SPUNTI E RICERCHE INTORNO AL GIOCO DEL CHOMP

Adriano Pecere
Agnese Cursi
Alessia Vastola
Carmela Anello
Cristina Grani
Eleonora Guerra
Enrico Favara
Federica Taglia
Federico Corallo
Flavio Petrucci
Gabriella Caputi
Giovanni Bacchetti
Giovanni Maria Pasquarelli
Gloria Remoli
Luca Argirò

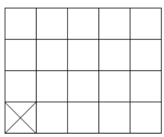
Abstract

Il gioco del Chomp a dispetto della sua semplicità mette in luce interessanti caratteristiche e proprietà di indubbio interesse nell'ambito della teoria dei "giochi imparziali". Vengono qui presentate e studiate diverse varianti del gioco classico che ne evidenziano i confini strutturali.

Parole chiave: Chomp, teoria dei giochi, giochi imparziali

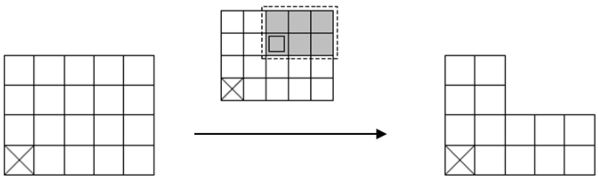
1. Il chomp

Tutto comincia da una tavoletta di cioccolata con 4 × 5 quadratini, di cui l'ultimo in basso a sinistra è contrassegnato: si tratta del quadratino avvelenato.



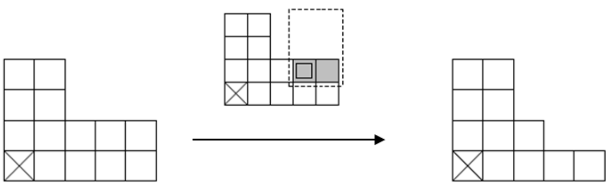
Il gioco chiamato Chomp (il nome è stato inventato da Martin Gardner in [2]) è la sfida tra due contendenti che devono, ad ogni mossa, mangiare almeno un quadratino di cioccolato. Chi mangia il quadratino avvelenato naturalmente perde; vince quindi chi obbliga l'avversario a mangiare il veleno. La regola è che i giocatori hanno una bocca rettangolare: volendo mangiare un certo quadratino, il giocatore mangerà anche tutti quelli che si trovano più a destra e più in alto di esso.

Per chiarire bene come funziona, proviamo a seguire una partita di Chomp.



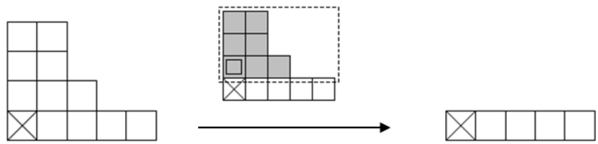
Il primo giocatore sceglie il quadratino che si trova nella terza colonna da destra e nella seconda riga dall'alto e mangia 6 quadratini. Il rettangolo del suo morso è quindi determinato dalla scelta del quadratino in basso a sinistra.

Il secondo giocatore risponde con una mossa in cui mangia due soli quadratini:

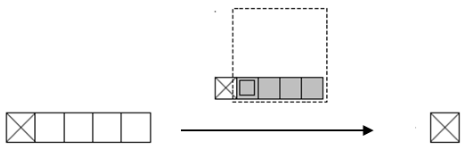


infatti sceglie il quadratino nella seconda riga dal basso e nella seconda colonna da destra, determinando così il "morso" rettangolare che è tratteggiato nella figura. Questo morso ha l'effetto pratico di togliere i due quadratini marcati in grigio - perché il resto era già stato mangiato nella prima mossa.

Il giocatore che aveva cominciato sceglie il quadratino appena sopra quello avvelenato, e si fa una scorpacciata di ben 7 quadratini:



ma egli si accorge di avere in pratica regalato la vittoria all'avversario; e infatti,

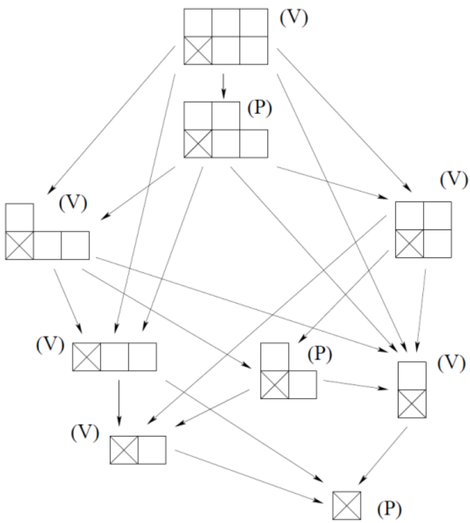


mangiando tutta la cioccolata "sana" dell'ultima riga, il secondo giocatore costringe l'avversario alla sconfitta (si può giocare al chomp utilizzando una delle varie applet che si trovano in rete [2]).

