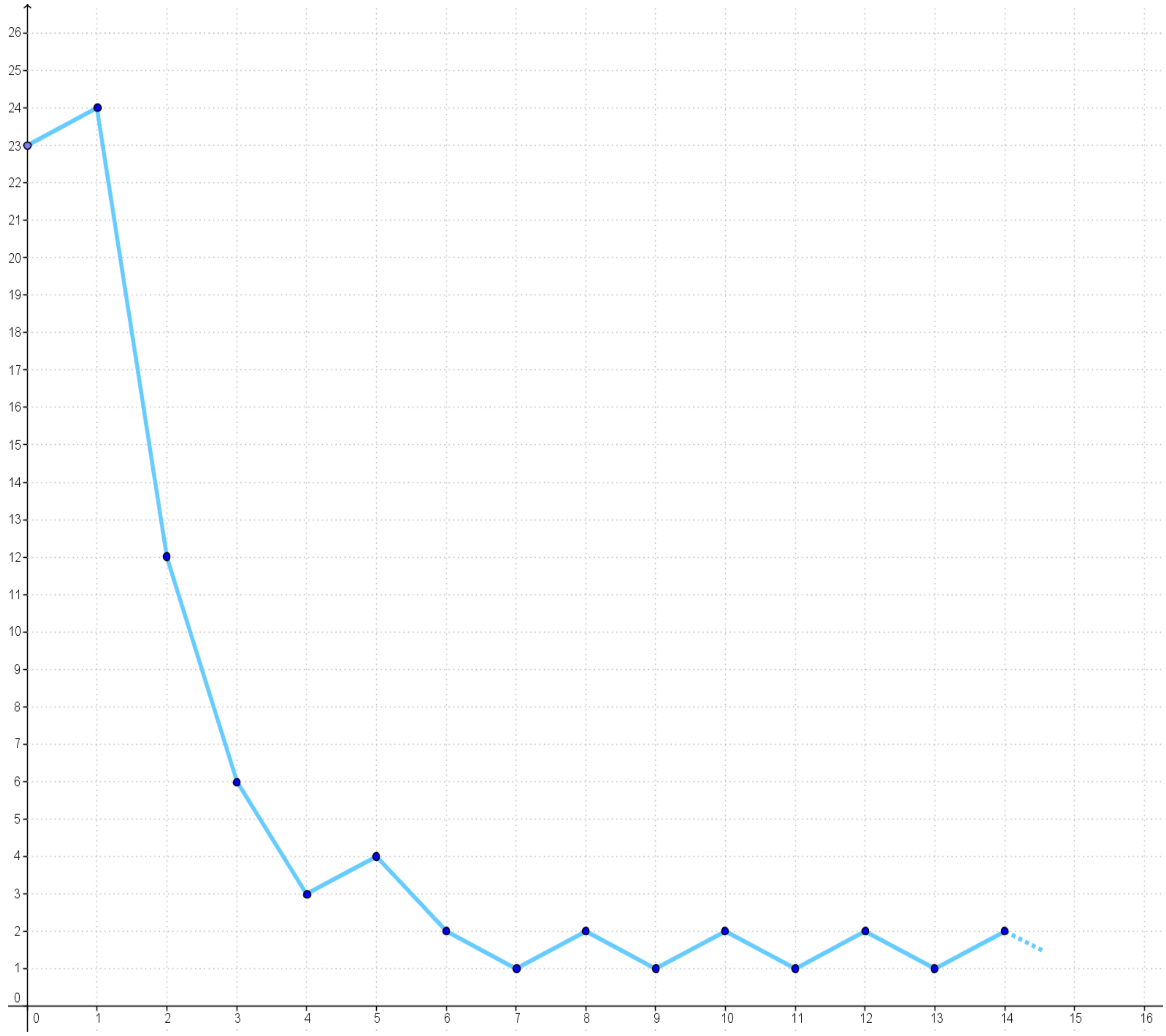
2° caso: $a_n > 2$ e dispari. Ne segue che:

$$a_{n+1} = a_n + 1 \quad \text{e} \quad a_{n+2} = \frac{a_n + 1}{2} \quad \text{ed essendo } a_n>2 \text{ si ha:}$$

$$a_n = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} > \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{a_n + 1}{2} = a_{n+2}$$

□

Illustriamo il lemma del “doppio passo” rappresentando l’orbita del numero 23 in un diagramma cartesiano che riporta sull’asse delle ascisse i passi di applicazione della funzione easy-Collatz e su quello delle ordinate i valori che si ottengono:



3.1 Teorema (“Convergenza”)

Per ogni $m \in N$, $1 \in O(m)$

DIMOSTRAZIONE (principio della catena discendente infinita)

Supponiamo per assurdo che $1 \notin O(m)$, ne segue che $2 \notin O(m)$ (altrimenti: $O(m)= (m, \ldots, 2, 1, 2, 1, \ldots)$ quindi $\forall$ n $a_n>2$.

