TAVOLA DI FAUST E STRATEGIE NON SIMMETRICHE

A.S. 2010 - 2011

ROSSELLA PALAZZO (2C)
CHIARA ELEUTERI (3L P.N.I)
ANGELA IULA (3L P.N.I)

ABSTRACT

In questo articolo vengono analizzati alcuni aspetti di un gioco noto come tavola di “Faust”, tipico caso di gioco a due nel quale esiste una strategia vincente per uno dei giocatori basata sulla “simmetria” delle configurazioni. Ci si è chiesti se esistano strategie “asimmetriche” alternative a quella classica e a tale scopo si sono studiate alcune varianti più semplici del gioco.

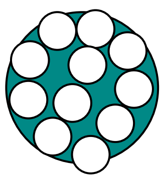
1. LA TAVOLA DI FAUST

Il gioco della tavola di Faust è stato il punto di partenza di questo lavoro che stimolando la nostra mente ci ha indotti ad indagare e ricercare oltre.

In questo gioco è il diavolo stesso a lanciarci la sfida (da cui il nome).

Esso consiste nel mettere a turno una moneta perfettamente tonda su un tavolo circolare, fino a esaurire tutto lo spazio sul piano in maniera tale che nessuna moneta si sovrapponga ad un’altra: perde il giocatore che al suo turno non riesce a poggiare la sua moneta.

Esempio: ecco la posizione finale di una partita.

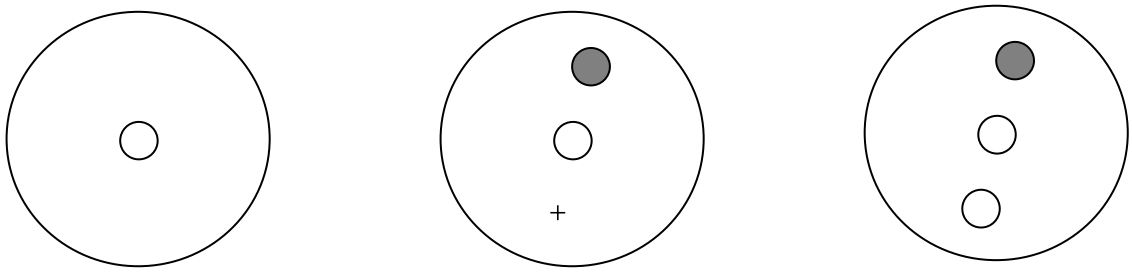


Ora il giocatore di turno, non avendo più spazio per la sua moneta, perde (una moneta può anche sporgere ma il suo centro deve cadere all’interno della tavola)

Mostreremo ora come il primo giocatore può sempre vincere utilizzando una strategia basata su mosse simmetriche.

2. STRATEGIA CON MOSSE SIMMETRICHE

Il primo giocatore (A), pone la moneta (indicata con un cerchio bianco) al centro della tavola, e poi ogni volta che il secondo giocatore (B) posa una moneta (indicato con un cerchio grigio) in uno spazio libero, (A) pone la sua nella posizione simmetrica rispetto al centro:

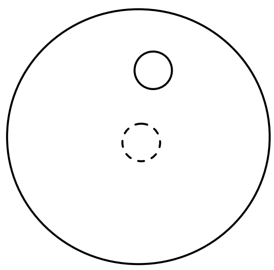


In questo modo A avrà sempre lo spazio per posare la sua moneta dopo che B ha messo la sua (se così non fosse vorrebbe dire che la moneta di A è intralciata da qualche moneta già presente alla quale corrisponde in posizione simmetrica una moneta che impedirebbe a B di posare la sua);così quando ad un certo punto non ci sarà più spazio sulla tavola sarà B a non poter posare la sua moneta, perdendo la partita.

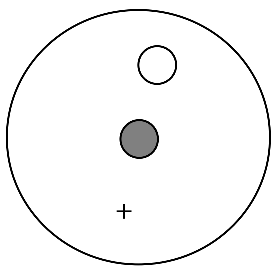
Ci chiediamo ora cosa succede se A non pone la prima moneta al centro

3. SVILUPPI DEL GIOCO CON PRIMA MOSSA NON CENTRALE

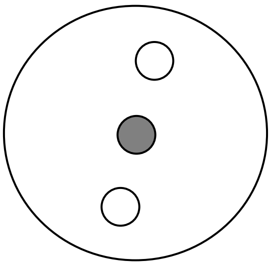
Supponiamo che il giocatore A non ponga la sua prima moneta al centro



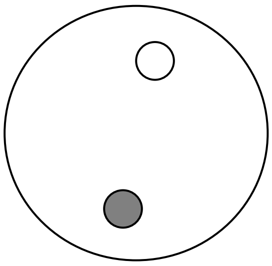
Caso 1: B pone la sua moneta al centro del tavolo.



