TORRI DI HANOI E CAMMINI HAMILTONIANI

SIMONE MORETTI
GABRIELE ARGIRÒ
GIORGIO PICCININI

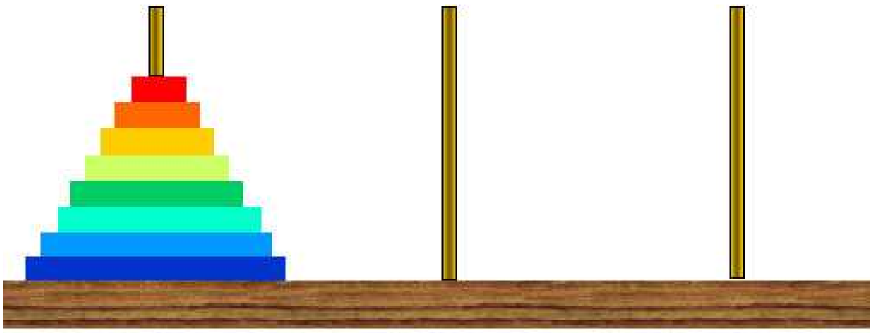
ABSTRACT. Si analizzano le relazioni tra due contesti matematici apparentemente distanti: lo studio delle strategie risolutive delle torri di Hanoi e la ricerca di cammini hamiltoniani nel grafo del cosiddetto “triangolo di Sierpinski”.

1.INTRODUZIONE

Nel libro [1] il matematico Ian Stewart illustra un’interessante relazione tra il gioco delle torri di Hanoi inventato da Edouard Lucas [2] e il grafo di natura frattale noto come “triangolo di Sierpinski”. In questo lavoro ci siamo occupati del problema della ricerca di cammini Hamiltoniani [3] su un triangolo di Sierpinski, e sulla base del suo legame con le torri di Hanoi abbiamo individuato una strategia di ricerca che riproduce sul grafo la soluzione del gioco delle torri di Hanoi in una delle sue varianti.

2.TORRI DI HANOI

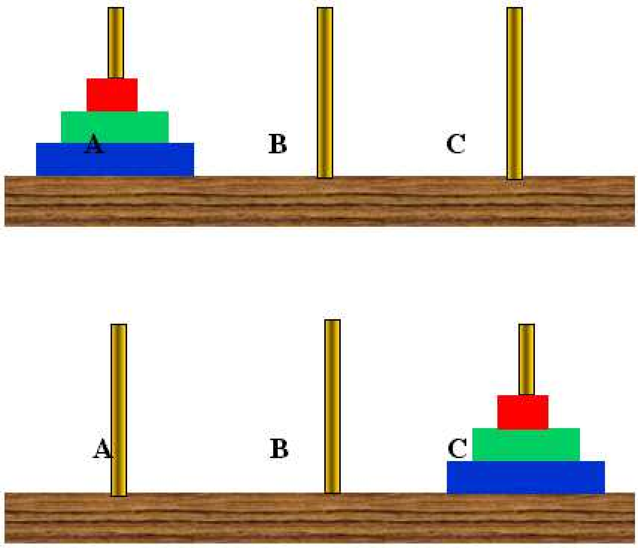
Il gioco della “Torre di Hanoi” si presenta costituito da tre aste (pioli o paletti), in una delle quali sono infilati alcuni dischi di misura diversa, disposti in ordine di grandezza, partendo dal basso, dal più grande al più piccolo.



LA TORRE DI HANOI CON OTTO DISCHI

Le regole del gioco sono due e molto semplici: si può spostare solo il disco situato sulla sommità di una torre, e un disco più grande non può essere posato sopra un disco più piccolo.

Lo scopo è quello di spostare tutti i dischi su un'altra asta in modo che risultino ancora disposti nello stesso ordine.

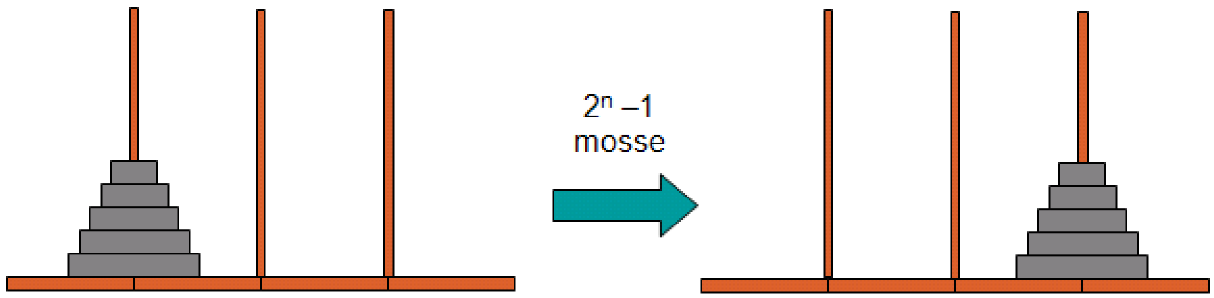


Configurazione iniziale e finale della torre di Hanoi con tre dischi

Il matematico Lucas, per rendere il gioco della la torre di Hanoi, da lui inventato, più interessante, inventò l’esistenza di una antica leggenda indiana che recitava così:
« Nel grande tempio di Brahma a Benares, su di un piatto di ottone, sotto la cupola che segna il centro del mondo, si trovano 64 dischi d'oro puro che i monaci spostano uno al giorno infilandoli in un ago di diamanti, seguendo l'immutabile legge di Brahma: nessun disco può essere posato su un altro più piccolo. All'inizio del mondo tutti i 64 dischi erano infilati in un ago e formavano la Torre di Brahma. Il processo di spostamento dei dischi da un ago all'altro è tuttora in corso. Quando l'ultimo disco sarà finalmente piazzato a formare di nuovo la Torre di Brahma in un ago diverso, allora arriverà la fine del mondo e tutto si trasformerà in polvere.»
Per spostare 64 dischi occorrono, come vedremo, 18.446.744.073.709.551.616 mosse per un totale di 50.539 migliaia di miliardi di anni. Anche spostando un disco al secondo i monaci impiegherebbero la bellezza di 584 miliardi di anni e per confronto basti pensare che: la nascita del pianeta Terra risale a circa 4.5 miliardi di anni fa, mentre la vita compare sul nostro pianeta circa 3.8 miliardi di anni fa. L’età dell’Universo, dal Big Bang ad oggi, è stimata sui 15 miliardi di anni. Prestando fede alla leggenda quindi si può ben sperare che la fine del mondo sia abbastanza lontana.

