QUADRILATERO DI AREA MASSIMA ASSEGNATI I LATI

Margherita Moretti (3D P.N.I.)
Viviana Scoca (3D P.N.I.)
Simone Moretti (3H P.N.I.)

Abstract

Si affronta il problema della determinazione del quadrilatero di area massima note le misure dei lati, utilizzando contemporaneamente strumenti analitici e sintetici.

0. Introduzione

In questo lavoro si affronta un tipico esempio di massimo: la ricerca di quadrilateri di area massima tra quelli aventi le stesse misure dei lati. Tale problema oltre che interesse in sé può avere anche risvolti pratici [1]. Stabilite all'inizio alcune condizioni di compatibilità a cui devono soddisfare quattro numeri affinché essi siano le misure dei lati di un quadrilatero, si condurrà la ricerca nell'insieme dei quadrilateri che hanno almeno una diagonale interna. Si arriverà quindi alla verifica della proprietà di massimalità per i quadrilateri ciclici. Per essi si porranno le questioni di esistenza, unicità e costruibilità. L'apparato teorico e pratico usato si colloca nell'ambito della trigonometria e dell'analisi matematica.

1. Costruibilità della figura

Assegnate le misure di un numero finito di segmenti non è garantita in generale l'esistenza di un poligono avente essi come lati. In caso affermativo diremo che il poligono è "costruibile". Di seguito studiamo il problema della costruibilità di un triangolo e di un quadrilatero.

1.1 Proposizione. Costruibilità di un triangolo

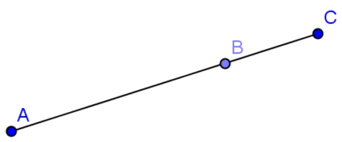
Dati a, b, c $\in \mathbb{R}^+$ esiste un triangolo (anche degenere) ABC con:
$\overline{AB} = a$; $\overline{BC} = b$; $\overline{AC} = c$ sse $|a-b| \leq c \leq a+b$

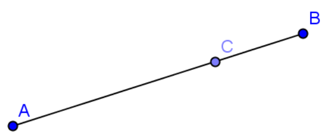
Dim.

E' sufficiente notare che $|a-b| \leq c \leq a+b$ *sse* $\begin{array}{l} c \leq a+b \\ a \leq b+c \\ b \leq a+c \end{array}$

Casi degeneri

$c = a + b \Rightarrow \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

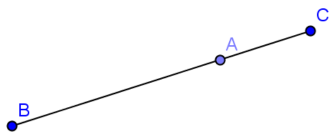




$|a-b| = c$
$\Rightarrow a - b = c \Rightarrow a = b + c \Rightarrow \overline{AB} = \overline{BC} + \overline{AC}$

oppure

$b - a = c \Rightarrow b = a + c \Rightarrow \quad \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AC}$



1.2 Proposizione. Costruibilità di un quadrilatero

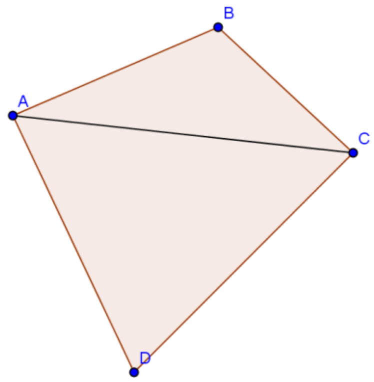
Dati a, b, c e d $\in \mathbb{R}^+$ esiste un quadrilatero ABCD con:

$\overline{AB} = a$; $\overline{BC} = b$; $\overline{CD} = c$; $\overline{DA} = d$ sse $max\{|a-b|, |c-d|\} \leq min\{a+b,\ c+d\}$

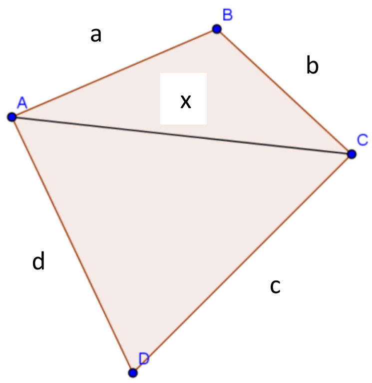
Dim.