Per il lemma 3.1 è allora possibile costruire una catena discendente infinita di numeri naturali:

$a_0 > a_2 > a_4 > a_6 , \ldots$ ↯ , e ciò è assurdo.

$\square$

4.Calcolo del volo

Dopo aver dimostrato la convergenza ora ci occuperemo del calcolo per ogni m del suo volo V(m)

4.1 Volo dei numeri della forma: 2^n , 2^n-1 , 2^n+1

Le potenze del 2, i loro predecessori e i loro successivi giocano un ruolo importante nella successione easy -Collatz, come risulta dai seguenti risultati.

4.1 Notazione

$POT(2) = \{ 2^n \mid n \in N \}$

$POT(2)-1 = \{ 2^n - 1 \mid n \in N \}$

$POT(2)+1 = \{ 2^n + 1 \mid n \in N \}$

4.2 Proposizione

Per ogni $m \in POT(2)$ tale che $m= 2^n$

$$V(m) = n$$

DIMOSTRAZIONE (per induzione)

<u>Passo base</u>: n=1

$O(2^1)=(2, 1)$ quindi $V(2^1)=1$

<u>Passo induttivo</u>: $n \to n+1$

$O(2^{n+1})= (2^{n+1},2^n,....)$ quindi $V(2^{n+1})=V(2^n) + 1$, e per ipotesi induttiva:

$V(2^{n+1})=V(2^n) + 1=n+1$

□

4.3 Proposizione

Per ogni $m \in POT(2)-1$ tale che $m= 2^n-1$

$$V(m) = n+1$$

DIMOSTRAZIONE

$O(2^n - 1) = (2^n - 1, 2^n, \ldots)$

$V(m) = v(2^n) +1$, e per la prop 4.2:

$V(m) = v(2^n) +1= n + 1$

□

4.4 Proposizione

Per ogni $m \in POT(2)+1$ tale che $m= 2^n+ 1$

$$V(m) = 2n+1$$

DIMOSTRAZIONE (per induzione)

Passo base: $n = 1$

$O(2^1+1) = (3, 4, 2, 1)$

$V(m) = 3 = 2 \cdot 1 + 1$

Passo induttivo: $n \rightarrow n+1$

$O(2^{n+1}+1) = (2^{n+1}+1, 2^{n+1}+2, 2^n+1, \ldots)$

$V(m) = V(2^n+1) + 2$, e per ipotesi induttiva:

$V(m) = V(2^n+1) + 2 = 2n + 1 + 2 = 2n + 3 = 2(n+1) + 1$

□

4.5 Volo di un generico numero m

Diamo infine per ogni generico m, un confine inferiore e uno superiore al suo volo V(m)

4.6 Proposizione

Per ogni m tale che $2^n + 1 \le m \le 2^{n+1}$ si ha:

$$n+1 \le V(m) \le 2n+1$$

DIMOSTRAZIONE (per induzione)

Passo base: n=1

Consideriamo i numeri m tali che $2^1 + 1 = 3 \le m \le 2^{1+1} = 4$, cioè $m=3$ oppure $m=4$.

$O(3) = (3, 4, 2, 1) \Rightarrow V(3) = 3 \Rightarrow 2 \le V(3) \le 3$

$O(4) = (4, 2, 1) \Rightarrow V(4) = 2 \Rightarrow 2 \le V(4) \le 3$

Passo induttivo: $n \to n+1$

Sia m tale che $2^{n+1} + 1 \le m \le 2^{n+1+1}$, cioè $2^{n+1} + 1 \le m \le 2^{n+2}$

Si possono presentare due casi.