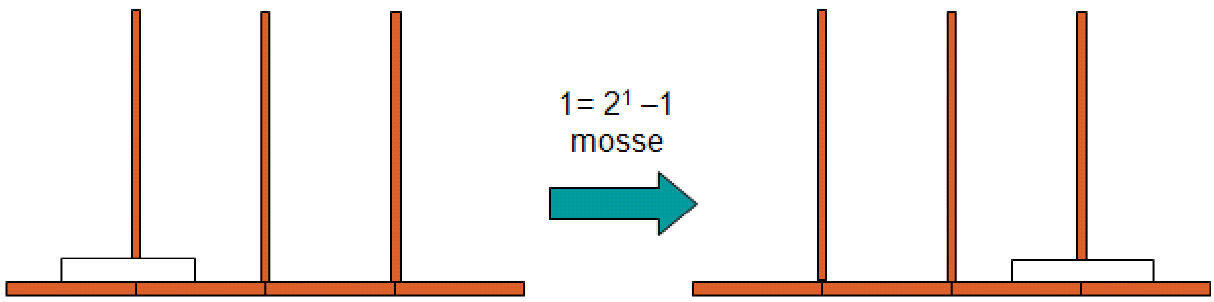
2.1 TEOREMA

Per ogni n ≥ 1 (numero di dischi nella torre di partenza), c'è una sequenza di $2^n - 1$ mosse che permette di spostare l'intera torre in uno dei pioli liberi.



<u>Dimostrazione (per induzione)</u>

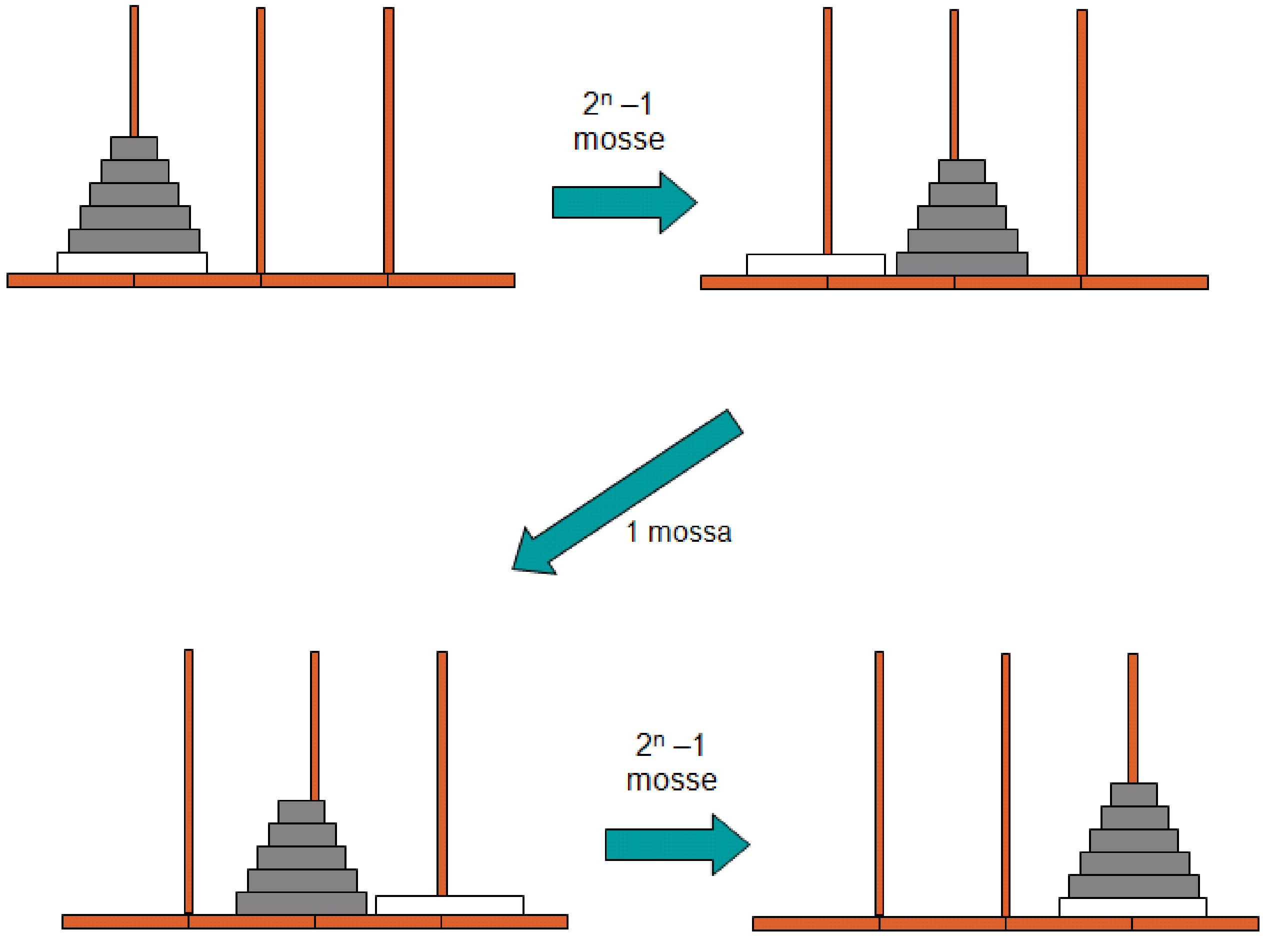
- Base dell'induzione: verifichiamo la tesi per n=1.



- Passo induttivo

Proviamo la tesi per un qualunque n+1 supponendo sia vera per n.

Partiamo dunque da una torre con n+1 dischi. Osserviamo che il disco alla base della torre (colorato di bianco) , essendo più grande di tutti, non ostacola con la sua presenza la sequenza di 2^n-1 mosse che per ipotesi induttiva permette lo spostamento della torre formata dai restanti n dischi (colorati di grigio); ma allora la torre di n+1 dischi può essere spostata nel modo illustrato di seguito:



Quindi concludendo il numero di mosse è:

$(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2 \cdot (2^n - 1) - 1 = 2^{n+1} - 1$

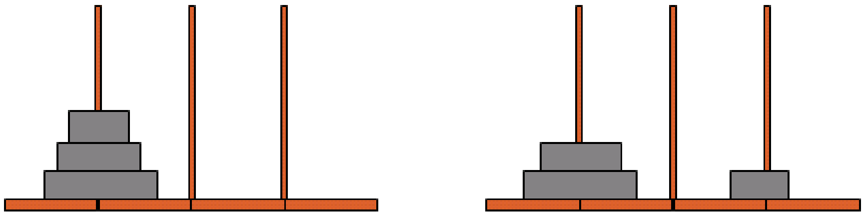
Poiché abbiamo dimostrato anche il passo induttivo, il teorema è dimostrato.