($\Rightarrow$)

Consideriamo il quadrilatero ABCD:



La diagonale AC (dove $\overline{AC} = x$) formerà un triangolo ABC di lati a, b, x e un triangolo ACD di lati c, d, x che uniti lungo il lato AC formeranno il quadrilatero ABCD di lati a, b, c e d



allora per la condizione di costruibilità dei triangoli (prop 1.1) si avrà:

$|a-b| \leq x \leq a+b$

e

$|c-d| \leq x \leq c+d$

da cui:

$max\{|a-b|, |c-d|\} \leq x \leq min\{a+b,\ c+d\} \Rightarrow max\{|a-b|, |c-d|\} \leq min\{a+b,\ c+d\}$

($\Leftarrow$) Viceversa se $max\{|a-b|, |c-d|\} \leq min\{a+b,\ c+d\}$ allora esiste almeno un x tale che

$max\{|a-b|, |c-d|\} \leq x \leq min\{a+b, c+d\}$

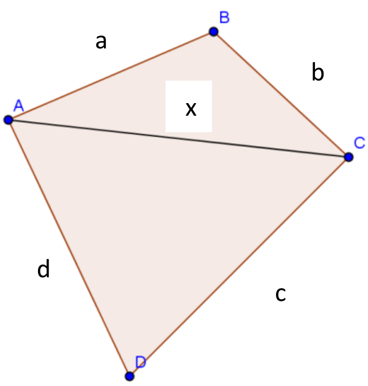
e quindi tale che:

$|a-b| \leq x \leq a+b$

e

$|c-d| \leq x \leq c+d$

E allora ancora per la prop 1.1 esiste un triangolo ABC di lati a, b, x e un triangolo ACD di lati c, d, x che uniti lungo il lato AC formeranno il quadrilatero: ABCD di lati a, b, c e d



Osservazione

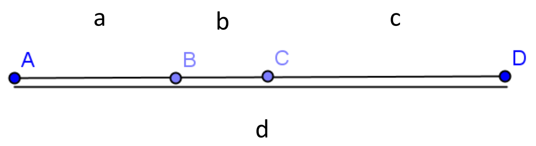
Nel caso in cui: $max\{|a-b|, |c-d|\} = min\{a+b,\ c+d\}$ esiste un unico quadrilatero (degenere) di lati a,b,c,d. Infatti in se $max\{|a-b|, |c-d|\} = min\{a+b,\ c+d\}$ si ha:

$|a-b| \leq |c-d| = a+b \leq c+d \ \Rightarrow$

oppure
$|c-d| \leq |a-b| = c+d \leq a+b$

In tutte e due i casi si ottiene che una delle misure a,b,c,d è la somma delle altre tre, e il quadrilatero che si ottiene è un segmento.

Es:



In questi caso il problema di massimo si banalizza.

Quando invece $max\{|a-b|,|c-d|\} < min\{a+b,\ c+d\}$ esistono infiniti quadrilateri (alcuni dei quali degeneri) di lati a,b,c,d.

Nel seguito ci occuperemo solo di questi quadrilateri che indicheremo con QUAD.

2 Quadrilateri di lati assegnati al variare di una diagonale.

Nel caso in cui: $max\{|a-b|,|c-d|\} < min\{a+b,\ c+d\}$
esistono infiniti valori x tali che: $max\{|a-b|,|c-d|\} \leq x \leq min\{a+b,\ c+d\}$

2.1 Descrizione

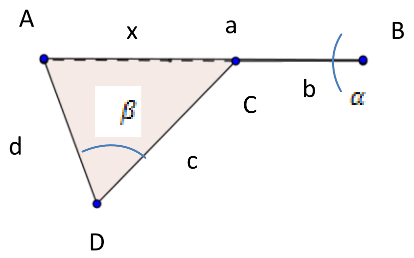
<u>1° caso</u>: $max\{|a-b|,|c-d|\} = x < min\{a+b,\ c+d\}$

Per la prop. 1.1 il quadrilatero è formato da un triangolo degenere e da uno non degenere.