1.1 Proprietà del Chomp

Si può mostrare facilmente che il gioco termina dopo un numero finito di mosse e che il primo giocatore può sempre vincere, se gioca in maniera sufficientemente astuta.

Ci si può convincere di questo esaminando lo schema seguente che riassume tutte le possibili partite che si possono giocare a partire da una tavoletta 2×3.



Notiamo che, partendo dal basso, ossia dalla configurazione banalmente perdente (nel Chomp è quella con solo il quadratino avvelenato: chi se la trova davanti ha perso), abbiamo contrassegnato una configurazione come vincente (V, in figura) o perdente (P) se chi trova il gioco in quella configurazione e deve muovere ha una strategia per vincere il gioco o no, fino ad arrivare alla configurazione iniziale che è dunque una posizione "vincente": chi gioca qui (il primo) può quindi sempre vincere se gioca in modo razionale; ma questo avviene in generale per qualsiasi chomp.

Possiamo infatti notare che, in generale, il primo giocatore ha a disposizione una mossa “speciale”: mangiare il quadratino in alto a destra. Qualsiasi mossa il secondo riesca a fare partendo da lì, avrebbe potuto esser eseguita già all’inizio dal primo giocatore. Dunque se il secondo giocatore avesse una buona mossa il primo potrebbe precederlo facendola prima di lui: questo si chiama argomento della “mossa rubata” e la configurazione della tavoletta privata del quadratino in alto a destra si dice configurazione “pivot”. La posizione iniziale di un Chomp sarà dunque “sempre” contrassegnata con una V: il primo giocatore può sempre vincere.

1.2 Altre proprietà del Chomp

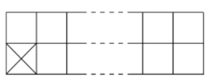
Come abbiamo detto nel gioco del Chomp esiste una strategia vincente per il primo giocatore ma solo in alcuni casi particolari è possibile descrivere tale strategia.

<u>Il Chomp 1×n.</u>

Se la configurazione di partenza è una tavoletta 1×n come in figura è banale notare che il primo giocatore vince alla prima mossa

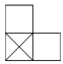
<u>Il Chomp 2×n.</u>

Se la configurazione di partenza è una tavoletta 2×n come in figura:



la strategia del primo giocatore è togliere il quadretto in alto a destra

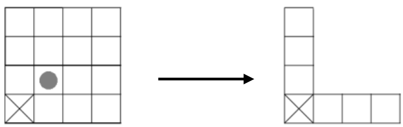
raggiungendo una configurazione a “scalino”; ora, qualsiasi sia la risposta del secondo giocatore, alla terza mossa chi ha cominciato può sempre ricreare per il secondo giocatore la configurazione a “scalino”, per un Chomp più piccolo e così via, fino alla configurazione



e a quella perdente:

<u>Il Chomp n×n.</u>

Se la configurazione di partenza è una tavoletta quadrata n×n , la strategia del primo giocatore consiste nel togliere il quadretto immediatamente sopra e a destra a quello avvelenato:



e poi proseguire “copiando” ogni volta la mossa del secondo giocatore (questa strategia prende il nome di “strategia simmetrica”).

2. Teoria dei giochi

“La teoria dei giochi” è quella parte della matematica che ha come oggetto di studio la competizione tra soggetti razionali (giochi classici, competizione tra aziende, conflitti tra gruppi, competizione politica,..)

Forniamo ora alcune nozioni elementari per lo studio di una particolare categoria di giochi di cui il Chomp fa parte.

2.1 Giochi imparziali

Si definiscono giochi imparziali quelli che rispondono alle seguenti caratteristiche.

- Ci sono due giocatori che giocano alternando le mosse.
- Ogni partita si sviluppa all’interno di un numero finito di possibili posizioni del gioco.
- Le mosse lecite non dipendono dal giocatore di turno (a differenza di quanto avviene nel gioco degli scacchi o della dama nei quali ogni giocatore quando è di turno può muovere solo i suoi pezzi)
- Il gioco termina quando non ci sono più mosse possibili.
- Il giocatore che non può più giocare perde.

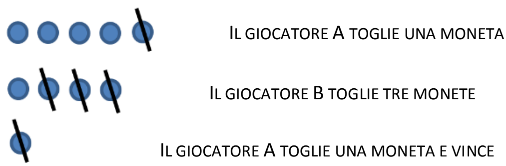
Ci riferiremo ai giochi imparziali chiamandoli semplicemente giochi.

