PROBLEMI SULLE TORRI DI HANOI

A.S. 2010 - 2011

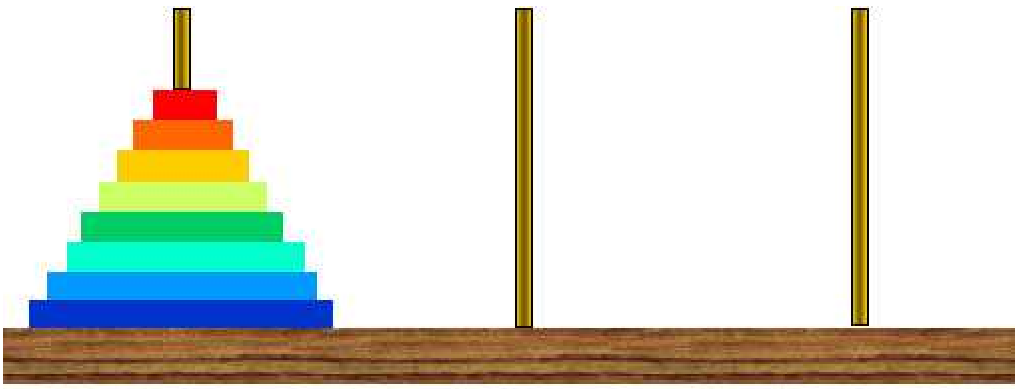
MARGHERITA MORETTI (1D)
CATERINA COSTANZO (1D)
SARA MANCINI (1D)
SIMONE MORETTI (1H)
GABRIELE ARGIRÒ (1D)

ABSTRACT

Nel presente articolo si studiano alcune varianti del gioco classico della torre di Hanoi legate a vincoli nel movimento dei pezzi del gioco e alle colorazioni. In questo ultimo caso si ottiene un algoritmo risolutivo per il gioco classico equivalente a quello noto che permette di trascurare il meccanismo ricorsivo.

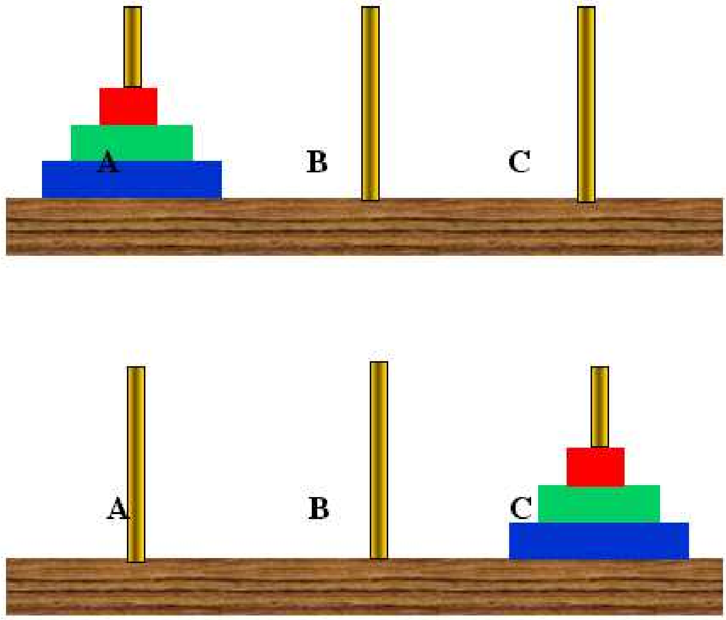
1.INTRODUZIONE: LA TORRE DI HANOI

Il gioco della "Torre di Hanoi" [1], nella sua variante classica, si presenta costituito da tre aste (o pioli), in una delle quali sono infilati alcuni dischi di misura diversa, disposti in ordine di grandezza, partendo dal basso, dal più grande al più piccolo.



LA TORRE DI HANOI CON OTTO DISCHI

Le regole del gioco sono due e molto semplici: si può spostare solo il disco situato sulla sommità di una torre, e un disco più grande non può essere posato sopra un disco più piccolo.
Lo scopo è quello di spostare tutti i dischi su un'altra asta in modo che risultino ancora disposti nello stesso ordine.