Indicato con α l'angolo $\widehat{ABC}$ e con β l'angolo $\widehat{ADC}$, si ha in generale:

$$\alpha \cong 0 \quad e \quad \beta < \pi \qquad \text{oppure} \qquad \alpha < \pi \quad e \quad \beta \cong 0$$

Es:



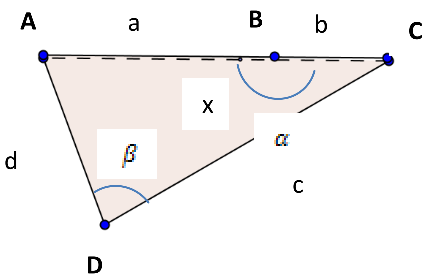
<u>2° caso</u>: $max\{|a-b|,|c-d|\} < x = min\{a+b,\ c+d\}$

Per la prop. 1.1 il quadrilatero è formato da un triangolo degenere e da uno non degenere:

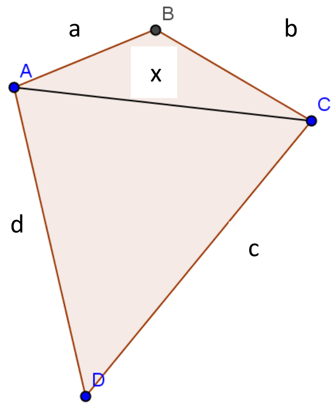
Indicato con α l'angolo $\widehat{ABC}$ e con β l'angolo $\widehat{ADC}$, si ha in generale:

$$\alpha \cong \pi \quad e \quad \beta > 0 \qquad \text{oppure} \qquad \alpha > 0 \quad e \quad \beta \cong \pi$$

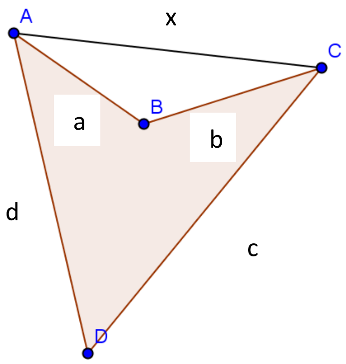
Es:



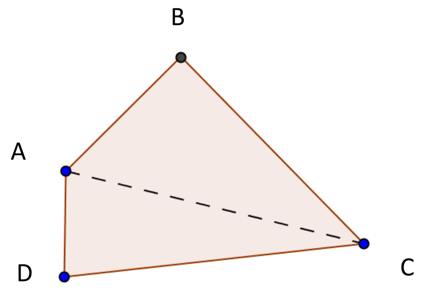
<u>3° caso</u>: $max\{|a-b|,|c-d|\} < x < min\{a+b,\ c+d\}$
per ognuno di questi valori di x esistono (a meno di simmetrie) due quadrilateri con lati assegnati (e ordinati) di lunghezza a,b,c e d:
uno con la diagonale AC interna al quadrilatero:

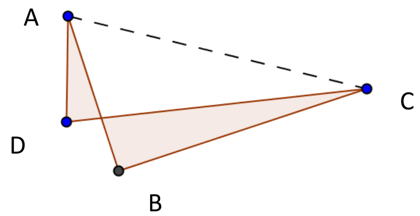


e uno con la diagonale AC esterna al quadrilatero



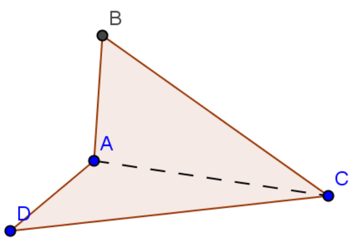
In certi casi il quadrilatero con la diagonale AC esterna può essere intrecciato:

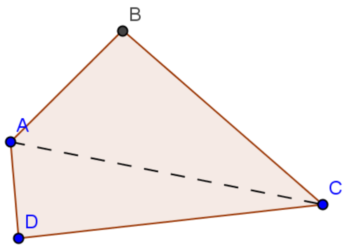




2.2 Quadrilateri con diagonale interna

Osserviamo che mentre il quadrilatero con diagonale esterna è sempre concavo, quello con diagonale interna può essere sia concavo che convesso:





Indicheremo con $QUAD_{AC}$ i quadrilateri di lati a,b,c,d con la diagonale AC interna.