Mostriamo ora un esempio di gioco imparziale per illustrare alcuni elementi base di teoria dei giochi.

2.2 Gioco “a sottrazione”

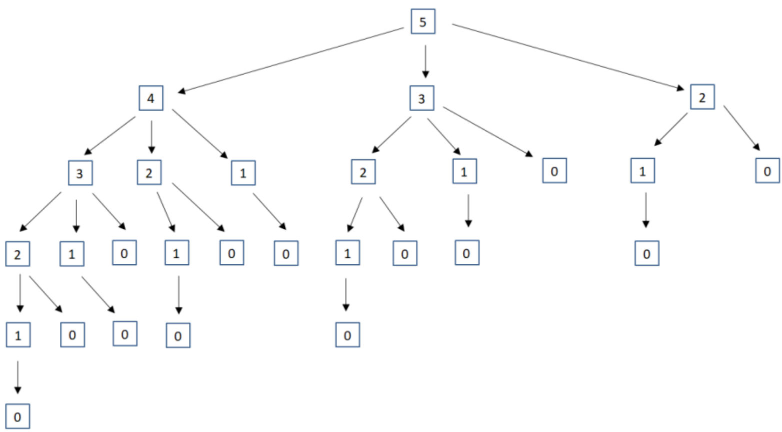
Il gioco consiste nel sottrarre a turno un numero prefissato di monete da un numero di partenza. Perde chi dei due giocatori non ha più monete da togliere.

Esempio: il mucchio iniziale conta 5 monete, e le monete da togliere sono 1, 2 o 3



2.3 Il grafo del gioco.

Ogni gioco imparziale può essere rappresentato da un grafo orientato finito nel quale i nodi rappresentano le diverse posizioni di gioco , e gli archi orientati il passaggio da una posizione di gioco alle successive posizioni che si raggiungono con una mossa.



Illustriamo come esempio il grafo del gioco a sottrazione visto in 2.2.

2.4 Posizioni vincenti e posizioni perdenti

Le posizioni di un gioco imparziale possono essere classificate nel seguente modo:

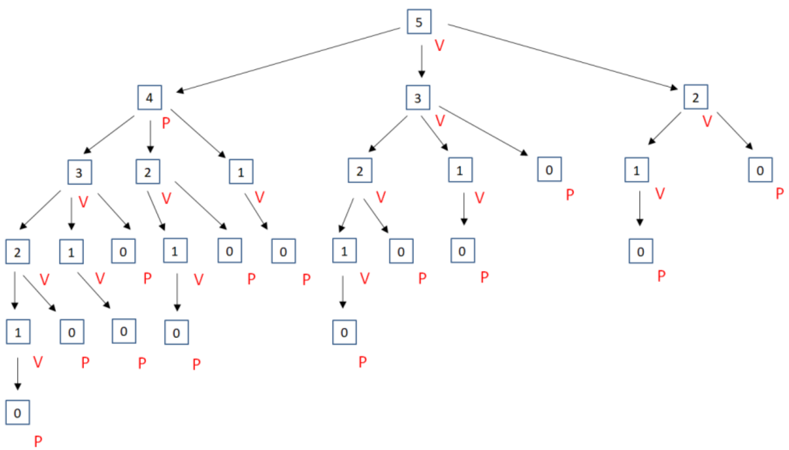
- Una posizione è vincente (V) se da essa si può passare ad almeno una posizione perdente;
- Una posizione è perdente (P) se da essa si può passare solo a posizioni vincenti o se da queste non ci si può muovere

Per analizzare le diverse posizioni si deve tener presente che:

- tutte le posizioni terminali sono posizioni perdenti;
- una posizione è vincente se da essa si può passare ad almeno una posizione perdente;
- una posizione è perdente se da essa si può passare solo a posizioni vincenti.

E' sempre possibile quindi partendo dalle posizioni finali, etichettare via via tutto il grafo fino alla posizione iniziale.

Nell'esempio del gioco a sottrazione si ha:



Se la posizione iniziale è vincente, vuol dire che c’è una strategia vincente per il primo giocatore che consiste nello scegliere ogni volta una posizione P.

2.5 Teoremi sui giochi imparziali.

- In ogni gioco imparziale ogni posizione del gioco è o di tipo V o di tipo P
- In ogni gioco imparziale esiste sempre una strategia vincente per il primo o per il secondo giocatore

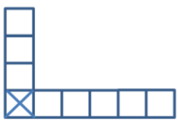
3. Varianti del Chomp

Presenteremo ora alcune varianti del Chomp scegliendo di volta in volta tra le due seguenti alternative:

- adottare le regole del chomp a partire da una configurazione iniziale differente dalla “classica” tavoletta rettangolare;
- stabilire dei vincoli alla mossa del “morso”.