1° caso: m pari. Si avrà:

$$O(m) = \left(m, \frac{m}{2}, \ldots\right)$$

inoltre

$$2^{n+1} + 1 \le m \le 2^{n+2} \Rightarrow \frac{2^{n+1}+1}{2} \le \frac{m}{2} \le \frac{2^{n+2}}{2} \Rightarrow 2^n + \frac{1}{2} \le \frac{m}{2} \le 2^{n+2}$$

ed essendo $\frac{m}{2}$ intero $\Rightarrow 2^n + 1 \le \frac{m}{2} \le \frac{2^{n+1}}{2}$

Ora

$V(m) = V\left(\frac{m}{2}\right) + 1$, e per ipotesi induttiva:

$n+1 \le V\left(\frac{m}{2}\right) \le 2n+1$

sommando 1 ad ogni termine della disuguaglianza si ottiene infine:

$$n+2 \le V\left(\frac{m}{2}\right) + 1 \le 2n+1+1 < 2n+3 \Rightarrow n+2 \le V(m) \le 2n+3$$

2° caso: m dispari. Si avrà:

$O(m) = \left(m, m+1, \frac{m+1}{2}, \ldots\right)$

inoltre

$2^{n+1} + 1 \le m \le 2^{n+2} \Rightarrow 2^{n+1}+2 \le m+1 \le 2^{n+2}+1 \Rightarrow 2^n + 1 \le \frac{m+1}{2} \le 2^{n+1} + \frac{1}{2}$

ed essendo $\frac{m+1}{2}$ intero $\Rightarrow 2^n + 1 \le \frac{m+1}{2} \le 2^{n+1}$

Ora

$V(m) = V\left(\frac{m+1}{2}\right) + 2$, e per ipotesi induttiva:

$n+1 \le V\left(\frac{m+1}{2}\right) \le 2n+1$

Sommando 2 ad ogni termine della disuguaglianza si ottiene infine:

$$n+3 \le V\left(\frac{m+1}{2}\right) + 2 \le 2n+3 \Rightarrow n+2 < n+3 \le V(m) \le 2n+3$$

□

4.7 Osservazione

Per ogni m esiste n tale che

$$2^n + 1 \le m \le 2^{n+1},$$

$2^n + 1$ è quindi il <u>più grande elemento</u> di $POT(2)+1$ minore o uguale di m, e 2^{n+1} il <u>più piccolo elemento</u> di $POT(2)$ maggiore o uguale di m.

4.8 Proposizione

Per ogni m tale che $2^n + 1 \leq m \leq 2^{n+1}$ si ha:

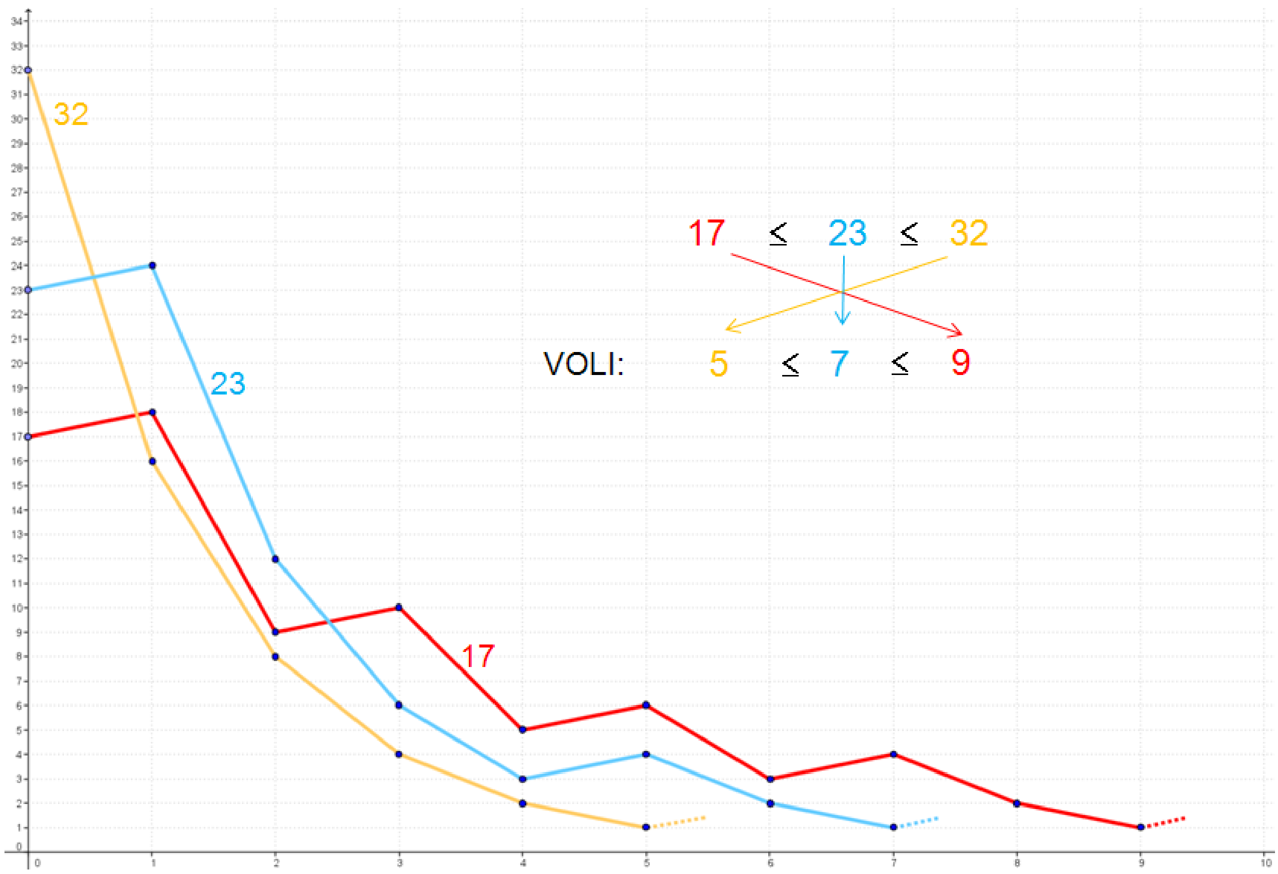
$V(2^{n+1}) \leq V(m) \leq V(2^n + 1)$

DIMOSTRAZIONE

Segue immediatamente dalla prop. 4.6 e dalle prop. 4.2 e 4.4

□

Illustriamo la proposizione dimostrata rappresentando l'orbita nel diagramma cartesiano le orbite dei numeri $32 \in POT(2)$, $17 \in POT(2)+1$ e 23 .



6. Volo tramite rappresentazione binaria

In questo ultimo paragrafo cercheremo di migliorare il risultato stabilito nella prop. 4.6. Vedremo come per ogni m è possibile calcolare in modo immediato il suo volo a partire dalla sua rappresentazione binaria.

6.1 Notazione:

- Indicheremo con lettere maiuscole le stringhe di numeri nell'insieme {0,1}

  es.: A = 1001010010

- m_{bin} : espressione binaria del numero m

  es.: $84_{bin} = 1010100$

- $|m_{bin}|$: numero delle cifre dell'espressione binaria di m

  es.: $|84_{bin}| = |1010100| = 7$

- $0_{INT}(m_{bin})$: numero degli zeri interni in m_{bin}

  es.: $0_{INT}(168_{bin}) = 0_{INT}(10101000) = 2$

  ZERI INTERNI ZERI FINALI

6.2 Proprietà della rappresentazione binaria

- $\forall$ m pari si ha: $m_{bin} = A0$
- $\forall$ m $\in$ POT(2) tale che $m = 2^n$ si ha: $m_{bin} = 1\underbrace{000...0}_{n}$
- $\forall$ m dispari si ha: $m_{bin} = A1$
- $\forall$ m $\in$ POT(2) $-$ 1 tale che $m = 2^n - 1$ si ha: $m_{bin} = \underbrace{111...1}_{n}$
- $\forall$ m $\in$ POT(2) + 1 tale che $m = 2^n + 1$ si ha: $m_{bin} = 1\underbrace{000...1}_{n}$
- $\forall$ m pari, se $m_{bin} = A0$ allora $\left(\frac{m}{2}\right)_{bin} = A$
- $\forall$ m dispari, se $m_{bin} = A0\underbrace{111...1}_{n}$ allora $(m+1)_{bin} = A1\underbrace{000...0}_{n}$

6.2 Teorema generale del volo

(i) $\forall m \notin POT(2) \quad V(m) = |m_{bin}| + 0_{INT}(m_{bin}) + 1$

(ii) $\forall m \in POT(2) \quad V(m) = |m_{bin}| - 1$

DIMOSTRAZIONE

(i) (per induzione generalizzata)

<u>Passo base</u>: m=3

$O(3) = (3, 4, 2, 1)$ quindi, $V(3) = 3$
D'altra parte,
$3_{bin} = 11$
$|11| + 0_{INT}(11) + 1 = 2 + 0 + 1 = 3$
Il passo base è dimostrato.