Poiché ogni quadrilatero convesso ha entrambe le diagonali interne, indicando con Q_{CONV} i quadrilateri di lati a,b,c,d convessi, si ha:

$$QUAD_{CONV} \subseteq QUAD_{AC}$$

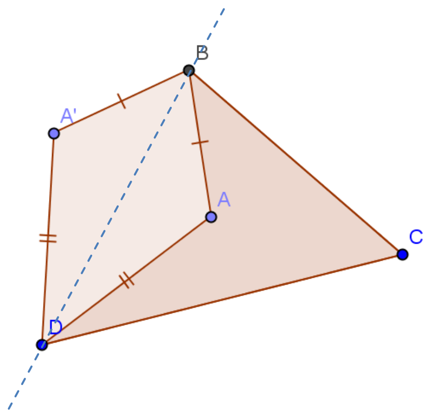
3 Problema del massimo

3.1 Definizione

Dato un insieme INS di quadrilateri di lati a,b,c,d , chiamiamo quadrilatero di area massima in INS un quadrilatero $Q \in INS$ tale che $\forall\ Q' \in INS$ $Area(Q) \geq Area(Q')$

3.2 Osservazione

Ogni quadrilatero Q di lati assegnati a,b,c,d concavo è <u>strettamente contenuto</u> in un quadrilatero convesso Q' avente lati della stessa lunghezza: dato il quadrilatero concavo ABCD basta infatti considerare il quadrilatero convesso A'BCD con A' simmetrico di A rispetto alla retta BD.



Il quadrilatero concavo ABCD di lati a,b,c,d è strettamente contenuto in quello convesso A'BCD anch'esso di lati a,b,c,d

Per i due quadrilateri vale quindi: Area(Q)<Area(Q')

3.3 Proposizione

Una quadrilatero Q di lati assegnati a,b,c,d ha area massima in QUAD se e soltanto se ha area massima in $QUAD_{AC}$

<u>Dim.</u>

Se Q ha area massima in QUAD non può essere concavo (vedi oss.3.2) quindi $Q \in QUAD_{CONV}$

ma essendo $QUAD_{CONV} \subseteq QUAD_{AC}$ si ha $Q \in QUAD_{AC}$, ed essendo la sua area maggiore di quelle di tutti i quadrilateri in QUAD , lo è anche per quelli di $QUAD_{AC}$

Viceversa se Q ha area massima in $QUAD_{AC}$ allora essendo $QUAD_{CONV} \subseteq QUAD_{AC}$ si ha che:

$\forall\ Q' \in QUAD_{CONV}$ Area(Q) ≥ Area(Q')

Sia ora Q' concavo, per l'oss 3.2 esiste un $Q'' \in QUAD_{CONV}$ tale che Area (Q'') ≥ Area (Q')

ma Area (Q) ≥ Area (Q'') quindi Area (Q) ≥ Area (Q')

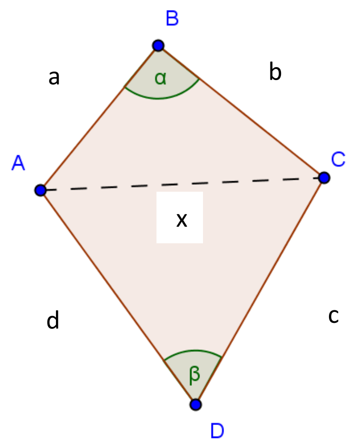
3.4 Osservazione

Per la prop 3.3 per la ricerca del quadrilatero di area massima in QUAD massimo è sufficiente limitarsi a

considerare i quadrilateri in $QUAD_{AC}$.