3.1 L-Chomp

L’L-Chomp è una variante del Chomp nel quale la configurazione iniziale ha la forma di una “elle”:



$L_{4,6}$

Indicheremo questa configurazione con $L_{m,n}$ dove m e n indicano rispettivamente i quadretti sul braccio verticale e su quello orizzontale della L.

3.1.1 Proprietà dell' L-Chomp

- Se $m = n$ esiste una strategia vincente per il secondo giocatore;
- se $m \neq n$ esiste una strategia vincente per il primo giocatore.

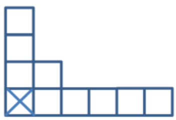
Dimostrazione

Se $m = n$ il secondo giocatore vince copiando la mossa che il primo effettua in uno dei due bracci della L nell'altro braccio ("strategia simmetrica")

Se $m \neq n$ il primo giocatore nella sua prima mossa rende i due bracci di uguale lunghezza, poi continua la partita adottando la strategia simmetrica.

3.2 L*-Chomp

Nell'L*-Chomp la configurazione iniziale ha la seguente forma:



$L^*_{4,6}$

Indicheremo questa configurazione con $L^*_{m,n}$.

3.2.1 Proprietà dell' L*-Chomp

- Se $L^*_{m,n}$ $m = 2k$ e $n = 2k+1$ (oppure $m = 2k+1$ e $n = 2k$) con $k \geq 0$ esiste una strategia vincente per il secondo giocatore;
- altrimenti esiste una strategia vincente per il primo giocatore.

\- Dimostrazione –
(Per induzione generalizzata sul numero dei quadretti.
Senza perdita di generalità possiamo considerare configurazioni con il numero delle righe m minore o uguale a quello delle colonne n)

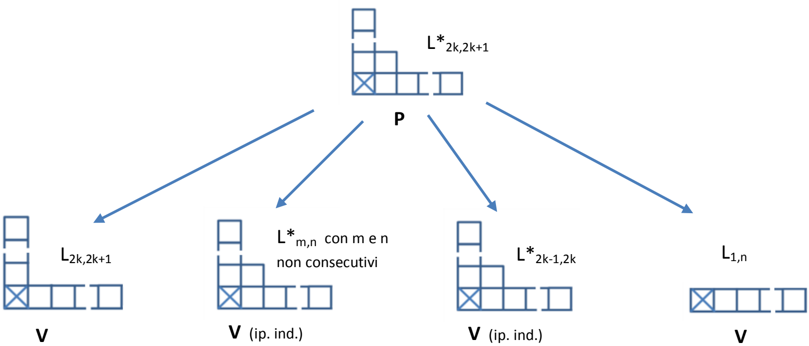
<u>Passo base:</u> $L^*_{2,2}$

$L^*_{2,2}$

E' una configurazione di tipo P (chomp quadrato di dimensione 2)

<u>Passo induttivo:</u>

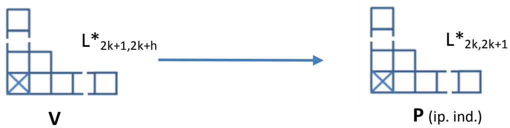
Caso 1: $L^*_{2k,2k+1}$ con $k \geq 1$



Caso 2: $L^*_{m,m}$ con $m \geq 2$

Caso 3: $L^*_{2k,2k+h}$ con $k \geq 1$ e $h > 1$

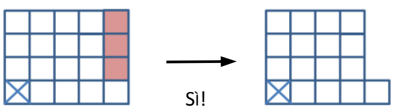
Caso 4: $L^*_{2k+1,2k+h}$ con $k \geq 1$ e $h > 1$

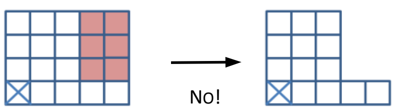


3.3 I-Chomp

Nell'I-Chomp ad ogni mossa si possono eliminare solo quadretti appartenenti ad una <u>sola</u> colonna o ad una <u>sola</u> riga.

Es:

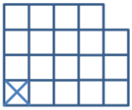




3.3.1 Proprietà dell'I-Chomp

Configurazioni pivot

L'I-Chomp possiede una configurazione "pivot" che è la medesima del Chomp classico: la tavoletta privata del quadratino in alto a destra:



Ne segue, per l'argomento della "mossa rubata", che nell' I-Chomp c'è sempre una strategia vincente per il primo giocatore.