Q.e.d.

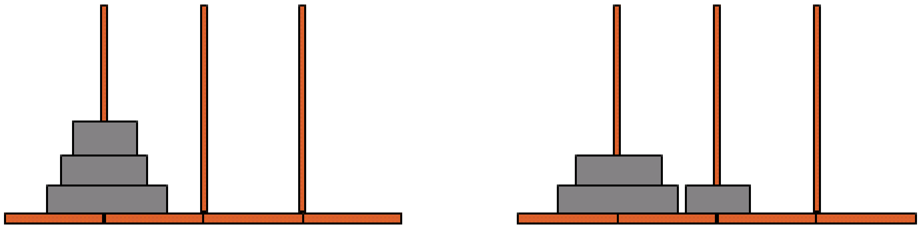
NOTA. Si dimostra che la sequenza di mosse illustrata è quella che prevede il numero più piccolo di spostamenti [2].

2.1 Spostamenti a “ passo uno”

Con l’espressione *passo uno* si intende una variante del gioco nel quale, oltre agli altri vincoli, è permesso spostare dischi solo da un piolo ad uno adiacente.



Mossa <u>non</u> permessa



Mossa permessa

La variante a “passo uno” comporta ovviamente un numero maggiore di spostamenti che nel caso classico. Vale al riguardo il seguente teorema

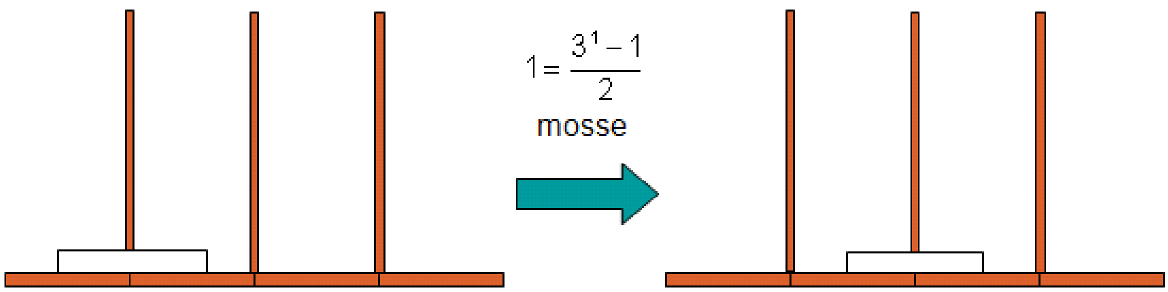
2.2 Teorema

Per ogni $n \geq 1$, la torre di Hanoi di n dischi può essere spostata in un piolo adiacente con una sequenza di $\frac{3^n - 1}{2}$ mosse

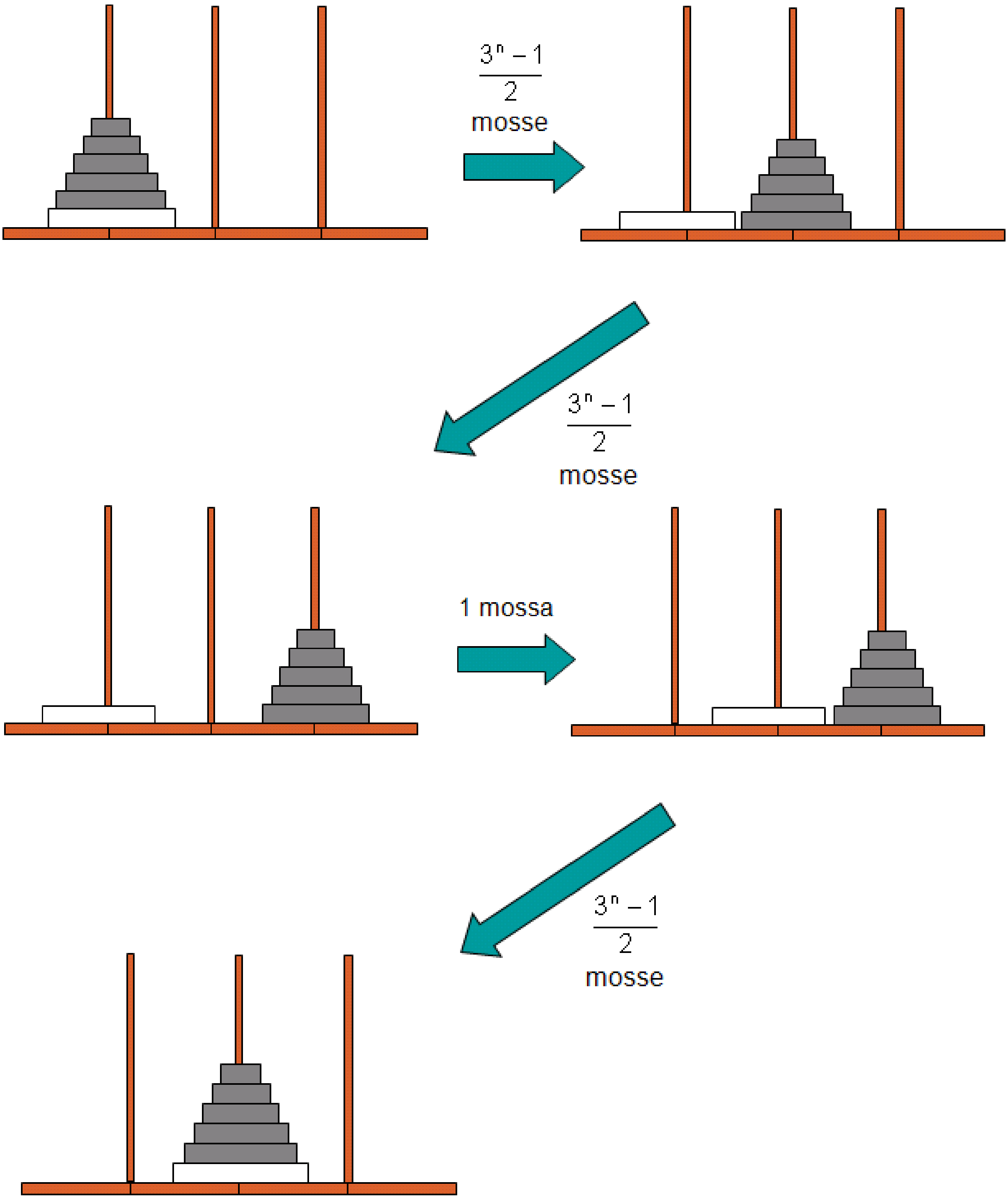
<u>Dimostrazione (per induzione)</u>

Senza perdere di generalità supponiamo di partire dal piolo di sinistra e di spostare al termine la torre sul piolo centrale

- Base dell'induzione: verifichiamo la tesi per n=1



- Passo induttivo: n→n+1



Occorrono quindi:

$$\frac{3^n-1}{2}+\frac{3^n-1}{2}+1+\frac{3^n-1}{2}=3\frac{3^n-1}{2}+1=\frac{3^{n+1}-1}{2}$$

mosse.