3.5 Proposizione. Area dei quadrilateri con una diagonale interna

Per ogni Q∈ $QUAD_{AC}$ ABCD, indicando con α l'angolo $\widehat{ABC}$ e con β l'angolo $\widehat{ADC}$



Si ha:

$$Area(Q) = \frac{\sqrt{4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\cos(\alpha+\beta) - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2}}{4}$$

<u>Dim.</u>

$$Area(Q) = Area(ABC) + Area(ACD) = \frac{ab\,sen\,\alpha}{2} + \frac{cd\,sen\,\beta}{2}$$

da cui :

$$2Area(Q) = ab\,sen\,\alpha + cd\,sen\,\beta$$

e quadrando e moltiplicando per 4:

$$\boxed{16Area^2(Q) = (ab\,sen\,\alpha + cd\,sen\,\beta)^2 = 4a^2b^2\,sen^2\,\alpha + 8abcd\,sen\,\alpha\,sen\,\beta + 4c^2d^2\,sen^2\,\beta}$$

ora per il teorema di Carnot applicato ai due triangoli si ha

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$$

da cui

$$a^2+b^2-c^2-d^2 = 2ab\cos\alpha - 2cd\cos\beta$$

e quadrando:

$$\boxed{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2 = (2ab\cos\alpha - 2cd\cos\beta)^2 = 4a^2b^2\cos^2\alpha - 8abcd\cos\alpha\cos\beta + 4c^2d^2\cos^2\beta}$$

Sommando le due uguaglianze

$$\begin{aligned}
&16Area^2(Q) + \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2 = \\
&4a^2b^2\,sen^2\alpha + 8abcd\,sen\alpha\,sen\beta + 4c^2d^2\,sen^2\beta + 4a^2b^2\cos^2\alpha - 8abcd\cos\alpha\cos\beta + 4c^2d^2\cos^2\beta \\
&= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 + 8abcd\,sen\alpha\,sen\beta - 8abcd\cos\alpha\cos\beta = \\
&4a^2b^2 + 4c^2d^2 + 8abcd\,(sen\alpha\,sen\beta - \cos\alpha\cos\beta) = \\
&4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\,(\cos\alpha\cos\beta - sen\alpha\,sen\beta) = \\
&4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\cos(\alpha+\beta) =
\end{aligned}$$

da cui:

$$16Area^2(Q) + \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\cos(\alpha+\beta)$$

e infine

$$Area(Q) = \frac{\sqrt{4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\cos(\alpha+\beta) - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2}}{4}$$

3.6 Proposizione.

Per ogni Q di $QUAD_{AC}$ si ha:

Q ciclico $\Rightarrow$ Q di area massima in $QUAD_{AC}$

Dim

Se Q è ciclico si ha $\alpha + \beta = \pi$, allora essendo la quantità $-8abcd\cos(\alpha+\beta)$ massima

quando $\cos(\alpha+\beta) = -1$ (cioè proprio per $\alpha + \beta = \pi$) , grazie alla prop. 3.5 per ogni altro $Q' \in QUAD_{AC}$

si ha:

$$\text{Area(Q)}=\frac{\sqrt{4a^2b^2+4c^2d^2+8abcd-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}}{4}\geq$$
$$\frac{\sqrt{4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd\cos(\alpha+\beta)-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}}{4}=\text{Area(Q')}$$

3.8 Prop. Quadrilatero di area massima.

Per ogni Q $\in$ $QUAD_{AC}$ si ha:

Q ciclico $\Rightarrow$ Q di area massima in QUAD

Dim

Segue immediatamente dalla prop 3.3

3.9 Osservazione

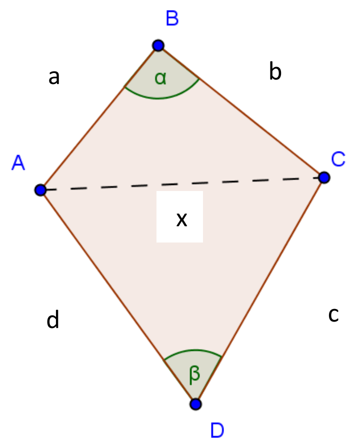
La prop. 3.8 ancora non risolve ancora il problema di massimo che ci siamo posti. Occorre infatti provare che in $QUAD_{AC}$ ci sia almeno un quadrilatero ciclico. Dimostreremo ora che tale quadrilatero esiste e che esso è unico.