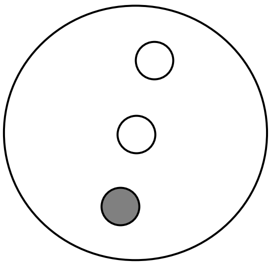
In questo caso A può ancora vincere perché ponendo la moneta nella posizione simmetrica della sua prima moneta può di nuovo adottare la strategia con mosse simmetriche



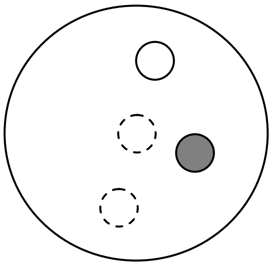
Caso 2: B non pone la moneta nel centro, ma nella posizione simmetrica della prima moneta di A.



Anche in questo caso A può ancora vincere mettendo la sua seconda moneta al centro del tavolo e adottando la strategia con mosse simmetriche



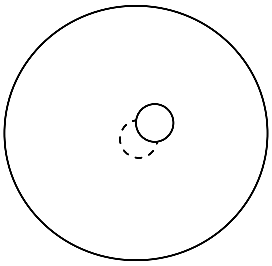
Caso 3: B pone la sua moneta in una posizione diversa dal centro e da quella simmetrica della prima moneta di A



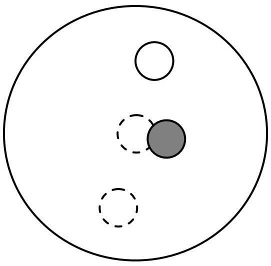
In questo caso A può vincere ponendo la sua moneta nella posizione simmetrica di quella di B, e continuare ad adottare la strategia simmetrica fino a che B pone la sua moneta al centro, nel qual caso A la mette nella posizione simmetrica della prima moneta e da qui si prosegue come nel caso 1, o fino a che B pone la sua moneta nella posizione simmetrica della prima moneta, nel qual caso A la mette al centro e si prosegue come nel caso 2.

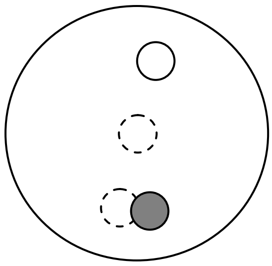
Casi di incertezza: occorre considerare altri possibili sviluppi di gioco con esito non evidente.

Ad esempio se la posizione della prima moneta pur non essendo centrale incontra l'ingombro di una moneta centrale, le considerazioni fatte nel caso 1 non valgono più.



Lo stesso accade nel caso 3 se la moneta di B incontra l'ingombro di una moneta centrale, o di una moneta posta in posizione simmetrica a quella della prima moneta di A.





Osserviamo che queste contromosse di B potrebbero impedire l'adozione della strategia a mosse simmetriche nel caso 3.

Per analizzare queste situazioni abbiamo bisogno di alcuni prerequisiti

4. GIOCHI COMBINATORI IMPARZIALI

Si definisce *gioco combinatorio imparziale* un gioco che soddisfa ai seguenti sei assiomi:

1. E' un gioco a due.

2. Ha un numero finito di configurazioni (dette anche posizioni) possibili.

3. E' definito un insieme di regole - uguali per entrambi i giocatori - che, data una configurazione, stabiliscono le configurazioni cui è lecito passare.

4. I due giocatori alternano le mosse.

5. Esistono configurazioni, dette terminali, dalle quali non è più possibile effettuare alcuna mossa, cioè non è lecito passare a nessun'altra configurazione.