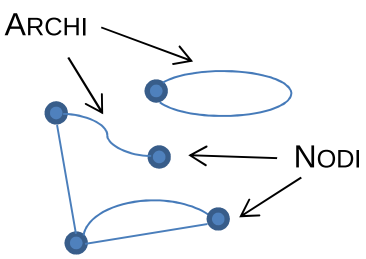
NOTA. Anche in questo caso si dimostra che la sequenza di mosse illustrata è quella che prevede il numero più piccolo di spostamenti [2].

3. GRAFI

3.1 DEFINIZIONE

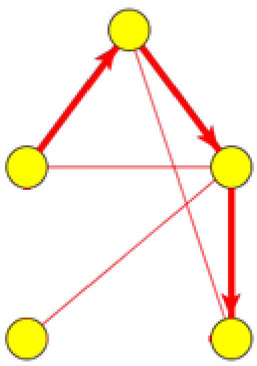
- Un *grafo* è un insieme di punti, detti *nodi* (*o vertici*) e linee di collegamento, dette *archi (o lati).*

Esempio:



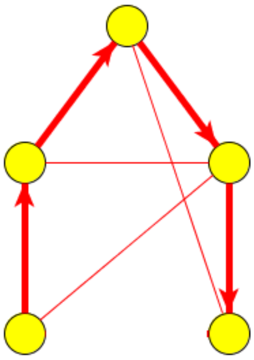
3.2 CAMMINI HAMILTONIANI

Si dice *cammino* su un grafo una sequenza ordinata di vertici collegati a due a due da archi.



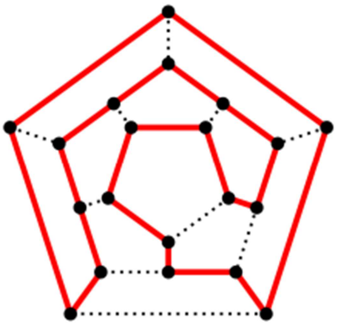
UN CAMMINO (INDICATO DALLE FRECCE)

un cammino in un grafo è detto *hamiltoniano* se esso tocca tutti i vertici del grafo una e una sola volta.



UN CAMMINO HAMILTONIANO

Questi particolari cammini hanno preso il nome da William Rowan Hamilton che inventò un gioco da tavolo, il puzzle di Hamilton o icosian game, che consisteva nel trovare un cammino chiuso sul bordo di un dodecaedro.

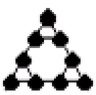


3.3 TRIANGOLO DI SIERPINSKI

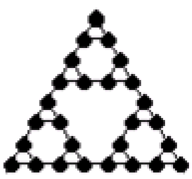
Consideriamo la seguente sequenza di grafi

n=1

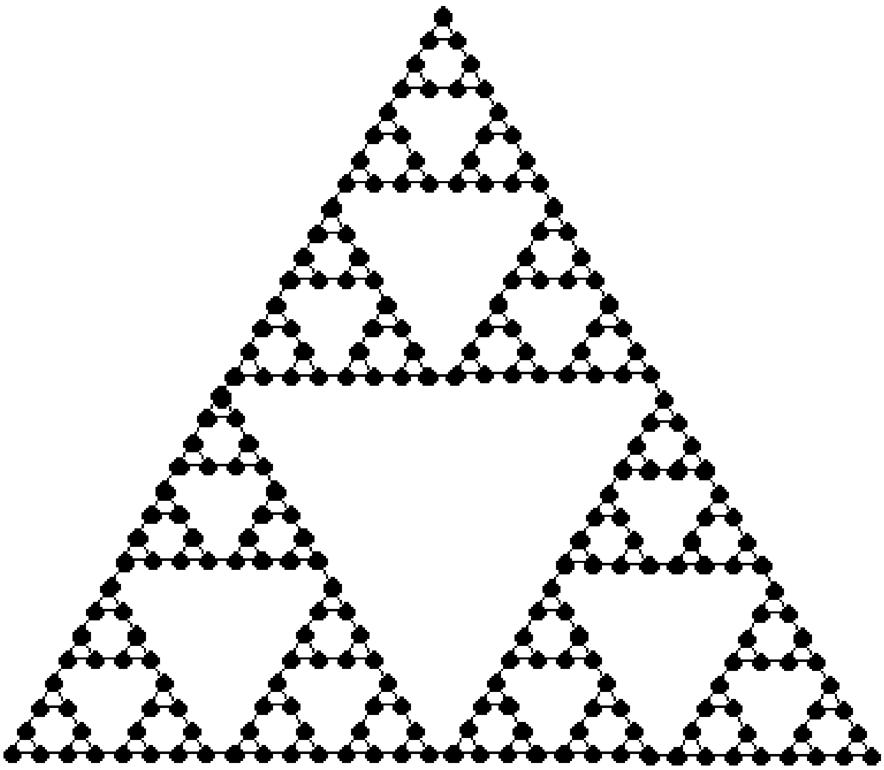
n=2



n=3



e cosi via collegando con tre archi tre copie dei triangoli ottenuti nel passo precedente
La figura che si ottiene iterando sempre più il procedimento è nota come “Triangolo di Sierpinski”.



3.4 Il grafo delle torri di Hanoi

Vedremo ora come sia possibile interpretare geometricamente la torre di Hanoi ed è proprio qui che entra in gioco il collegamento tra torre di Hanoi e triangolo di Sierpinski.

A qualsiasi rompicapo generico, che implichi spostamenti di oggetti e numeri di posizioni entrambi finiti, possiamo associare un grafo H i cui vertici sono le possibili posizioni lecite dei dischi e i cui archi rappresentano le mosse lecite per passare da una posizione a un’altra.