I-Chomp 1×n e 2×n

In entrambi i casi il primo giocatore può vincere applicando le medesime strategie del Chomp classico (vedi 1.2)

Notazione

Indichiamo con $\text{I-C}_{m,n,1}$ l' I-Chomp che ha la configurazione iniziale formata da tre righe di lunghezza m, n e 1 con $m \geq n \geq 1$:

$\text{I-C}_{m,n,\,1}$

Lemma.

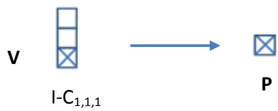
Dato un $\text{I-C}_{m,n,1}$ si ha:

- se m = 2k e n = 2k con k≥1   o se m = 2k+3 e n = 2k+1 con k≥0 esiste una strategia vincente per il secondo giocatore;
- altrimenti esiste una strategia vincente per il primo giocatore.

– Dimostrazione –

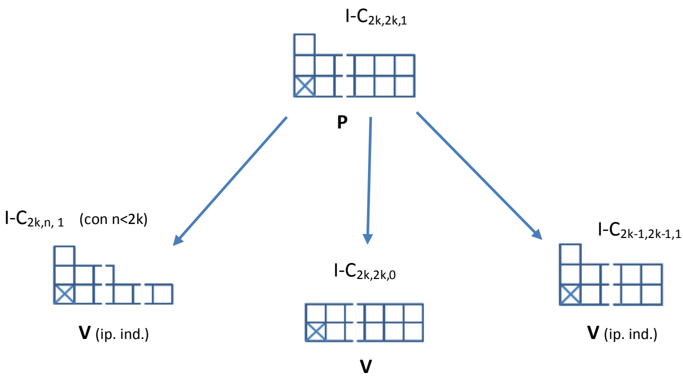
(Per induzione generalizzata sul numero dei quadretti. Senza perdita di generalità possiamo considerare configurazioni con il numero delle righe m minore o uguale a quello delle colonne n)

<u>Passo base:</u>   m = n = 1

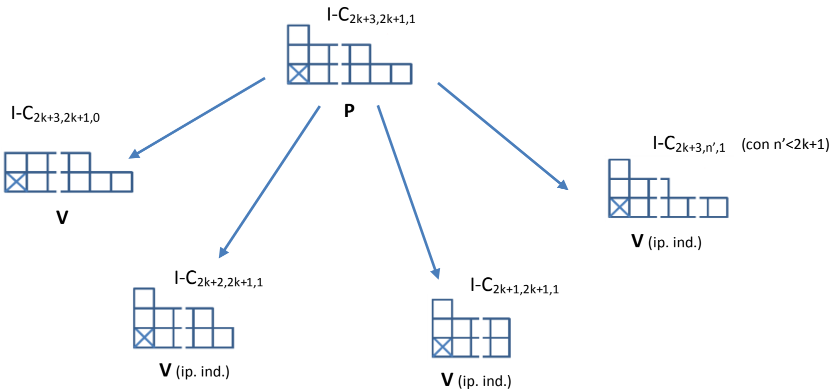


<u>Passo induttivo:</u>

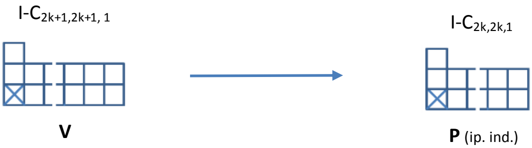
Caso 1:   m = n = 2k (con k≥1)



Caso 2: $m = 2k+3$ e $n = 2k+1$ (con $k \geq 0$)

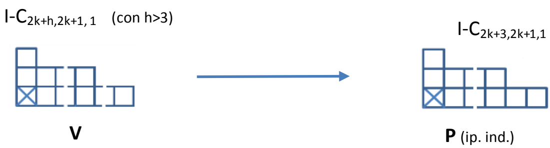


Caso 3: $m = 2k+1$ e $n = 2k+1$ (con $k \geq 0$)



Caso 4: $n = 2k$ (con $k \geq 0$)

Caso 5: $m = 2k+h$ e $n = 2k+1$ (con $k \geq 0$ e $h > 3$)



Caso 6: $m = 2k+2$ e $n = 2k+1$ (con $k \geq 0$)

I-$C_{2k+2,2k+1,\,1}$ I-$C_{2k+3,2k+1,0}$

V **P** (ip. ind.)

<u>I-Chomp 3×n</u>

Per n pari può essere descritta strategia vincente per il primo giocatore.