6. Si arriva sempre ad una configurazione terminale in un numero finito di passi.

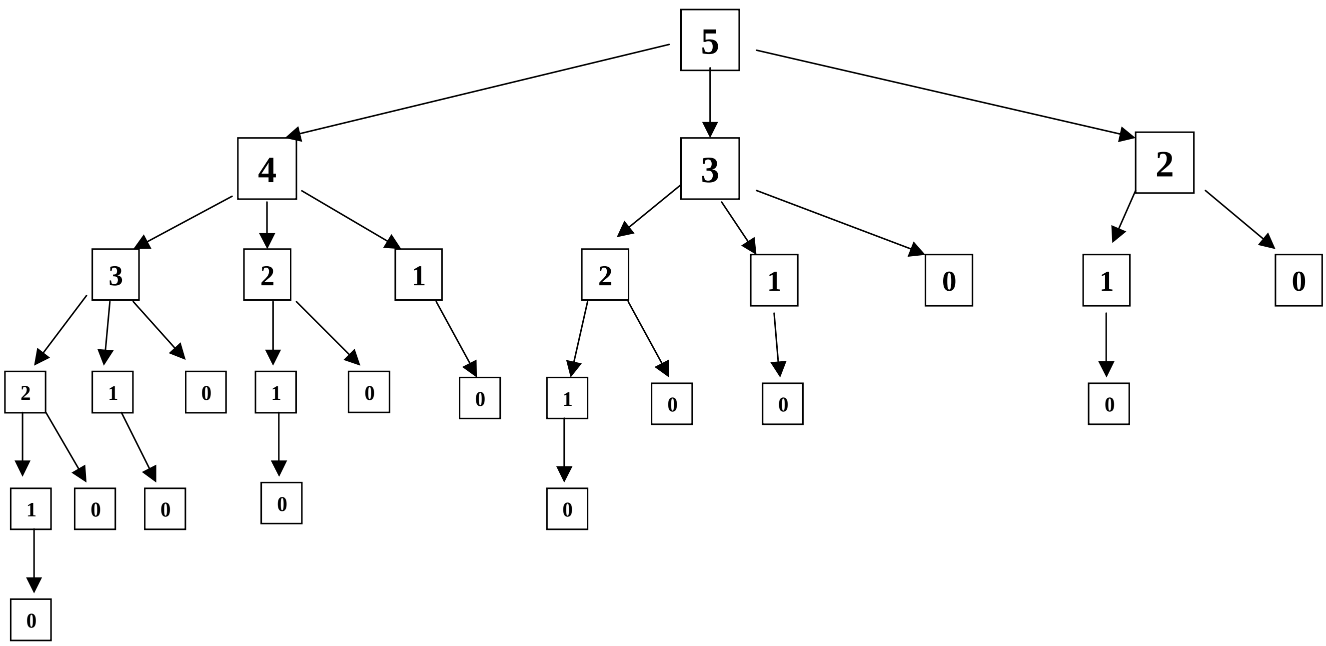
Il gioco della tavola di Faust si può quindi ritenere un esempio di gioco imparziale.

5. GIOCO "A TOGLIERE"

Un altro esempio di gioco combinatorio imparziale è quello chiamato a "togliere". Esso consiste nel sottrarre a turno un numero prefissato di monete da un mucchio. Perde chi dei due giocatori non ha più monete da togliere.

Ad esempio da un mucchio iniziale di 5 monete toglie 1, 2 o 3 monete.

Proviamo ad analizzare la situazione attraverso un grafo:



Ogni nodo di questo albero può rappresentare una posizione *perdente* o *vincente* nel senso che segue:

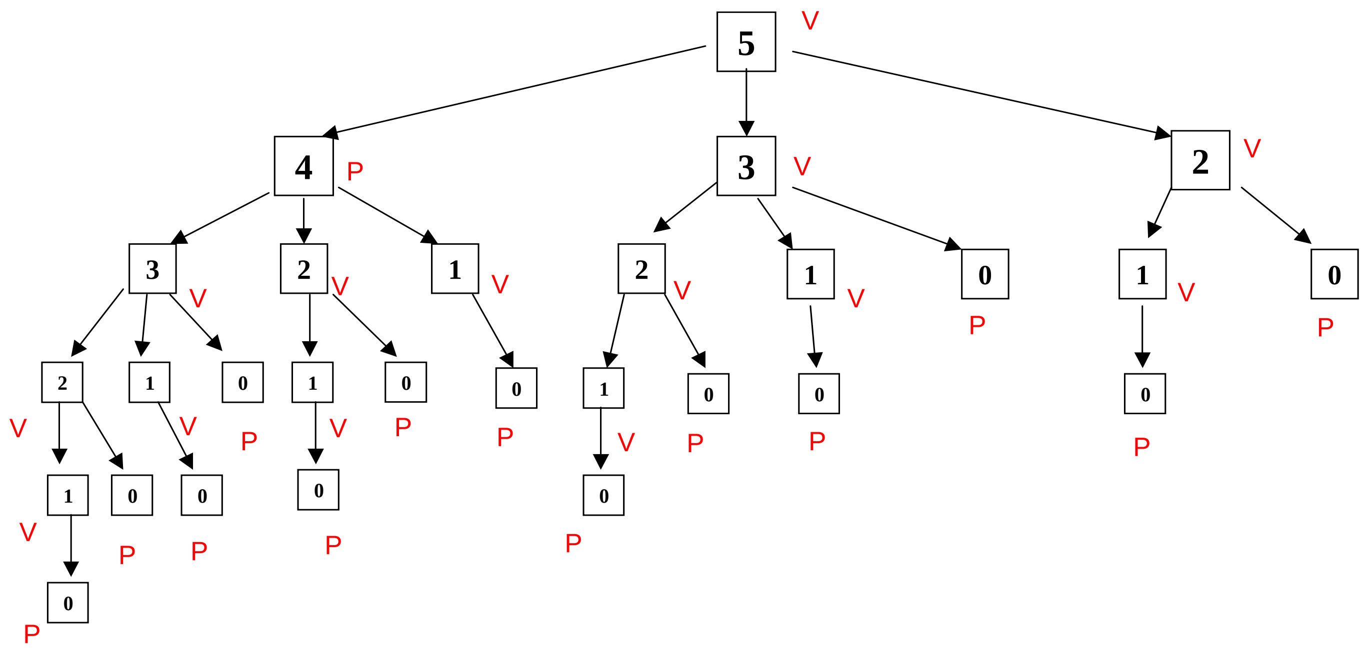
- una posizione si dice *vincente* (V) se chi si trova di turno in quella posizione ha la certezza di vincere;

- una posizione si dice *perdente* (P) se chi si trova di turno in quella posizione ha la certezza di perdere.

Per analizzare le diverse posizioni indicate nel grafo si deve tener presente che:

- tutte le posizioni terminali (i nodi con lo zero) sono posizioni perdenti;
- una posizione è vincente se da essa si può passare ad almeno una posizione perdente;
- una posizione è perdente se da essa si può passare solo a posizioni vincenti.

Siamo ora in grado di studiare meglio il grafo.



Se nel grafo del gioco il nodo iniziale è vincente vuol dire che c'è una strategia vincente per il primo giocatore che consiste nello scegliere ogni volta un nodo P. Ciò è possibile perché abbiamo affermato che da ogni posizione vincente si può passare ad almeno una posizione perdente, e che da questa l'avversario si può passare solo a posizioni vincenti (e quindi di nuovo favorevoli al primo giocatore).

Analogamente si può vedere che se il nodo iniziale è perdente vuol dire che c'è una strategia vincente per il secondo giocatore.

Nell'esempio quindi vince A togliendo all'inizio 1 sola moneta e poi:

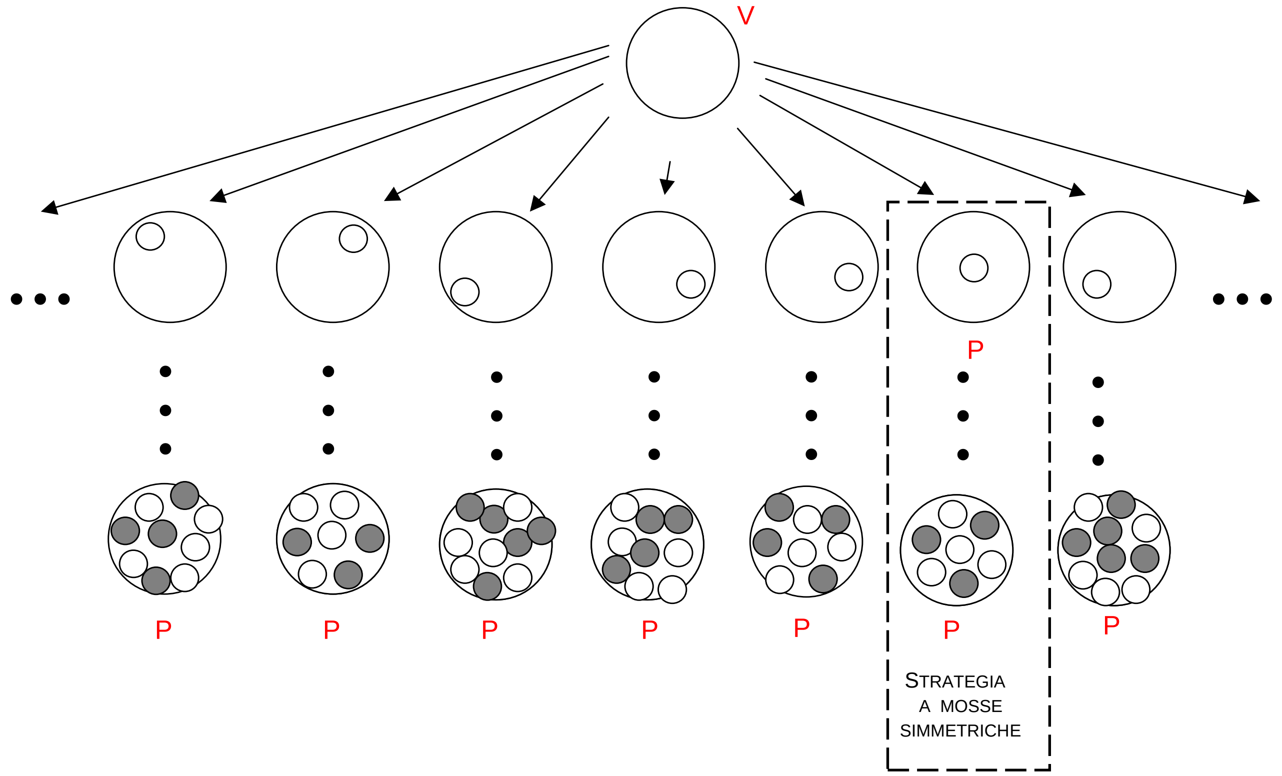
- se B ne toglie 1, B ne toglie 3;
- se B ne toglie 2, B ne toglie 2;
- se B ne toglie 3, B ne toglie 1.

6. Teoremi sui giochi imparziali

- In ogni gioco imparziale ogni posizione del gioco è o di tipo V o di tipo P
- In ogni gioco imparziale esiste sempre una strategia vincente per il primo o per il secondo giocatore

7. Grafo della tavola di Faust

Dopo aver analizzato gli elementi della teoria dei giochi “imparziali” analizziamo ora il grafo della tavola di Faust.



Notiamo che nonostante vi sia un numero infiniti di nodi (corrispondenti alle posizioni dei centri delle monete), abbiamo rami di lunghezza finita.