Che aspetto ha il grafo H associato a gioco delle torri di Hanoi? Per semplicità consideriamo il grafo H_3, che descrive le posizioni e le mosse della versione della torre di Hanoi con tre dischi.

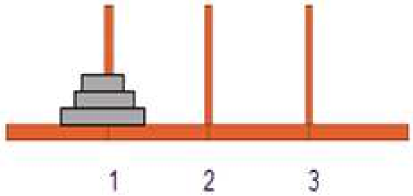
Per prima cosa numeriamo i paletti 1,2,3, da sinistra a destra.

Ogni posizione del gioco sarà codificata da una terna ordinata a valori 1,2 o 3:

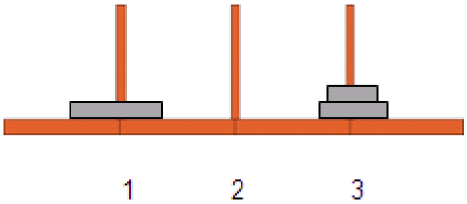
- il primo numero indica il paletto in cui si trova il disco più piccolo;
- il secondo numero indica il paletto in cui si trova il disco medio;
- il terzo numero indica il paletto in cui si trova il disco più grande.

Esempio:

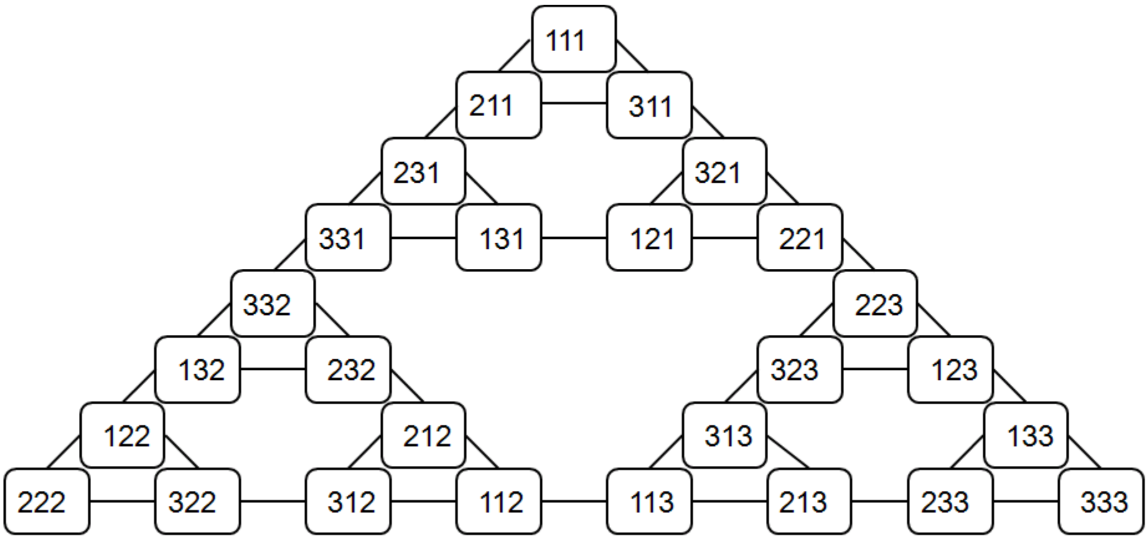
(1,1,1) : I tre dischi sono tutti sul primo paletto;



(3,3,1) : il disco più piccolo e il medio sono sul terzo paletto, e il disco grande su quello centrale;



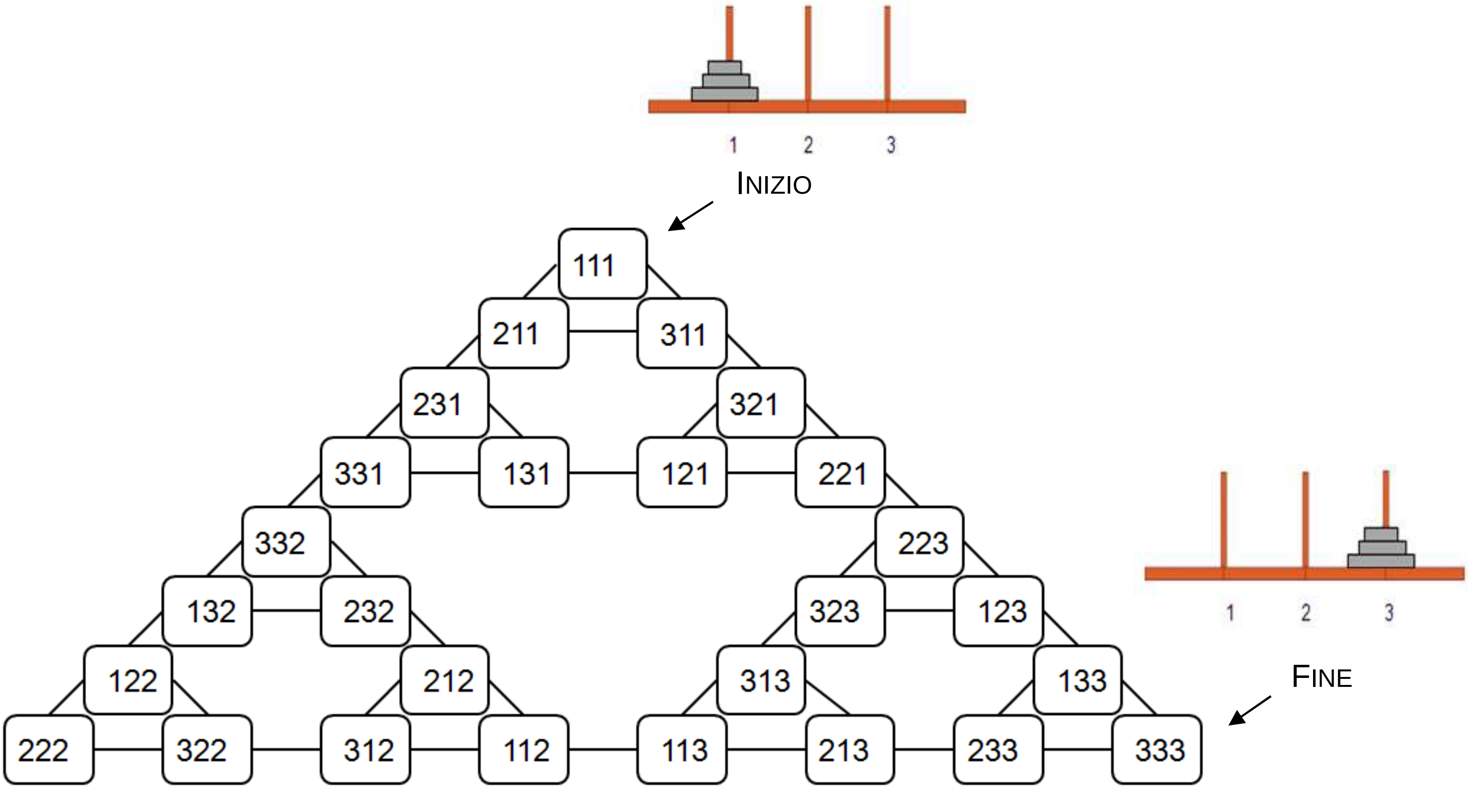
Siamo ora in grado di disegnare il grafo del gioco collegando le terne di numeri con gli archi indicanti il passaggio da una configurazione ad un'altra consentito dalle regole del gioco:



Come si vede si tratta di un triangolo di Sierpinski.

4. Ricerca di cammini Hamiltoniani nel triangolo di Sierpinski

Siamo pronti ora ad affrontare il problema della ricerca di cammini Hamiltoniani su un triangolo di Sierpinski. Più precisamente scelto un triangolo di Sierpinski cerchiamo un cammino Hamiltoniano che parta dal vertice in alto e termini nel vertice in basso a destra.



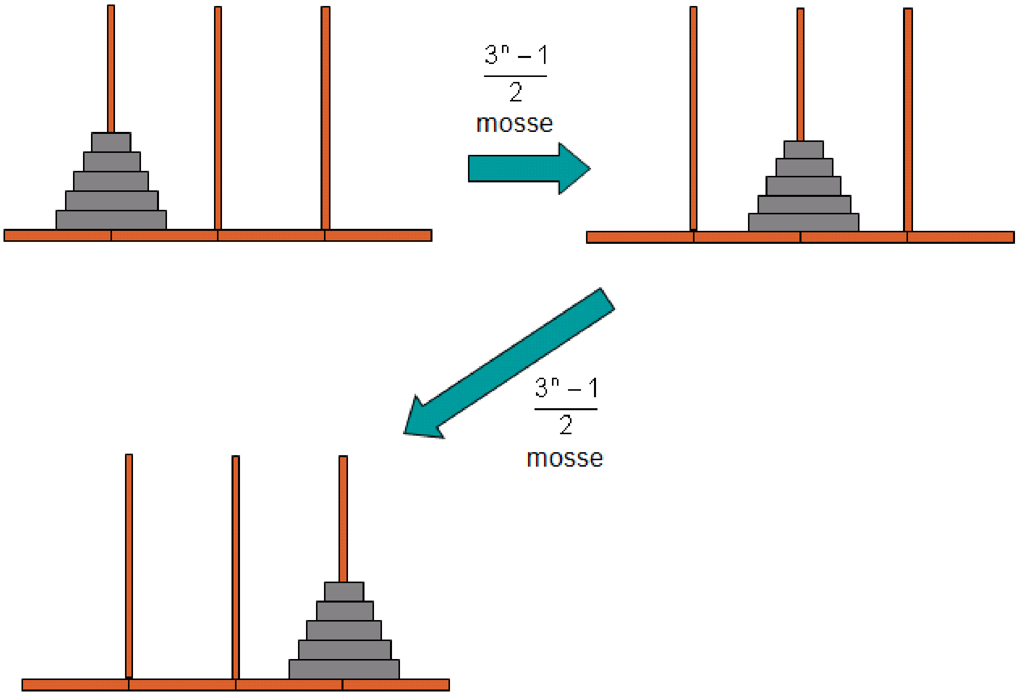
Osserviamo che il nodo iniziale e quello finale corrispondono rispettivamente alla configurazione di gioco in cui la torre intera è posta nel piolo di sinistra e a quella in cui la torre si trova nel piolo di destra.

4.1. Teorema: “passo uno” e cammini Hamiltoniani del triangolo di Sierpinski

La sequenza di mosse che risolve il gioco della torre di Hanoi “a passo uno” corrisponde ad un cammino hamiltoniano nel triangolo di Sierpinski del gioco della torre di Hanoi classica.

<u>Dimostrazione</u>

Per ottenere lo spostamento della torre da un piolo estremo all’altro, occorre applicare due volte la sequenza “ a passo uno” descritta in 2.2

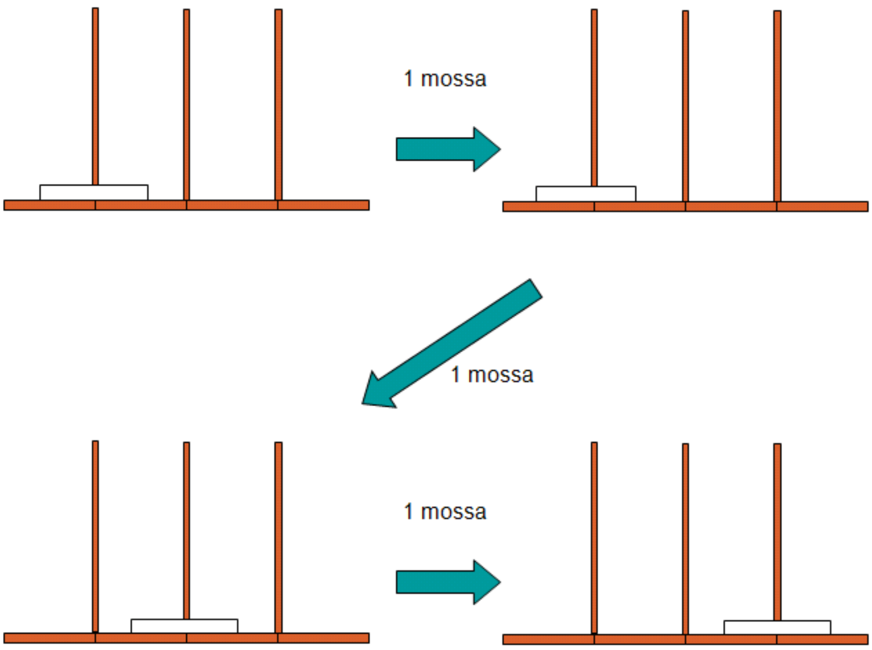


per un totale di $\frac{3^n-1}{2}+\frac{3^n-1}{2}=3^n-1$ mosse che corrisponde al numero dei nodi meno uno del triangolo di Sierpinski di ordine n.