4. Esistenza del quadrilatero ciclico

4.1 Angoli in funzione della lunghezza della diagonale.

Indicati con $x_1 = max\{|a-b|,|c-d|\}$ e con $x_2 = min\{a+b,\ c+d\}$

consideriamo per ogni $x\in[x_1, x_2]$ il quadrilatero Q in $QUAD_{AC}$ di diagonale AC lunga x



E indichiamo con α l'angolo $\widehat{ABC}$ e con β l'angolo $\widehat{ADC}$ al variare di x.

Per il teorema di Carnot applicato ai due triangoli ABC e ACD si ha:

$$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-x^2}{2ab} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}\right)$$

$$\cos\beta = \frac{c^2+d^2-x^2}{2cd} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arccos\left(\frac{c^2+d^2-x^2}{2cd}\right)$$

Si hanno così le due funzioni di x

$$\alpha : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \alpha(x) = \arccos\left(\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}\right)$$

$$\beta : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \beta(x) = \arccos\left(\frac{c^2+d^2-x^2}{2cd}\right)$$

4.2 Propoposizione

Esiste $Q \in QUAD_{AC}$ tale che Q è ciclico

<u>Dim.</u>

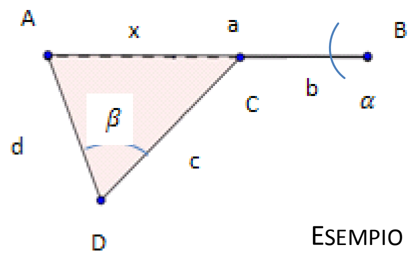
Indichiamo con φ (x) la funzione:

$\varphi : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \alpha(x) + \beta(x)$ dove $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sono state definite in 4.1

Ora φ (x) è continua in $[x_1, x_2]$ inoltre per quanto visto in 2.1 quando $x = x_1$

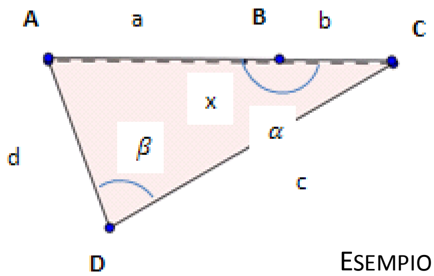
$\alpha \cong 0 \quad e \quad \beta < \pi$ oppure $\alpha < \pi \quad e \quad \beta \cong 0$



ESEMPIO

quindi $\varphi(x_1) < \pi$

mentre quando $x = x_2$



ESEMPIO

$\alpha \cong \pi \quad e \quad \beta > 0$ oppure $\alpha > 0 \quad e \quad \beta \cong \pi$

quindi $\varphi(x_2) > \pi$

Per il teorema dei valori intermedi si ha quindi che esiste x in (x_1, x_2) tale che $\varphi(x) = \alpha(x) + \beta(x) = \pi$

e quindi un $Q \in QUAD_{AC}$ ciclico.

5. Unicità del quadrilatero di area massima

5.1 Proposizione

E’ unico $Q \in QUAD_{AC}$ tale che Q è ciclico.

Dim.

La funzione $\varphi(x)$ è continua in $[x_1, x_2]$

ed è derivabile in (x_1, x_2) con derivata:

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\left(arccos\left(\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}\right) + arccos\left(\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}\right)\right) =$$

$$= \frac{x}{ab}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}\right)^2}} + \frac{x}{cd}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{c^2+d^2-x^2}{2cd}\right)^2}} =$$

$$= x\left(\frac{1}{ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}\right)^2}} + \frac{1}{cd\sqrt{1-\left(\frac{c^2+d^2-x^2}{2cd}\right)^2}}\right) =$$

Osserviamo ora che per ogni $x \in (x_1, x_2)$ si ha $\varphi'(x) > 0$.