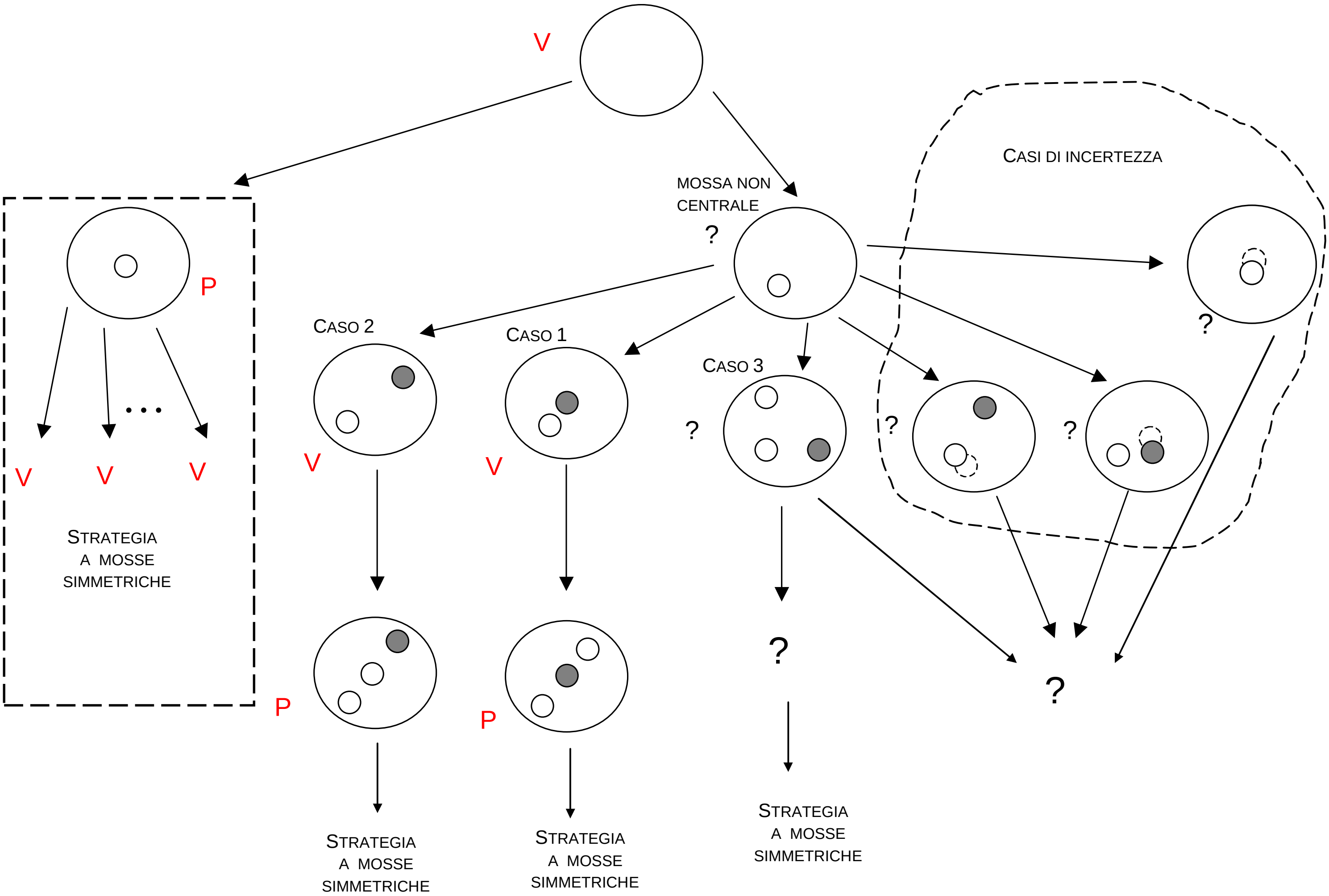
Osserviamo inoltre che nelle posizioni finali si possono presentare solo due casi:

- <u>il numero delle monete è dispari</u>: le monete giocate da A (indicate con cerchi bianchi) supera di una unità quello delle monete giocate da B (indicate con cerchi grigi): vince A (infatti in questo caso il turno è di B e non può muovere);
- <u>il numero delle monete è pari</u>: le monete giocate da A (indicate con cerchi bianchi) è uguale a quello delle monete giocate da B (indicate con cerchi grigi): vince B (infatti in questo caso il turno è di A e non può muovere).

Abbiamo evidenziato la parte del grafo relativa alla strategia a mosse simmetriche.

8. GRAFO CON PRIMA MOSSA NON CENTRALE

Analizziamo ora la parte di grafo relativa alla prima mossa non centrale (vedi par.3)



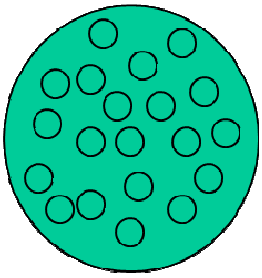
Come si può notare abbiamo condotto un'analisi più approfondita del grafo, segnalando tutte le situazioni che avevamo notato precedentemente (casi1,2,3 e i casi di incertezza) in base alle posizioni vincenti (V) e a quelle perdenti (P).
Tra di essi tuttavia si è potuto constatare la presenza di alcuni problemi aperti (quelli che presentano il ?). In particolare non siamo in grado di decidere il tipo V o P per una mossa non centrale (dovremmo conoscere i valori di tutti i nodi collegati, ma questo è stato possibile solo per i casi 1 e 2).

Dall'osservazione di tale grafo siamo giunti a riformulare la domanda dell'inizio:

il giocatore A può fare una mossa non centrale con etichetta P, dalla quale cioè il giocatore B raggiunge solo nodi di tipo V ?

9. IL GIOCO DELLA TAVOLA CON POSIZIONI ASSEGNATE

Per cercare di rispondere alla domanda che ci siamo posti proviamo a studiare dei casi più semplici, come ad esempio un problema che abbia alla base una tavola con delle posizioni assegnate.