CONFIGURAZIONE INIZIALE E FINALE DELLA TORRE DI HANOI CON TRE DISCHI

Il matematico Édouard Lucas (Amiens, 4 aprile 1842 – Parigi, 3 ottobre 1891) [2], per rendere il gioco della la torre di Hanoi, da lui inventato, più interessante, inventò l’esistenza di una antica leggenda indiana che recitava così:
« Nel grande tempio di Brahma a Benares, su di un piatto di ottone, sotto la cupola che segna il centro del mondo, si trovano 64 dischi d'oro puro che i monaci spostano uno al giorno infilandoli in un ago di diamanti, seguendo l'immutabile legge di Brahma: nessun disco può essere posato su un altro più piccolo. All'inizio del mondo tutti i 64 dischi erano infilati in un ago e formavano la Torre di Brahma. Il processo di spostamento dei dischi da un ago all'altro è tuttora in corso. Quando l'ultimo disco sarà finalmente piazzato a formare di nuovo la Torre di Brahma in un ago diverso, allora arriverà la fine del mondo e tutto si trasformerà in polvere.»
Per spostare 64 dischi occorrono 18.446.744.073.709.551.616 mosse per un totale di 50.539 migliaia di miliardi di anni. Anche spostando un disco al secondo i monaci impiegherebbero la bellezza di 584 miliardi di anni e per confronto basti pensare che: la nascita del pianeta Terra risale a circa 4.5 miliardi di anni fa, mentre la vita compare sul nostro pianeta circa 3.8 miliardi di anni fa. L’età dell’Universo, dal Big Bang ad oggi, è stimata sui 15 miliardi di anni. Prestando fede alla leggenda quindi si può ben sperare che la fine del mondo sia abbastanza lontana.

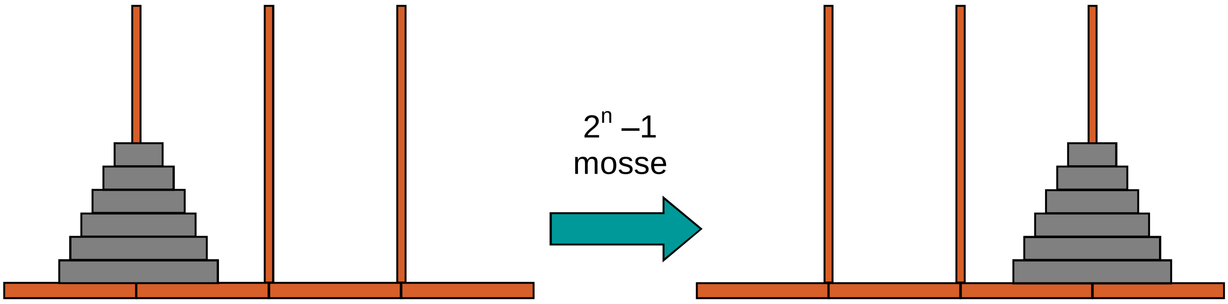
2. LA SOLUZIONE DEL GIOCO (VARIANTE CLASSICA)

Illustriamo ora la soluzione nota che presenta alla base un meccanismo “ricorsivo”, cioè per spostare n dischi si usa il procedimento per spostare n-1 dischi.

Ora siccome è banale spostare una torre di un solo disco, si userà tale procedimento per spostare una torre di 2 dischi, e con tale procedimento si potrà spostare una torre di 3 dischi e così via per ogni torre di altezza arbitraria
Chiameremo tale procedimento “soluzione ricorsiva” [3].

2.1 TEOREMA (SOLUZIONE RICORSIVA)

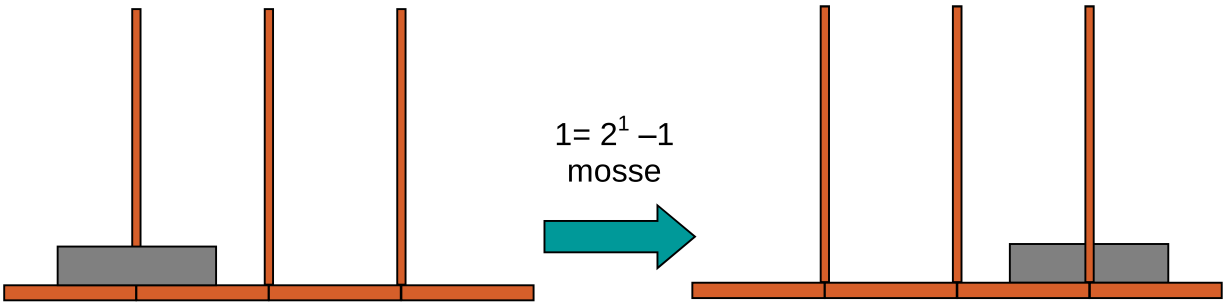
Per ogni n ≥ 1 (numero di dischi nella torre di partenza), c'è una sequenza di $2^n - 1$ mosse che permette di spostare l'intera torre in uno dei pioli liberi.