Per dimostrare la tesi è sufficiente provare che nello sviluppo della soluzione della torre di Hanoi a passo uno, si attraversano <u>una sola volta</u> <u>tutte le posizioni</u> di gioco della torre di Hanoi classica.

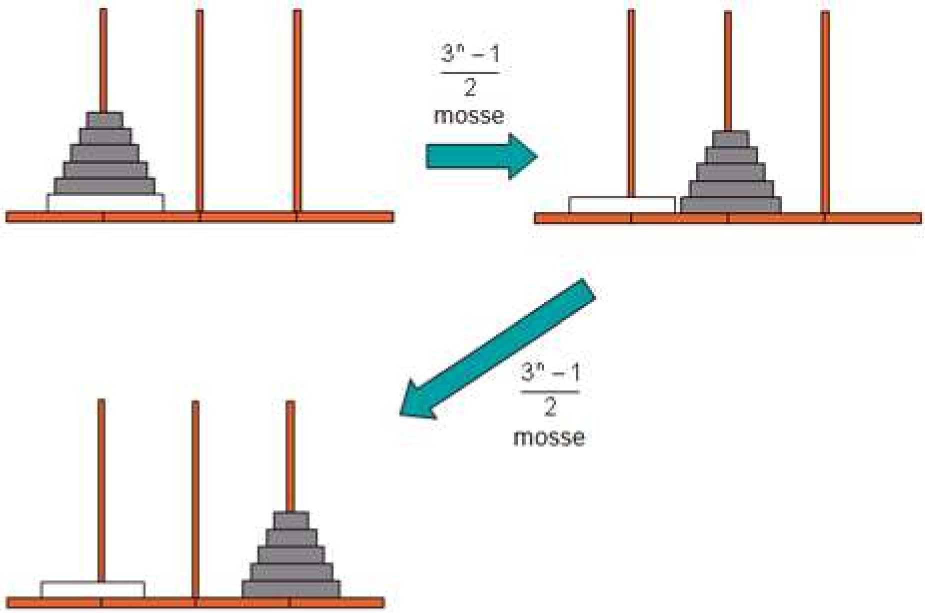
(Per induzione sul numero di dischi)

PASSO BASE: n=1

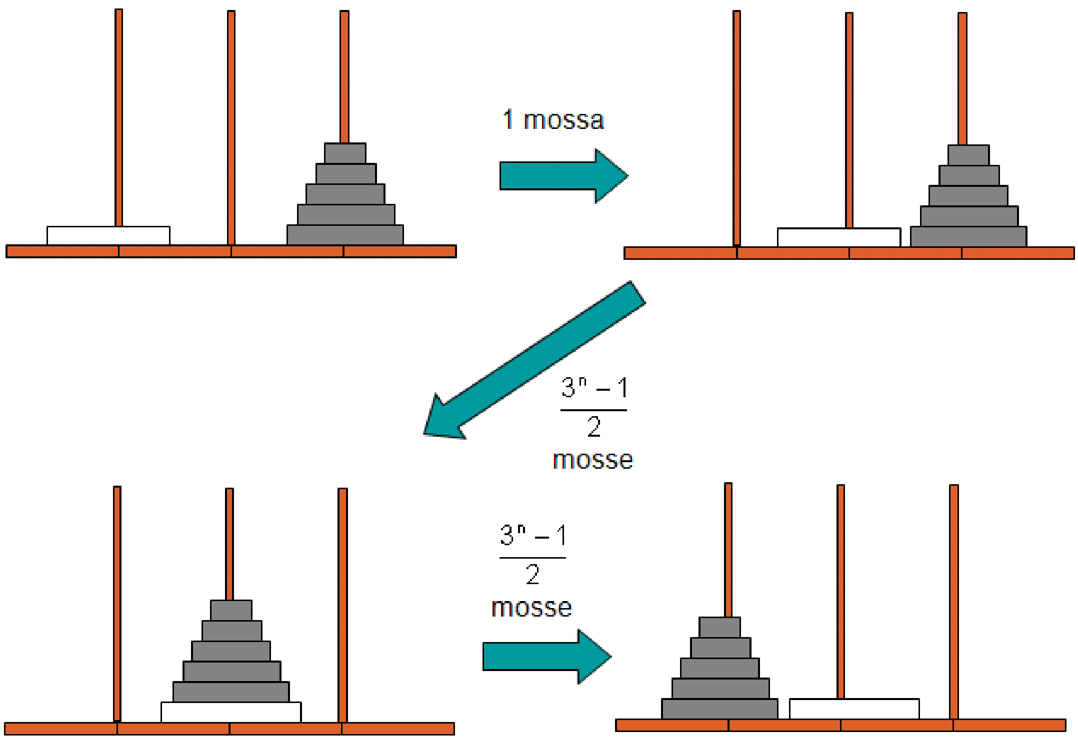


Banalmente si vede che nella soluzione “a passo uno” si incontrano una sola volta tutte le posizioni del gioco della torre di Hanoi con un solo disco.

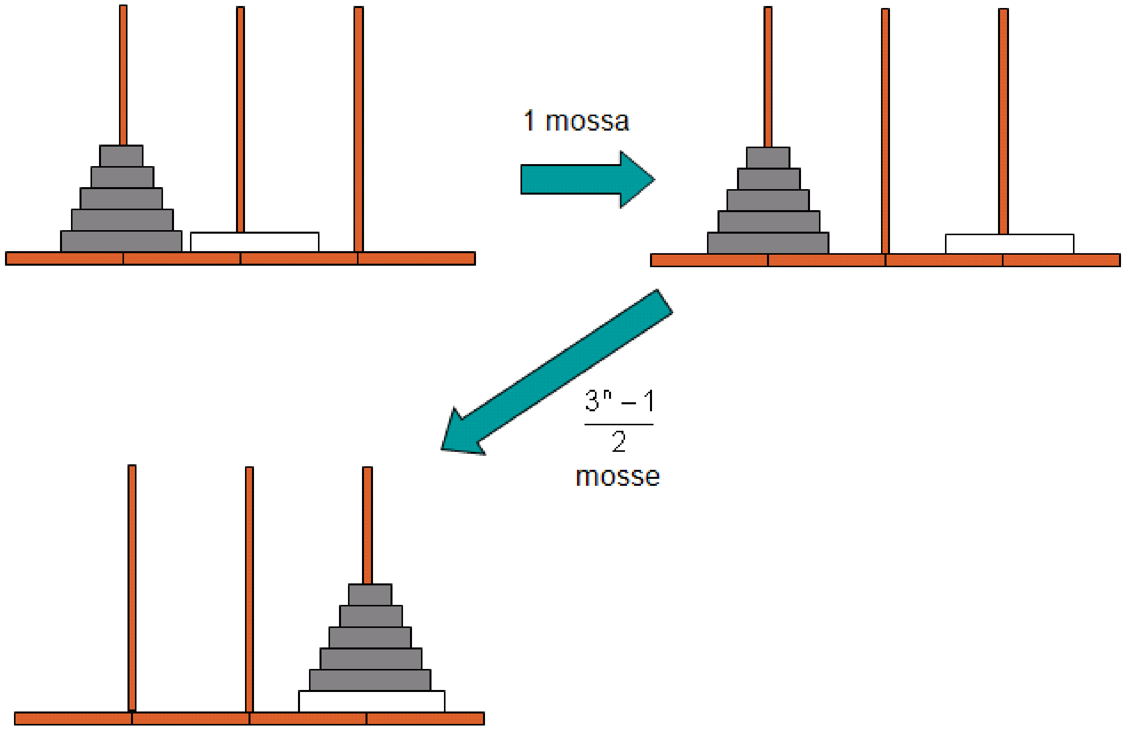
PASSO INDUTTIVO: n $\Rightarrow$ n+1. Dividiamo in tre fasi la soluzione a passo uno.