In questo caso siamo si vede che qualsiasi strategia risulta vincente: quella a mosse simmetriche (solo però nel caso in cui le posizioni preassegnate abbiamo una configurazione simmetrica rispetto al centro e comprendano una posizione preassegnata centrale) ma anche quella che noi abbiamo definito "distratta", ossia senza un preventivo controllo della posizione dei pezzi.

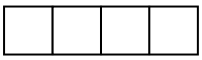
Infatti la vittoria al gioco dipende solo dal numero delle posizioni preassegnate:

- Se n è dispari: vince il *primo* giocatore
- Se n è pari: vince il *secondo* giocatore

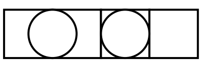
Il gioco risulta troppo semplice.

10. IL GIOCO DELLE SCACCHIERE LINEARI

Per cercare di raggiungere il nostro obbiettivo abbiamo così cercato di studiare casi più interessanti come le *scacchiere lineari*.



La tavola è sostituita da una fila di caselle quadrate adiacenti e le monete (aventi come diametro il lato di una casella) possono essere poste solo con i centri coincidenti con i centri delle caselle o con i punti medi dei lati che separano le caselle.

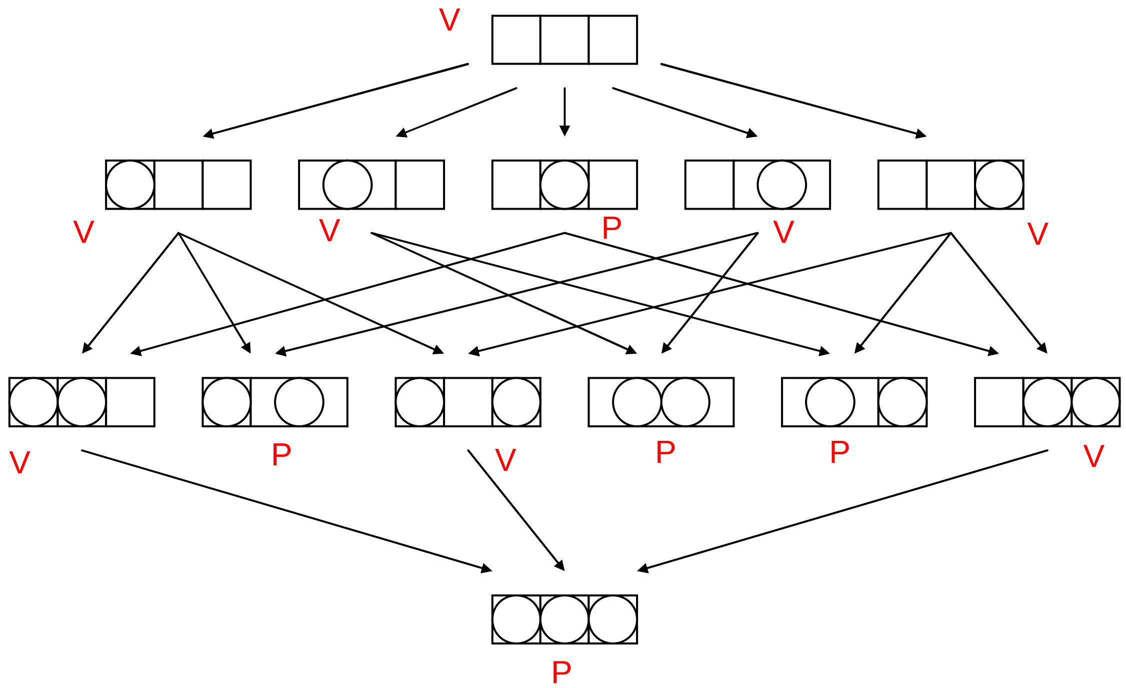


In esse abbiamo potuto constatare che la strategia vincente è ancora quella a mosse simmetriche, tuttavia ci siamo chiesti se esistono altre strategie vincenti che partano da prime mosse non centrali.

Per poter rispondere a questa domanda abbiamo ricorso nuovamente al grafo.