Chiameremo tale sequenza di mosse "soluzione ricorsiva".

<u>Dimostrazione</u> (per induzione)

- Base dell'induzione: verifichiamo la tesi per n=1.

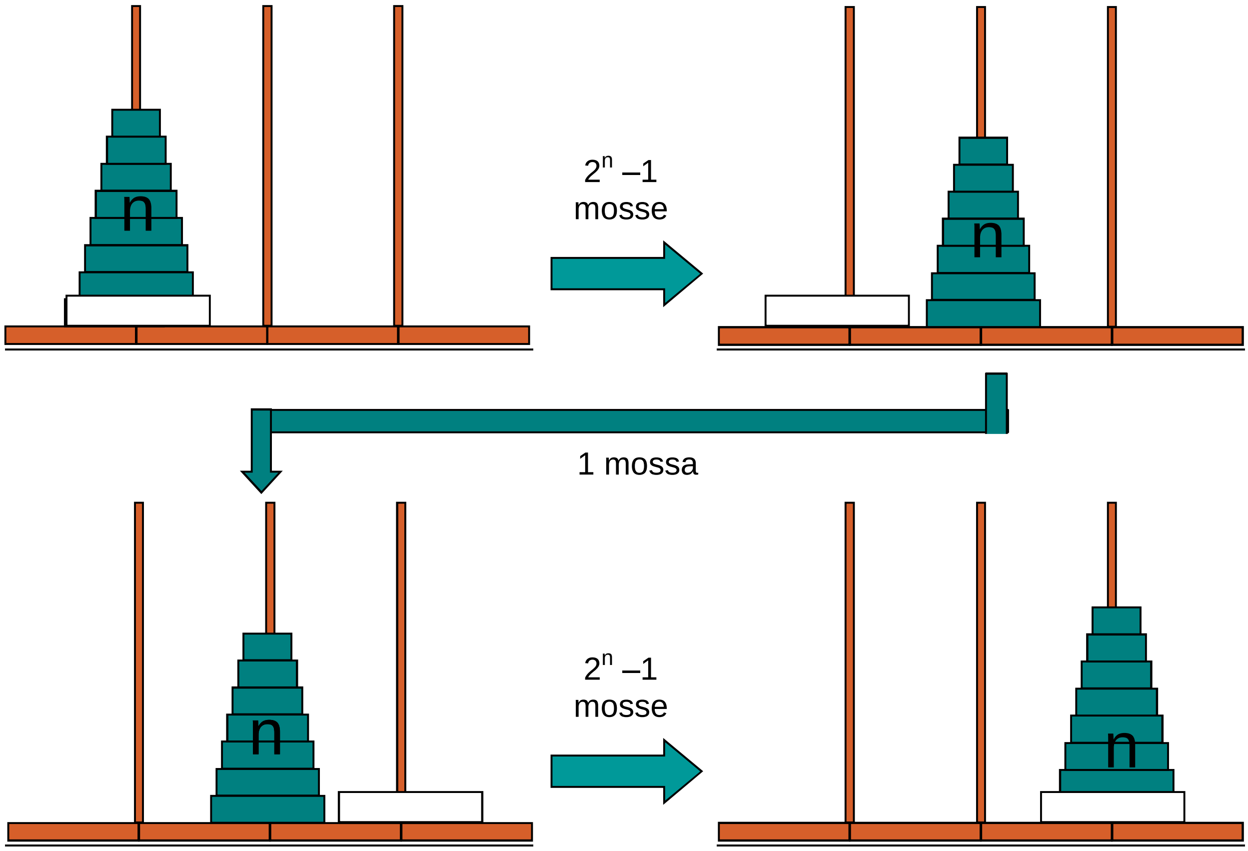


poiché per risolvere il gioco con n=1 serve proprio una mossa, la base dell'induzione è stata dimostrata.

- Passo induttivo

Adesso proviamo la tesi per un qualunque n+1 supponendo sia vera per n.

Partiamo dunque da una torre con n+1 dischi. Osserviamo che il disco alla base della torre, essendo più grande di tutti, non ostacola con la sua presenza la sequenza di 2^n-1 mosse che per ipotesi induttiva permette lo spostamento della torre formata dai restanti n dischi; ma allora la torre di n+1 dischi può essere spostata nel modo illustrato di seguito.



Quindi concludendo il numero di mosse è:

$(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2 \cdot 2^{n-1} - 1 = 2^{n+1} - 1$

Poiché abbiamo dimostrato anche il passo induttivo, il teorema è dimostrato.