Se ora esistessero due quadrilateri ciclici con diagonali AC lunghe x’ e x’’ $\in [x_1, x_2]$ si avrebbe:

$\varphi(x') = \pi = \varphi(x'')$ e per il teorema di Rolle dovrebbe esistere $x''' \in (x', x'')$ tale che $\varphi'(x''') = 0$

ma questo è assurdo perché $\varphi'(x) > 0$ in (x_1, x_2).

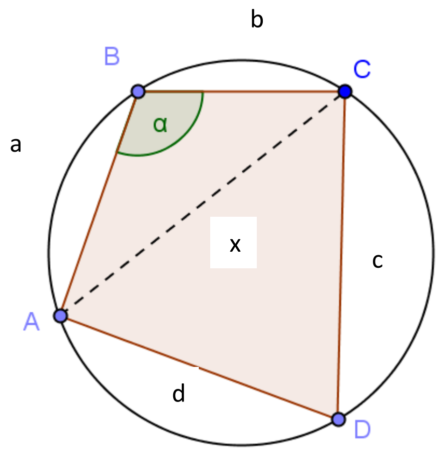
6. Costruzione del quadrilatero di area massima

Una volta stabilito che il quadrilatero di area massima è quello ciclico cerchiamo gli elementi che permettano la sua costruzione. In sostanza ci chiediamo come “costruire” il quadrilatero ciclico di lati assegnati.

6.1 Proposizione

Dati a, b, c e d $\in \mathbb{R}^+$ con
$max\{|a-b|, |c-d|\} < min\{a+b, c+d\}$

Il quadrilatero ciclico ABCD di lati $\overline{AB} = a$; $\overline{BC} = b$; $\overline{CD} = c$; $\overline{DA} = d$ è tale che



$$\alpha = arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right)$$

$$x = \sqrt{\frac{cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)}{ab + cd}}$$

<u>Dim.</u>

Per il teorema di Carnot applicato ai due triangoli ABC e ACD si ha:

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\alpha$$

$$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\ cos\beta$$

E risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\alpha \\ x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\ cos\beta \end{cases}$$

si ottiene:

$$cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

$$x^2 = \frac{cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)}{ab+cd}$$

6.2 Osservazione

La proposizione 6.1 ci permette di calcolare l'angolo α (e quindi anche $\beta = \pi - \alpha$) e la lunghezza x della diagonale AC. La conoscenza di uno dei due permette di individuare univocamente i due triangoli ABC e ACD , e quindi il quadrilatero ciclico (nel primo caso grazie al primo criterio di congruenza dei triangoli e nel secondo caso grazie al terzo).

6.3 Casi particolari

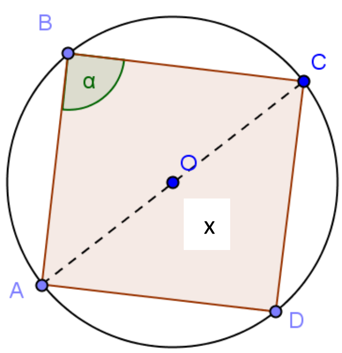
Terminiamo applicando le formule in 6.1 in alcuni casi particolari.

1° caso: a=b=c=d

$$\alpha = arccos\left(\frac{a^2+a^2-a^2-a^2}{2(a^2+a^2)}\right) = arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2(a^2+a^2)+a^2(a^2+a^2)}{a^2+a^2}} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

<u>Il quadrilatero ciclico è un quadrato</u>

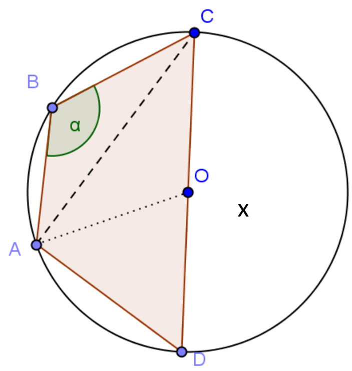


2° caso: a=b=c , d=2a

$$\alpha = arccos\left(\frac{a^2+a^2-a^2-4a^2}{2(a^2+2a^2)}\right) = arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{2a^2(a^2+a^2)+a^2(a^2+4a^2)}{a^2+2a^2}} = a\sqrt{3}$$