<u>Passo induttivo</u>: supponendo che la tesi valga $\forall p < m$ e $p \notin POT(2)$, dimostriamo che vale per m.

<u>1°caso</u>: m è pari, e $m \notin POT(2)$

$O(m) = (m, \frac{m}{2}, ...4, 2, 1) \qquad V(m) = 1 + V\left(\frac{m}{2}\right)$

$m \notin POT(2) \Rightarrow \frac{m}{2} \notin POT(2)$

Infatti, se $\frac{m}{2} \in POT(2)$, allora $m = 2\frac{m}{2} \in POT(2)$ $\lightning$

Quindi, per ipotesi induttiva (risulta infatti $\frac{m}{2} < m$)

$$V\left(\frac{m}{2}\right) = \left|\left(\frac{m}{2}\right)_{bin}\right| + 0_{INT}\left(\frac{m}{2}_{bin}\right) + 1$$

Se $m_{bin} = A0$ allora $\left(\frac{m}{2}\right)_{bin} = A$, dunque

$$V(m) = 1 + V\left(\frac{m}{2}\right) = 1 + \left|\left(\frac{m}{2}\right)_{bin}\right| + 0_{INT}\left(\frac{m}{2}_{bin}\right) + 1 = 1 + |A| + 0_{INT}(A) + 1$$

ed essendo $1 + |A| = |A0|$ e $0_{INT}(A) = 0_{INT}(A0)$ si ha:

$$V(m) = 1 + |A| + 0_{INT}(A) + 1 = |A0| + 0_{INT}(A0) + 1 = |m_{bin}| + 0_{INT}(m_{bin}) + 1$$

<u>2°caso</u>: m è dispari

$$O(m) = (m, m+1, \frac{m+1}{2}, \ldots 4, 2, 1) \qquad V(m) = 2 + V\left(\frac{m+1}{2}\right)$$

Sottocaso A)

$$\left(\frac{m+1}{2}\right) \notin POT(2)$$

$$m_{bin} = A0\ \underbrace{1 \ldots\ldots 1}_{n}\ 1$$

$$(m+1)_{bin} = A1\ \underbrace{0 \ldots\ldots 0}_{n}\ 0$$

$$\left(\frac{m+1}{2}\right)_{bin} = A1\ \underbrace{0 \ldots\ldots 0}_{n}$$

quindi, per ipotesi induttiva (risulta infatti $\frac{m+1}{2} < m$)

$$V(m) = 2 + V\left(\frac{m+1}{2}\right) = 2 + \left|\left(\frac{m+1}{2}\right)_{bin}\right| + 0_{INT}\left(\frac{m+1}{2}\right)_{bin} + 1 = 1 + \left|A1\ \underbrace{0 \ldots\ldots 0}_{n}\right| + 1 + 0_{INT}\left(A1\ \underbrace{0 \ldots\ldots 0}_{n}\right) + 1 =$$

$$= \left|A0\ \underbrace{1 \ldots\ldots 1}_{n}\ 1\right| + 0_{INT}\left(A0\ \underbrace{1 \ldots\ldots 1}_{n}\ 1\right) + 1 = |m_{bin}| + 0_{INT}(m_{bin}) + 1$$

Sottocaso B)

$\left(\frac{m+1}{2}\right) \in POT(2)$ allora $m+1 \in POT(2)$ e quindi m = $2^n - 1$, dunque m_{bin} = $\underbrace{111 \ldots 1}_{n}$

Per la prop. 4.3 V(m) = n+1 , e $|m_{bin}| + 0_{INT}(m_{bin}) + 1$ = $\left|\underbrace{111 \ldots 1}_{n}\right| + 0_{INT}(\underbrace{111 \ldots 1}_{n}) + 1 = n + 0 + 1 = n + 1$