Q.e.d.

Dimostriamo ora che la soluzione ricorsiva risolve il gioco della torre di Hanoi con il <u>minimo</u> delle mosse.

2.2 Teorema (Ottimalità della soluzione ricorsiva)

Ogni soluzione della torre di Hanoi con n dischi ha un numero di mosse m con

$$m \geq 2^n - 1$$

<u>Dimostrazione</u> (per induzione)

- Base dell'induzione: verifichiamo la tesi per n=1.

Ogni soluzione deve almeno spostare il disco quindi $m \geq 1 = 2^1 - 1$

- Passo induttivo

Adesso proviamo la tesi per un qualunque n+1 supponendo sia vera per n.

Consideriamo una generica soluzione della torre con n+1 dischi.

Nella sequenza di mosse prima o poi si dovrà spostare il disco alla base dalla sua posizione iniziale per infilarlo in un piolo libero, ma questo sarà possibile solo se la torre restante sarà stata posizionata in un altro piolo.

Per questa ultima operazione si saranno fatte m_1 mosse, e per ipotesi induttiva $m_1 \geq 2^n - 1$. Spostato il disco più grande il numero di mosse sarà $m_1 + 1$.

Occorrerà infine ricollocare la piramide con n dischi sul disco grande con m_2 mosse, e ancora per ipotesi induttiva $m_2 \geq 2^n - 1$.

Quindi concludendo $m = m_1 + 1 + m_2 \geq 2^n - 1 + 1 + 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$

Cioè: $m \geq 2^{n+1} - 1$

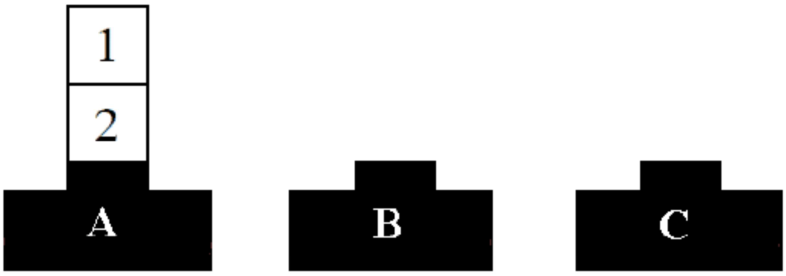
Q.e.d.

3.Spostamenti a “ passo uno”

Prendendo spunto da un quesito di una gara di matematica, si è voluta analizzare una variante del gioco classico; ecco il testo del problema:

Anna e le torri

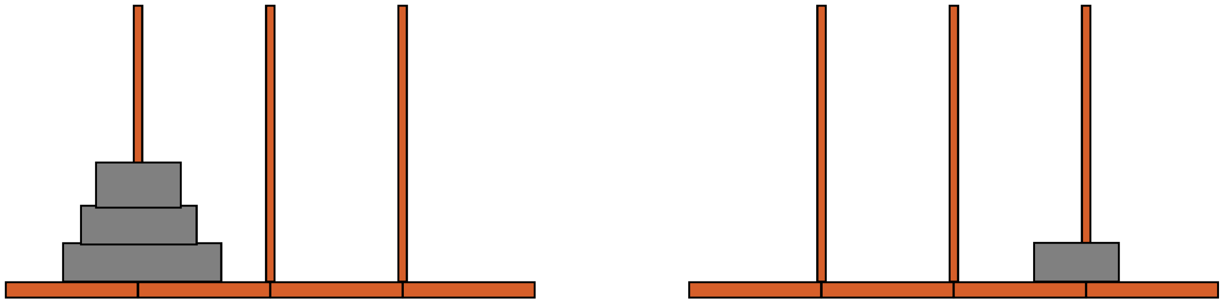
Con ciascuna mossa Anna sposta un cubo, dal piedistallo dove si trova, a quello vicino (alla sua destra o alla sua sinistra). Mai però, in nessuna fase del gioco, il cubo “2” può trovarsi sopra al cubo “1”.