- Dimostrazione –

Grazie la lemma appena dimostrato si ha:

I-$C_{2k,2k,2k}$ I-$C_{2k,2k,1}$

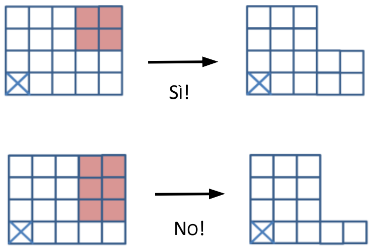
V **P**

Oss: il caso n dispari è ancora un problema aperto

3.4 □-Chomp

Lo □-Chomp (o "Square Chomp") è una variante del Chomp nel quale ad ogni mossa i quadratini eliminati devono formare dei quadrati, in sostanza sono ammessi solo "morsi" quadrati.

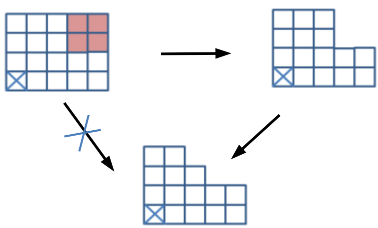
Es:



3.4.1 Proprietà dell’ □-Chomp

<u>Mancanza di configurazioni pivot</u>

E’ sufficiente osservare che dopo il morso quadrato del primo giocatore, il secondo può sempre ottenere con la sua mossa una configurazione in cui la parte mancante non è un quadrato



<u>□-Chomp 1×n.</u>

Se la configurazione di partenza è una tavoletta 1×n come in figura:

allora

- se n è pari esiste una strategia vincente per il primo giocatore
- se n è dispari esiste una strategia vincente per il secondo giocatore

- Dimostrazione -

E’ sufficiente notare che i morsi permessi tolgono ogni volta un solo quadretto.

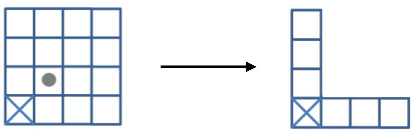
□-Chomp $2\times n$.

Se la configurazione di partenza è una tavoletta $2\times n$ come in figura:

il primo giocatore può vincere applicando la medesima strategia dello “scalino” del Chomp classico.

□-Chomp $n\times n$.

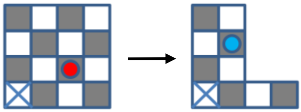
Se la configurazione di partenza è una tavoletta quadrata $n\times n$, la restrizione dei morsi quadrati non impedisce al primo giocatore di vincere adottando la strategia che si usa nel Chomp classico, iniziando con la mossa:



per poi proseguire “copiando” ogni volta la mossa del secondo giocatore (“strategia simmetrica”).

3.5 Chessboard-Chomp

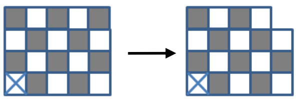
Il Chessboard-Chomp è una variante del Chomp nel quale la tavoletta è colorata a scacchi e i due giocatori effettuano un morso classico partendo solo da quadretti neri (il quadretto avvelenato è bianco). Es:



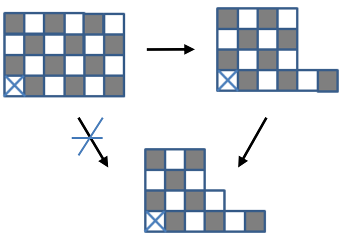
3.5.1 Proprietà del Chessboard-Chomp

<u>Configurazioni pivot</u>

Se la casella in alto a destra è nera, la sua eliminazione conduce ad una configurazione pivot e quindi in questo caso esiste una strategia vincente per il primo giocatore:

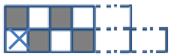


Se la casella in alto a destra è bianca, non esistono configurazioni pivot perché ogni mossa del primo giocatore non può ridursi all'eliminazione del solo quadratino in alto a destra. Es:



Notazione

Indichiamo con $CC_{m,n}$ il Chessboard-Chomp che ha la configurazione iniziale formata da due righe di lunghezza m, n con $m \geq n$:



$CC_{m,n}$

Lemma.

Dato un $CC_{m,n}$ si ha:

- se $m = 2k$ e $n = 2k$ (con $k \geq 1$) o $m = 2k+1$ e $n = 2k$ (con $k \geq 0$) o $n = 2k+1$ e $m=2k+2$ (con $k \geq 0$) o $n = 2k+1$ e $m=2k+3$ (con $k \geq 0$) esiste una strategia vincente per il secondo giocatore;
- altrimenti esiste una strategia vincente per il primo giocatore.