<u>Il quadrilatero ciclico è un semi esagono regolare</u>



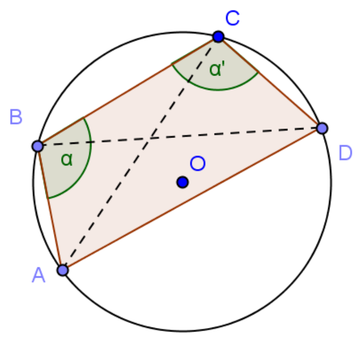
3° caso: a=c

Applicando le formule ad entrambe le diagonali AC e BD e agli angoli α = $\widehat{ABC}$ α' = $\widehat{BCD}$ si ha

$$\alpha = arccos\left(\frac{a^2+b^2-a^2-d^2}{2(ab+ad)}\right) = arccos\left(\frac{a^2+b^2-a^2-d^2}{2(ab+ad)}\right) = \alpha'$$

$$x = \sqrt{\frac{ad(a^2+b^2)+ab(a^2+d^2)}{ab+ad}} = \sqrt{\frac{ad(a^2+b^2)+ab(a^2+d^2)}{ab+ad}} = x'$$

<u>Il quadrilatero ciclico è un trapezio isoscele</u>



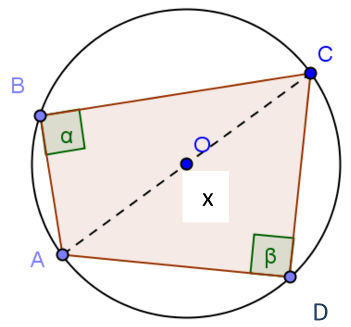
Osservazione: appartengono a questa famiglia di quadrilateri tutti quelli trattati nei casi precedenti

4° caso: $a^2+b^2=c^2+d^2$

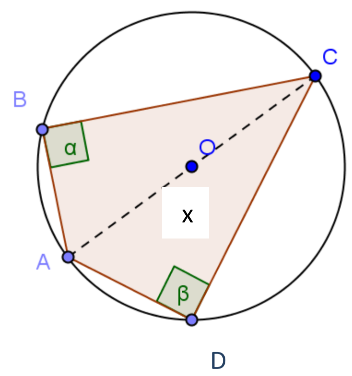
$$\alpha = arccos\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+ad)}\right) = arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{cd(a^2+b^2)+ab(a^2+b^2)}{ab+ad}} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(ab+ad)}{ab+ad}} = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{c^2+d^2}$$

Il quadrilatero ciclico è formato da due triangoli rettangoli aventi come ipotenusa la diagonale AC



Osservazione: appartiene a questa famiglia di quadrilateri "l'aquilone" nel quale a=d e b=c



7.Conclusioni

Un risultato generale afferma [3] che il poligono di n lati di area massima è ancora quello ciclico, si potrebbe dunque ripetere ciò che si è fatto qui per i quadrilateri, anche per i pentagoni, gli esagoni,..ecc. Cercando lì dove è possibile risultati generali.

Si potrebbe inoltre indagare sui quadrilateri ottenuti come somma di triangoli rettangoli (vedi caso 4 par.6.3) sfruttando la ricchezza di proprietà che tali triangoli possiedono.

Nell'articolo [4] è riportata una costruzione geometrica del quadrilatero ciclico note le misure dei quattro lati. Sarebbe interessante studiare tale costruzione alla luce dei risultati elencati nel par. 6.

8. Bibliografia e sitografia

[1] *http://rudimatematici-lescienze.blogautore.espresso.repubblica.it/2011/01/31/il-problema-di-gennaio-509-armi-di-costruzione-di-massa/*

[2] *http://www.dmf.unisalento.it/~scienze/Download/Tolomeo.pdf*

[3] *http://www.vialattea.net/esperti/php/risposta.php?num=13554*

[4] http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Constructions/CyclicQuadrilateral.shtml