Consideriamo ad esempio il caso con tre caselle:

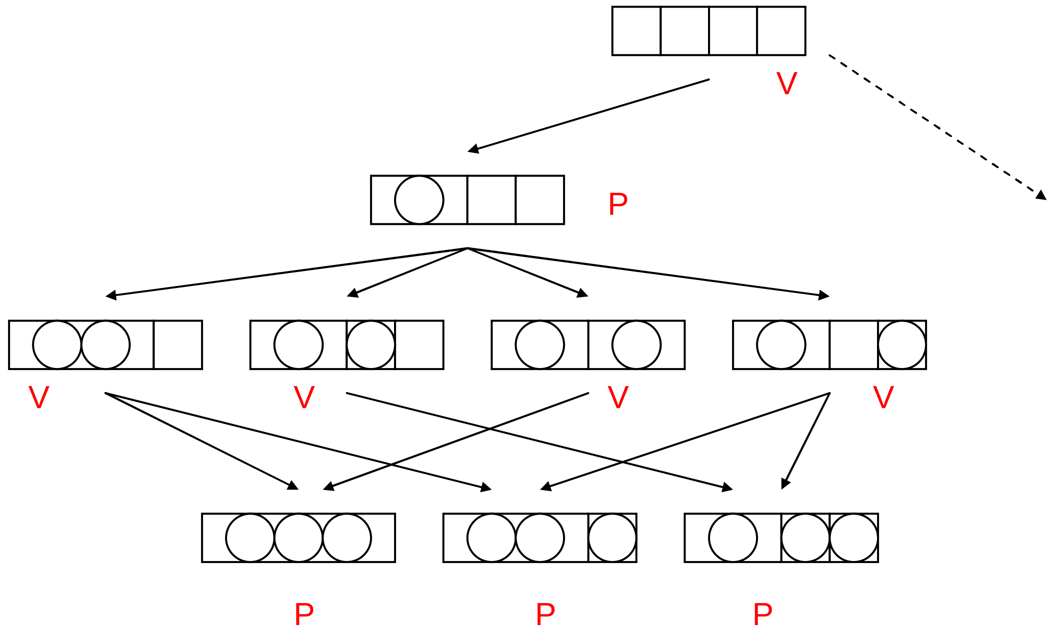
Caso n=3



In questo caso c’è per il giocatore A solo una prima mossa di tipo P che è quella centrale da cui parte la strategia a mosse simmetriche.

Nel caso n=4 ci sono invece tre prime mosse di tipo P (una di tipo centrale e due non)

illustriamo la parte del grafo che riguarda una di queste mosse non centrali.



11. CONGETTURA

Nel caso delle scacchiere lineari abbiamo verificato che:

n=2 dopo la prima mossa c’è una sola posizione P
n=3 dopo la prima mossa c’è una sola posizione P
n=4 dopo la prima mossa ci sono più posizioni P
n=5 dopo la prima mossa c’è una sola posizione P

Quindi siamo giunti alla formulazione della seguente **congettura**:

se n è dispari dopo la prima mossa c’è una sola posizione P
se n è pari dopo la prima mossa ci sono più posizioni P

12. CONCLUSIONI

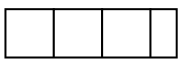
Al momento della stesura di questo articolo la nostra congettura non è stata ancora dimostrata.

Sia nel gioco della tavola di Faust che in quello delle scacchiere lineari, le posizioni finali che portano alla vittoria il primo giocatore hanno un numero dispari, mentre quelle che portano alla vittoria il secondo ne hanno un numero pari. La presenza di strategie alternative a quella simmetrica sembra legata allo spazio di gioco e a come indirizzare la partita in modo da lasciare sempre lo spazio per un numero pari di monete.
Si noti che la strategia a mosse simmetriche rispetta questo criterio.

Sarebbe interessante studiare situazioni in cui la strategia a mosse simmetriche non si possa utilizzare per motivi legati alle caratteristiche strutturali del gioco.
Si potrebbe allo scopo studiare il problema delle scacchiere lineari ottenute aggiungendo ad una scacchiera lineare con un numero intero di caselle una mezza casella

Esempio

Scacchiera lineare con n= 3,5



BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

[1] Gardner M. (1987) *Enigmi e giochi matematici*, traduzione di M.Carlà, Biblioteca Universale Rizzoli, Milano
[2] http://alpha01.dm.unito.it/personalpages/cerruti/doc-html/giochi/giochi.html
[3] http://www.apav.it/master/gioconim.pdf
[4] http://www.dm.unipi.it/~abbondandolo/divulgazione/giochi1.pdf
[5] http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads//2010/04/logica2.pdf