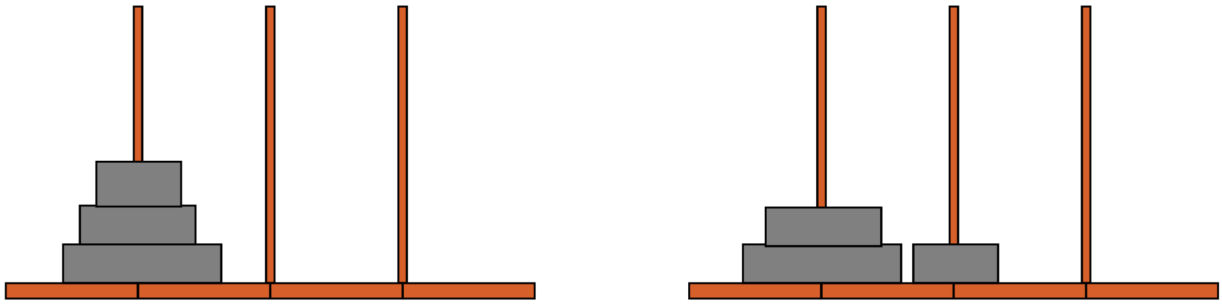
Quante mosse sono necessarie ad Anna, al minimo, per ricostruire la torre sul piedistallo C?

Semifinale italiana dei
Campionati Internazionali di Giochi Matematici
19 marzo 2011

Il problema porta a considerare una variante del gioco nel quale oltre agli altri vincoli è permesso spostare dischi solo da un piolo ad uno adiacente.



MOSSA NON PERMESSA



MOSSA PERMESSA

Introducendo questa ulteriore regola è lecito aspettarci che il numero delle mosse debba aumentare; e che vi sarà un diverso numero di mosse a seconda della distanza tra il piolo di partenza e il piolo di arrivo. Si dovranno dunque analizzare due casi: il piolo di partenza e di arrivo sono adiacenti (che chiameremo "arrocco corto"); il piolo di partenza e di arrivo non sono adiacenti (che chiameremo "arrocco lungo").

Nei due teoremi che seguono daremo nei due casi delle soluzioni ancora di tipo ricorsivo.
Useremo la seguente notazione:

T_{n-1} N		
A	B	C

T_{n-1} indica una torre di n-1 dischi e N il disco alla base che, nell'insieme, rappresentano una torre di n dischi posti sul piolo A.

3.1 TEOREMA (SOLUZIONE RICORSIVA PER L'ARROCCO CORTO)

Per ogni n ≥ 1 , la torre di Hanoi di n dischi posta in un piolo (A o B) può essere spostata in un piolo adiacente (B o C) con una sequenza di $\frac{3^n-1}{2}$ mosse.

<u>Dimostrazione</u> (per induzione)

- Base dell'induzione: n=1

1° caso: si parte da un piolo laterale e si arriva al piolo centrale

1		
A	B	C

$\xrightarrow{1}$

	1	
A	B	C

2° caso: si parte dal un piolo centrale e si arriva ad un piolo laterale

	1	
A	B	C

$\xrightarrow{1}$

		1
A	B	C

In ogni caso occorrono: $1 = \frac{3^1-1}{2}$ mosse

- Passo induttivo: n→n+1

1° caso: si parte da un piolo laterale e si arriva al piolo centrale

T_N N+1		
A	B	C

$\xrightarrow{\frac{3^n-1}{2}}$

PER IPOTESI INDUTTIVA

N+1	T_N	
A	B	C

N+1	T_N	
A	B	C

$$\xrightarrow{\frac{3^n-1}{2}}$$

PER IPOTESI INDUTTIVA

N+1		T_N
A	B	C

N+1		T_N
A	B	C

$$\xrightarrow{1}$$

	N+1	T_N
A	B	C

	N+1	T_N
A	B	C

$$\xrightarrow{\frac{3^n-1}{2}}$$

PER IPOTESI INDUTTIVA

	T_N N+1	
A	B	C

Occorrono quindi:

$$\frac{3^n-1}{2}+\frac{3^n-1}{2}+1+\frac{3^n-1}{2}=3\frac{3^n-1}{2}+1=\frac{3^{n+1}-1}{2}$$