(ii) DIMOSTRAZIONE

Sia $m \in POT(2)$ tale che $m = 2^n$, allora m_{bin} = $1\underbrace{000 \ldots 0}_{n}$

Per la proposizione 4.2 V(m)=n e $|m_{bin}| - 1$ = $\left|1\underbrace{000 \ldots 0}_{n}\right| - 1 = n + 1 - 1 = n$

Quindi

$$V(m) = |m_{bin}| - 1$$

□

ESEMPIO

- O(168)=(168, 84, 42, 21, 22, 11, 12, 6, 3, 4, 2, 1, 2, 1, …)   V(168)=11
- 168_{bin}= 10101000 |10101000|+0_{INT}(10101000)+1 = 8+2+1 = 11

- O(32)=(32, 16, 8, 4, 2, 1, 2, 1, …)   V(32)=5
- 168_{bin}= 100000 |100000|−1 = 6 − 1 = 5

<u>Nota</u>: si può in effetti dimostrare che il numero di zeri interni aumentato di 1 corrisponde al numero di applicazioni della seconda clausola della funzione easy-Collatz.

Osserviamo nel dettaglio la successione degli elementi dell'orbita di 168 nella notazione decimale e binaria.

Operazione	Notazione decimale	Notazione binaria
	168	10101000
:2		
	84	1010100
:2		
	42	101010
:2		
	21	10101
+1		
	22	10110
:2		
	11	1011
+1		
	12	1100
:2		
	6	110
:2		
	3	11
+1		
	4	100
:2		
	2	10
:2		
	1	1
+1		
	2	10
:2		
	1	1
….		
	….	….

6.3. Implementazione dell'algoritmo (Collatzator)

Il teorema 6.2 descrive in pratica un algoritmo che permette di determinarne il volo di m, a partire dalla sua rappresentazione in base 2, tramite un rapido esame delle cifre che la compongono.

Di seguito riportiamo una sua possibile implementazione in linguaggio C.

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>

int main()
{
  char bin[100];
  printf("\nCollatzator\n..........\n\nBy Ivan Colavita\n\n\n");
  printf("Inserisci un numero binario: ");
  fgets(bin,sizeof(bin),stdin);
  bin[strlen(bin)-1] = 0;
  int a = 1;
  int i;
  if (bin[strlen(bin)-1] == '1') {
    for (i=0; i<strlen(bin); i++)  {