\- Dimostrazione -

(Per induzione generalizzata sul numero dei quadretti)

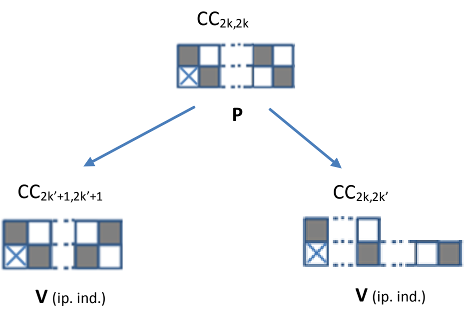
Passo base: $m = 1$, $n = 0$

$CC_{1,0}$

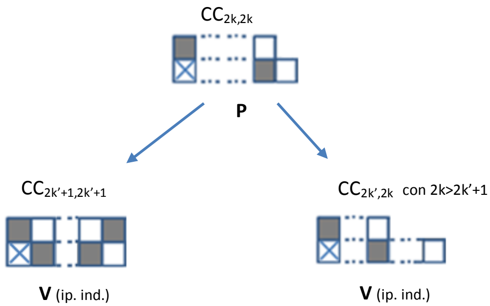
P

Passo induttivo:

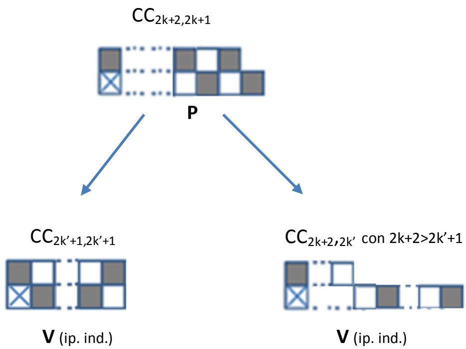
Caso 1: $m = n = 2k$ (con $k \geq 1$)



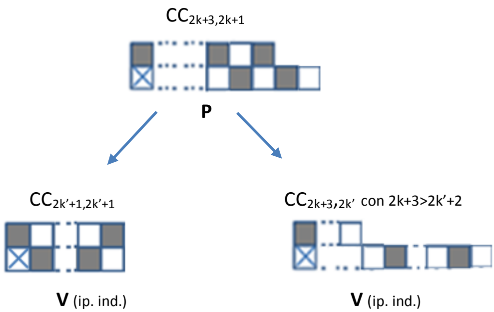
Caso 2: m = 2k+1 e n = 2k (con k>1)



Caso 3: n = 2k+1 e m = 2k+2 (con k≥0)



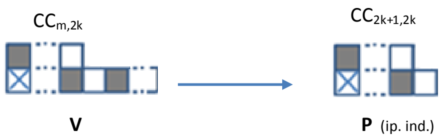
Caso 4: n = 2k+1 e m = 2k+3 (con k≥0)



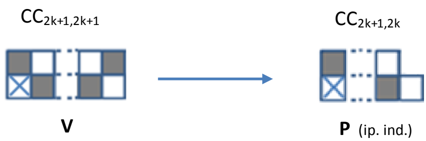
Caso 5: n = 2k e m > n+1 (con k≥0)

Sottocaso k=0 :

Sottocaso k>0 :



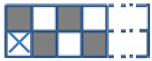
Caso 6: m = n = 2k+1 (con k≥0)



Caso 7: n = 2k+1 e m > n+2 (con k≥0)

Chessboard-Chomp 2×n.

Se il Chessboard-Chomp è giocato su una tavoletta 2×n,



allora

- se n è dispari esiste una strategia vincente per il primo giocatore
- se n è pari esiste una strategia vincente per il secondo giocatore

- Dimostrazione -

Segue immediatamente dal lemma precedente

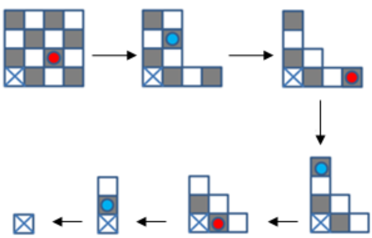
Chessboard-Chomp n×n.

Se il Chessboard-Chomp è giocato su una tavoletta quadrata n×n, allora esiste sempre una strategia vincente per il secondo giocatore.

- Dimostrazione -

Il secondo giocatore vince utilizzando la strategia simmetrica rispetto alla diagonale di caselle bianche ("interdette") che contiene quella avvelenata.

Esempio:

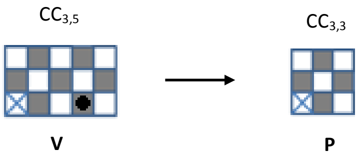


Chessboard-Chomp (2m+1)×n.

Se il Chessboard-Chomp è giocato su una tavoletta rettangolare (2m+1)×n con 2m+1 < n, allora esiste sempre una strategia vincente per il primo giocatore.