mosse

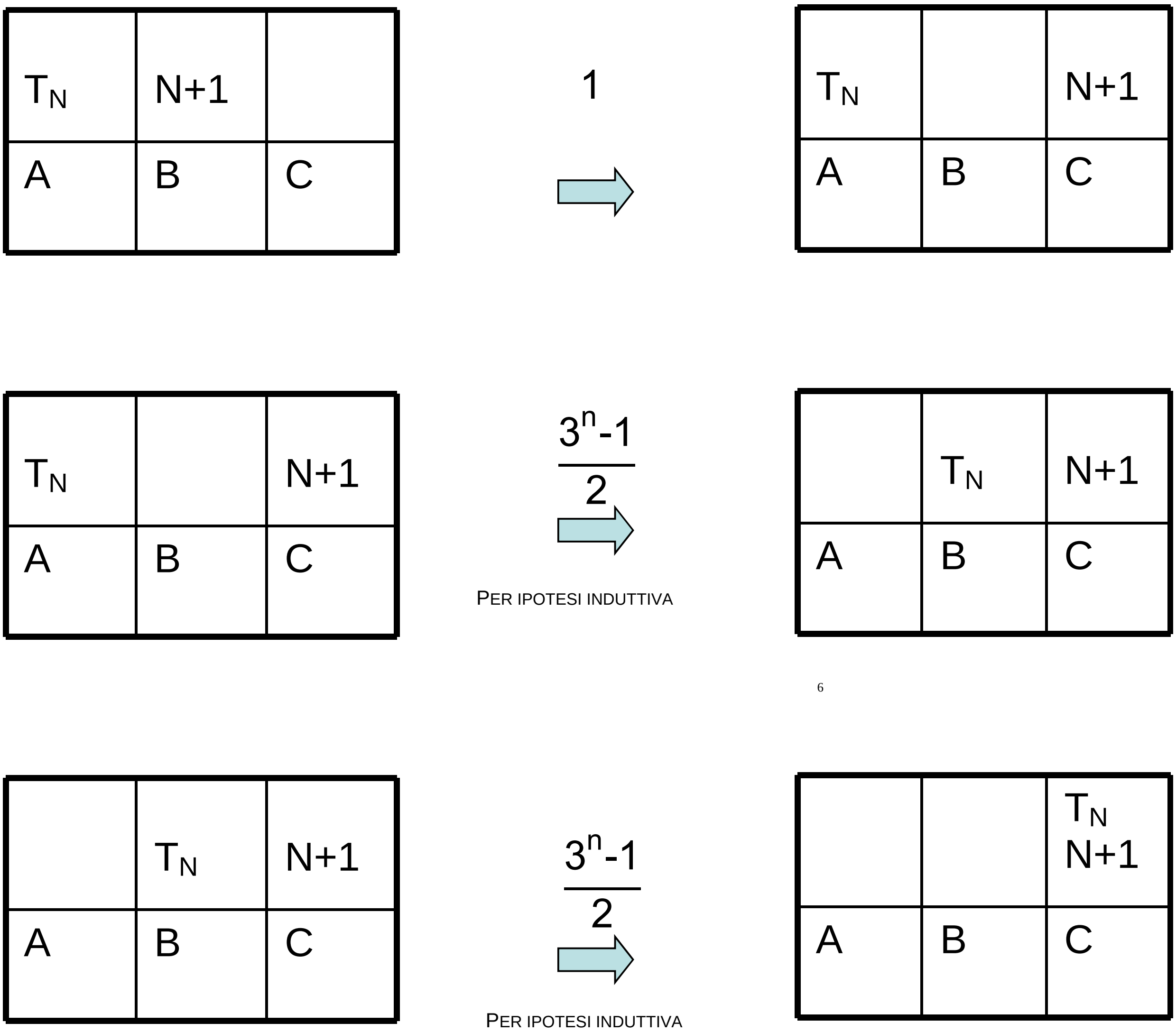
2°caso: si parte da un piolo centrale e si arriva ad un piolo laterale

	T_N N+1	
A	B	C

$$\xrightarrow{\frac{3^n-1}{2}}$$

PER IPOTESI INDUTTIVA

T_N	N+1	
A	B	C



Occorrono quindi:

$$\frac{3^n-1}{2}+1+\frac{3^n-1}{2}+\frac{3^n-1}{2}=3\frac{3^n-1}{2}+1=\frac{3^{n+1}-1}{2}$$

mosse

Q.e.d.

3.2 TEOREMA (SOLUZIONE RICORSIVA PER L'ARROCCO LUNGO)

Per ogni n ≥ 1 , la torre di Hanoi di n dischi posta in un laterale (A) può essere spostata sul piolo più lontano (C) con una sequenza di 3^n-1 mosse.

Dimostrazione

Si applica due volte la sequenza di mosse illustrata nel teorema 3.1

Occorrono quindi:

$$2\frac{3^n-1}{2} = 3^n-1$$

mosse

Q.e.d.

Anche per la variante “Passo uno” valgono dei teoremi di ottimalità.