In queste prime mosse, per ipotesi induttiva, si passa una sola volta per tutte le posizioni del gioco delle torri di Hanoi nel quale la torre grigia di n dischi passa dal piolo di sinistra a quello di destra, ma queste posizioni corrispondono a tutte le posizioni del gioco nel quale la torre di n+1 dischi passa dal piolo di sinistra a quello di destra, ma nelle quali il disco grande (bianco) rimane fisso sul piolo di sinistra.



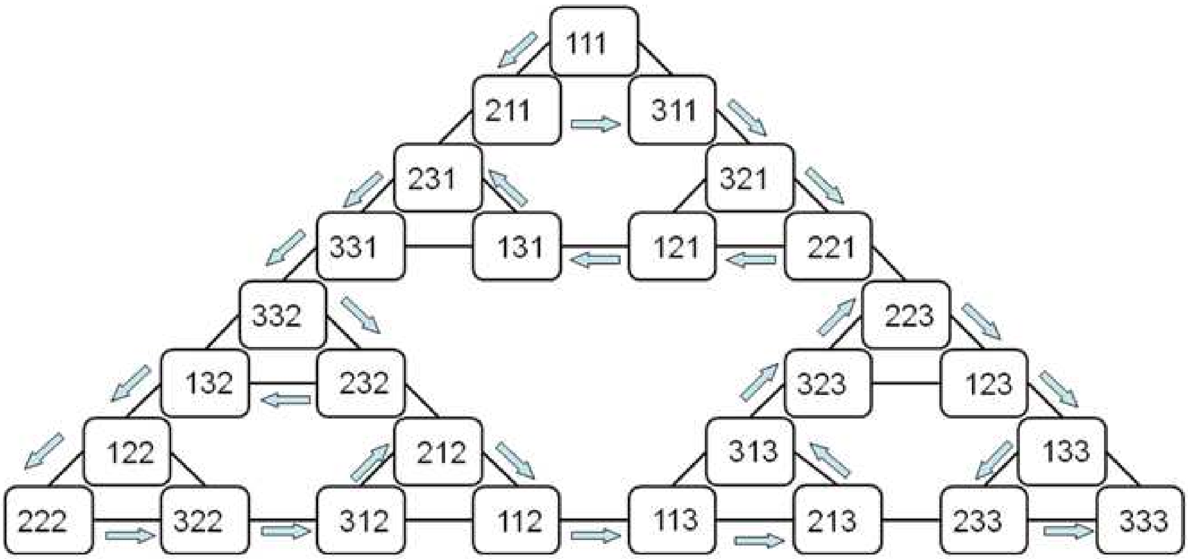
In queste altre mosse, per ipotesi induttiva, si passa una sola volta per tutte le posizioni del gioco delle torri di Hanoi nel quale la torre grigia di n dischi passa dal piolo di destra a quello di sinistra, ma queste posizioni corrispondono a tutte le posizioni del gioco nel quale la torre di n+1 dischi passa dal piolo di sinistra a quello di destra, ma nelle quali il disco grande (bianco) rimane fisso sul piolo di centro.



In queste ultime mosse, sempre per ipotesi induttiva, si passa una sola volta per tutte le posizioni del gioco delle torri di Hanoi nel quale la torre grigia di n dischi passa dal piolo di sinistra a quello di destra, ma queste posizioni corrispondono a tutte le posizioni del gioco nel quale la torre di n+1 dischi passa dal piolo di sinistra a quello di destra, ma nelle quali il disco grande (bianco) rimane fisso sul piolo di destra.

Q.e.d.

ESEMPIO DI CAMMINO HAMILTONIANO CHE VA DAL NODO (1,1,1) AL NODO (3,3,3) NEL TRIANGOLO DI SIERPINSKI DI ORDINE 3

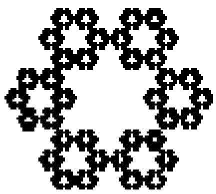


5. CONCLUSIONI

Con il nostro lavoro abbiamo messo in luce come la scoperta di un legame tra contesti apparentemente distanti abbia interessanti ricadute nella conoscenza degli oggetti di studio: i problemi posti in un contesto possono essere tradotti nell'altro con la possibilità di essere risolti in maniera più semplice.
Si potrebbe a questo punto continuare sulla scia dei risultati stabiliti affrontando nuovi scenari di indagine in due direzioni:

- studiare le traduzioni di altri problemi del gioco delle torri di Hanoi e delle sue varianti;

- studiare altri tipi di grafi della famiglia dei frattali di Sierpinski , ad esempio l'esagono di Sierpinski:



e individuare un gioco di spostamento di pezzi simile alle torri di Hanoi che gli "corrisponda".

6. Bibliografia e sitografia

[1] Ian Stewart, *Come tagliare una torta*, Einaudi,Torino

[2] http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads/2010/04/Problemi-sulle-torri-di-Hanoi.pdf

[3] Oystein Ore, *I grafi e le loro applicazioni*, Zanichelli

[4] http://www.dm.unito.it/~cerruti/pdfblog/grafi-gray.pdf

[5] http://it.wikipedia.org/wiki/Cammino_hamiltoniano

[6] http://www.itisvinci.com/leonardo/20040520/art9/index.php