      if (bin[i] == '1')
        a = a+1;
      else
        a = a+2;
    }
    printf("Numero di passi: %d", a);
  }
  else   {
    char bin2[100];
    char bin3[100];
    char bin4[100];
    char del[]="1";
    char zeros[20];
    char *p;
    char *p2;
    int i = 0;
    int a = 1;
    strcpy(bin2, bin);
    strcpy(bin3, bin);
    p = strtok(bin,del);
    while (p!=NULL) {
      p=strtok(NULL,del);
      i++;
    }
    p2 = strtok(bin2,del);
    while (i>1)   {
      p2=strtok(NULL,del);
      i--;
    }
    strcpy(zeros, p2);
    if (strlen(bin3)-strlen(zeros)==1)
      printf("Numero di passi: %d", strlen(zeros));
    else   {
      for (i=0; i<strlen(zeros); i++)
        a = a + 1;
      strcpy(bin4, bin3);
      bin4[strlen(bin3)-strlen(zeros)] = '\0';
      for (i=0; i<strlen(bin4); i++)  {
        if (bin4[i] == '1')
          a = a+1;
        else
          a = a+2;
      }
      printf("Numero di passi: %d\n", a);
    }
  }
  getchar();
  return 0;
}
```

7. Conclusioni

L'analisi condotta ha permesso di entrare, almeno a livello elementare, all'interno delle questioni poste dalla congettura di Collatz, introducendo la metodologia e gli strumenti per affrontarli. La forma particolarmente semplice della funzione easy-Collatz ha permesso di provare in maniera agevole un teorema di convergenza.

Come visto, giocano un ruolo importante le potenze di 2 e i numeri ad esse contigui (crf. 4.2 - 4.3 - 4.4). Non stupisce il fatto che la notazione binaria sia la forma migliore per la costruzione di algoritmi che permettano il controllo delle successioni di numeri che si generano (crf. 6.2 e 6.3).

La funzione easy-Collatz differisce da quella classica per la seconda clausola:

EASY- COLLATZ

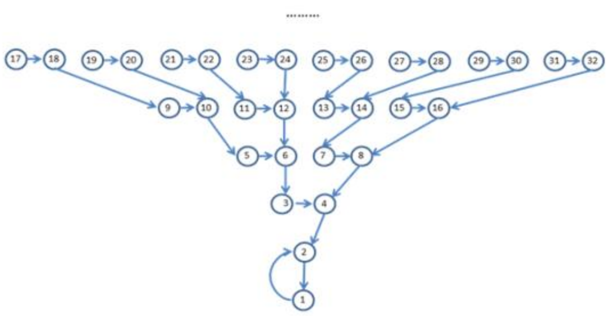
$$f(m) = \begin{cases} \dfrac{m}{2} & \text{se } m \text{ è pari} \\ m+1 & \text{se } m \text{ è dispari} \end{cases}$$

COLLATZ

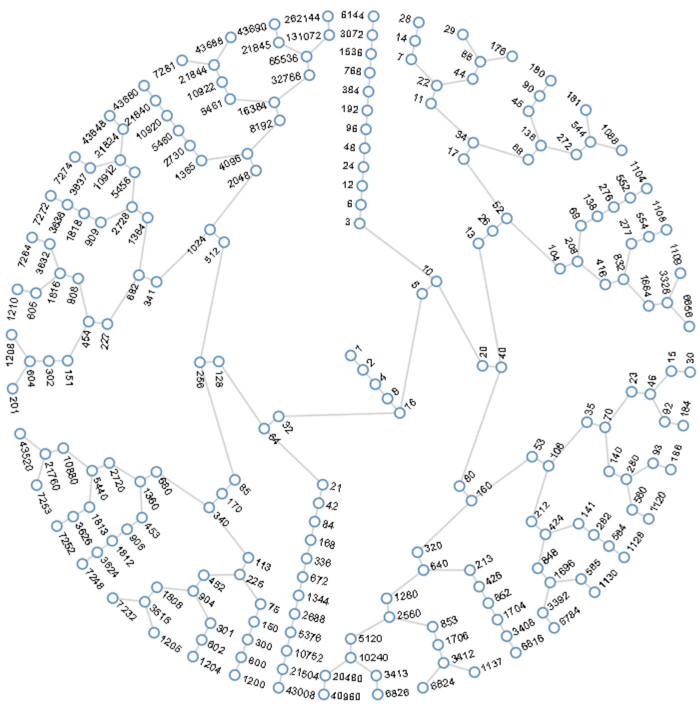
$$f(m) = \begin{cases} \dfrac{m}{2} & \text{se } m \text{ è pari} \\ 3m+1 & \text{se } m \text{ è dispari} \end{cases}$$

una differenza apparentemente "piccola " che provoca però due sviluppi profondamente diversi, come si nota immediatamente confrontando i grafi delle due funzioni

EASY- COLLATZ



COLLATZ



una sorta di "effetto farfalla" in ambito di teoria dei numeri.

Potrebbe avere interesse, a questo punto, modificare ulteriormente la seconda clausola studiando altre varianti di tipo easy come ad esempio:

$$f(m)=\begin{cases} \dfrac{m}{2} & \text{se } m \text{ è pari} \\ 2m+1 & \text{se } m \text{ è dispari} \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad f(m)=\begin{cases} \dfrac{m}{2} & \text{se } m \text{ è pari} \\ m+k & \text{se } m \text{ è dispari} \end{cases} \quad \text{con } k \text{ dispari}$$

valutando via-via la “misura” dei comportamenti di tipo caotico che eventualmente si potrebbero generare.

Ci si chiede, infine, se lo studio della funzione di Collatz, così come accade per la funzione easy-Collatz, possa essere facilitato tramite l’uso di una opportuna rappresentazione in una base diversa da 10 (ad esempio la base 6).

8. Bibliografia e sitografia

Jean-Paul Delahaye, *Giochi matematici*, Ghisetti e Corvi

http://utenti.quipo.it/base5/numeri/collaz.htm

http://quantidiscienza.blogspot.it/2012/07/un-problema-molto-complesso-la.html

http://www.jasondavies.com/collatz-graph/

http://it.wikipedia.org/wiki/Congettura_di_Collatz

http://webmath2.unito.it/paginepersonali/romagnoli/saracco.pdf