3.3 TEOREMA (OTTIMALITÀ DELLA SOLUZIONE RICORSIVA PER L’ARROCCO CORTO E PER L’ARROCCO LUNGO)

Ogni soluzione per l’arrocco corto con n dischi ha un numero di mosse m con

$$m \geq \frac{3^n-1}{2}$$

Ogni soluzione per l’arrocco lungo con n dischi ha un numero di mosse m con

$$m \geq 3^n-1$$

Dimostrazione (per induzione)

- Base dell'induzione: verifichiamo la tesi per n=1.

Arrocco corto:

sia nel caso si parta da un piolo laterale o da un piolo centrale, occorre muovere il disco di almeno un passo quindi:

$$m \geq 1 = \frac{3^1-1}{2}$$

Arrocco lungo:

occorre muovere il disco di almeno due passi quindi:

$$m \geq 2 = 3^1 - 1$$

- Passo induttivo

Adesso proviamo la tesi per un qualunque n+1 supponendo sia vera per n.

<u>Arrocco corto</u>:

Consideriamo una generica soluzione per l'arrocco corto con n+1 dischi.

1° caso: si parte da un piolo laterale.

Nella sequenza di mosse prima o poi si dovrà spostare il disco alla base dalla sua posizione iniziale (laterale) per infilarlo nel piolo centrale, ma questo sarà possibile solo se la torre restante sarà stata posizionata nel piolo più lontano (arrocco lungo).

Per questa ultima operazione si saranno fatte m_1 mosse, e per ipotesi induttiva $m_1 \geq 3^n - 1$.
Spostato il disco più grande il numero di mosse sarà $m_1 + 1$.

Occorrerà infine ricollocare la torre con n dischi sul disco grande (arrocco corto) con m_2 mosse, e ancora per ipotesi induttiva

$$m_2 \geq \frac{3^n - 1}{2}$$

Quindi concludendo $m = m_1 + 1 + m_2 \geq 3^n - 1 + 1 + \frac{3^n - 1}{2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

2° caso: si parte dal un piolo centrale.

Nella sequenza di mosse prima o poi si dovrà spostare il disco alla base dalla sua posizione iniziale (centrale) per infilarlo i un piolo laterale, ma questo sarà possibile solo se la torre restante sarà stata posizionata nell'altro piolo laterale (arrocco corto).

Per questa ultima operazione si saranno fatte m_1 mosse, e per ipotesi induttiva

$$m_1 \geq \frac{3^n - 1}{2}$$

Spostato il disco più grande il numero di mosse sarà $m_1 + 1$.

Occorrerà infine ricollocare la torre con n dischi sul disco grande (arrocco lungo) con m_2 mosse, e ancora per ipotesi induttiva

$$m_2 \geq 3^n - 1.$$

Quindi concludendo $m = m_1 + 1 + m_2 \geq \frac{3^n - 1}{2} + 1 + 3^n - 1 = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

Arrocco lungo:

Consideriamo una generica soluzione per l'arrocco lungo con n+1 dischi.

Nella sequenza di mosse prima o poi si dovrà spostare il disco alla base dalla sua posizione iniziale (laterale) per infilarlo nel piolo centrale, ma questo sarà possibile solo se la torre restante sarà stata posizionata nel piolo più lontano (arrocco lungo).

Per questa ultima operazione si saranno fatte m_1 mosse, e per ipotesi induttiva $m_1 \geq 3^n - 1$.
Spostato il disco più grande il numero di mosse sarà $m_1 + 1$.

Nella sequenza di mosse restanti occorrerà spostare il disco più grande ancora di un altro passo, ma questo sarà possibile solo se la torre restante sarà stata posizionata nel piolo più lontano (arrocco lungo):
questo avverrà in $m_2 + 1$ mosse che per ipotesi induttiva saranno:

$$m_2 + 1 \geq 3^n - 1. + 1$$

Occorrerà infine ricollocare la torre con n dischi sul disco grande (arrocco lungo) con m_3 mosse, e ancora per ipotesi induttiva

$$m_3 \geq 3^n - 1$$

Quindi concludendo $m = m_1 + 1 + m_2 + m_3 \geq 3^n - 1 + 1 + 3^n - 1 + 1 + 3^n - 1 = 3^{n+1} - 1$

2° caso: si parte dal un piolo centrale.

Nella sequenza di mosse prima o poi si dovrà spostare il disco alla base dalla sua posizione iniziale (centrale) per infilarlo i un piolo laterale, ma questo sarà possibile solo se la torre restante sarà stata posizionata nell'altro piolo laterale (arrocco corto).

Per questa ultima operazione si saranno fatte m_1 mosse, e per ipotesi induttiva

$$m_1 \geq \frac{3^n - 1}{2}$$

Spostato il disco più grande il numero di mosse sarà $m_1 + 1$.