- Dimostrazione -

E’ una conseguenza di quanto stabilito per il Chessboard-Chomp n×n



3.6 ∞-Chomp

Gli ∞-Chomp sono varianti del Chomp nel quale la tavoletta contiene un numero infinito di quadretti.

3.6.1 Proprietà degli ∞-Chomp

Chomp 1×∞.

Se il Chomp è giocato su una tavoletta 1×∞, allora esiste banalmente una strategia vincente per il primo giocatore:

Chomp 2×∞.

Se il Chomp è giocato su una tavoletta 2×∞, allora esiste una strategia vincente per il secondo giocatore.

- Dimostrazione -

1° caso: se il primo giocatore sceglie un quadretto nella riga superiore, il secondo giocatore vince con la strategia “gradino”

Es:

2° caso: se il primo giocatore sceglie un quadretto nella riga inferiore, il secondo giocatore vince anche questa volta con la strategia “gradino”

Es:

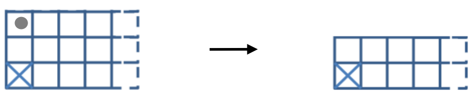
<u>Chomp $n\times\infty$ con $n>2$</u>

Se il Chomp è giocato su una tavoletta $2\times\infty$ con $n>2$, allora esiste una strategia vincente per il primo giocatore.

- Dimostrazione -

Dopo aver scelto il quadretto di due posti più alto di quello avvelenato, il primo giocatore prosegue con la strategia del secondo giocatore nel Chomp $2\times\infty$.

Es:



Chomp ∞×∞.

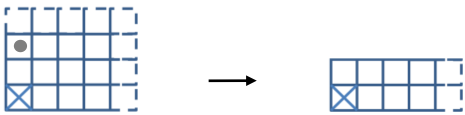
Se il Chomp è giocato su una tavoletta ∞×∞, allora esiste una strategia vincente per il primo giocatore.

- Dimostrazione -

Il primo giocatore ha a disposizione due strategie:

1^ strategia: dopo aver scelto il quadretto in alto a destro di quello avvelenato, prosegue con la strategia simmetrica. Es:

2^ strategia: dopo aver scelto il quadretto di due posti più alto di quello avvelenato, prosegue con la strategia del secondo giocatore nel Chomp 2×∞. Es:



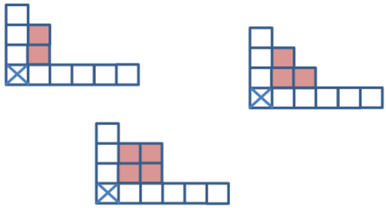
4. Conclusioni

La ricerca qui illustrata potrebbe essere sviluppata lungo varie direttive.

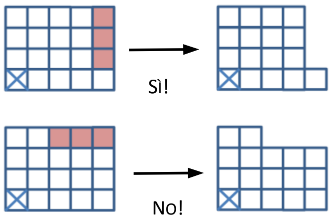
In primo luogo le analisi svolte hanno individuato una serie di problemi aperti. In particolare abbiamo visto che nell'I-Chomp c'è una strategia vincente per il primo giocatore, tuttavia solo in casi particolari abbiamo potuto esibirla (ad esempio (crf. 3.1.1) nell'I-Chomp 3×n con n pari.

Un’altra strada è quella di continuare ad introdurre varianti del Chomp classico. Ecco di seguito un possibile elenco.

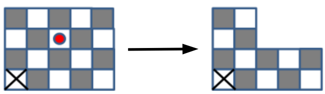
- L- Chomp “speciali”: esempio



- I-vertical- Chomp: esempio



- WhiteChessboard-Chomp: si possono scegliere solo i quadretti bianchi:



- Varianti di Chomp transfiniti

Infine vale la pena ricordare che per un’analisi più approfondita del Chomp e delle sue varianti si potrebbe convenientemente ricorrere ad apparati formali della moderna teoria dei giochi come ad esempio la teoria di Grundy-Sprague [6].

5. Bibliografia e sitografia

[1] http://www.dm.unipi.it/~gaiffi/papers/giochi.pdf

[2] Martin Gardner, *Mathematical Games*. Scientific American, Jan.

1973, pp.110-111.

[3] http://www.math.ucla.edu/~tom/Games/chomp.html

[4] Emanuele Delucchi, Giovanni Gaiffi, Ludovico Pernazza, *Giochi e percorsi matematici*, Springer

[5] https://it.wikipedia.org/wiki/Chomp

[6] http://bertoni.di.unimi.it/Giochi_combinatori_e_complessita.pdf