Occorrerà infine ricollocare la torre con n dischi sul disco grande (arrocco lungo) con m_2 mosse, e ancora per ipotesi induttiva

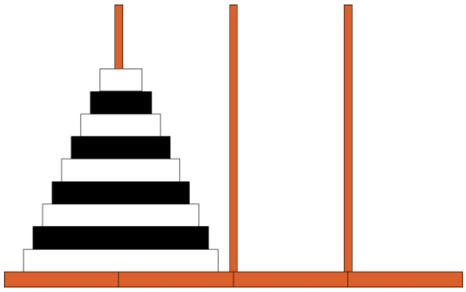
$$m_2 \geq 3^n - 1.$$

Quindi concludendo $m = m_1 + 1 + m_2 \geq \frac{3^n - 1}{2} + 1 + 3^n - 1 = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

Q.e.d.

4. <u>La torre di Hanoi bicolore</u>

Abbiamo infine considerato un'ultima variante che conduce a colorare i dischi con due colori in maniera alternata:



Chiameremo tali torri: "torri di Hanoi bicolori"..

Si introduce a questo punto l'ulteriore vincolo che nello spostamento dei dischi: non si può poggiare un disco su un altro dello stesso colore ovvero (regola della torre di Hanoi bicolori):

tutte le torri che si creano devono essere torri di Hanoi bicolori.

E dallo studio del gioco abbiamo scoperto che tale vincolo <u>non ostacola</u> l'applicazione della soluzione "ricorsiva" della variante classica.

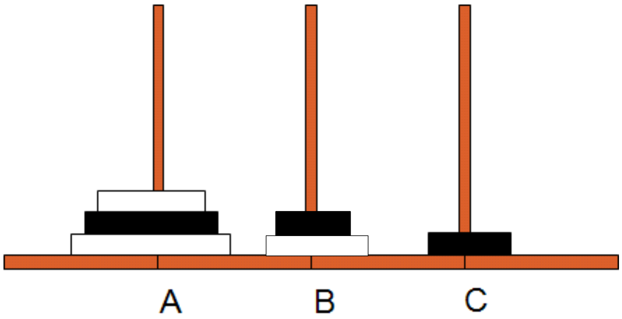
4.1 Teorema di compatibilità per torri bicolori

Applicando la "soluzione ricorsiva" ad una torre di Hanoi bicolore, si verificano i seguenti fatti:

- tutte le torri che si vengono a trovare sul piolo iniziale e su quello finale hanno alla base dischi dello stesso colore;
- tutte le torri che si vengono a trovare sull'altro piolo hanno alla base dischi del colore opposto;
- tutte le torri che si creano sono torri di Hanoi bicolori.

Esempio: in figura è illustrata una fase dello spostamento di una torre bicolore di 5 dischi posta inizialmente in A con l'obiettivo di essere ricostruita sul piolo B.
Ebbene per tutte le restanti mosse:

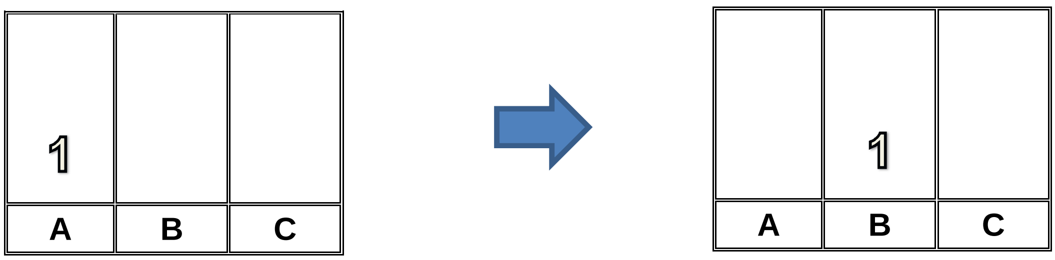
- poggeranno sulla base del piolo A solo dischi bianchi;
- poggeranno sulla base del piolo B solo dischi bianchi;
- poggeranno sulla base del piolo C solo dischi neri.
- tutte le torri che si creeranno nel corso del gioco saranno "torri di Hanoi bicolori"



Dimostrazione (per induzione)

- Base dell'induzione: verifichiamo la tesi per n=1.

Supponiamo che (senza perdere di generalità) si voglia spostare un disco bianco (indicato in figura con un 1 bianco) dal piolo A a quello B. La tesi si verifica banalmente.

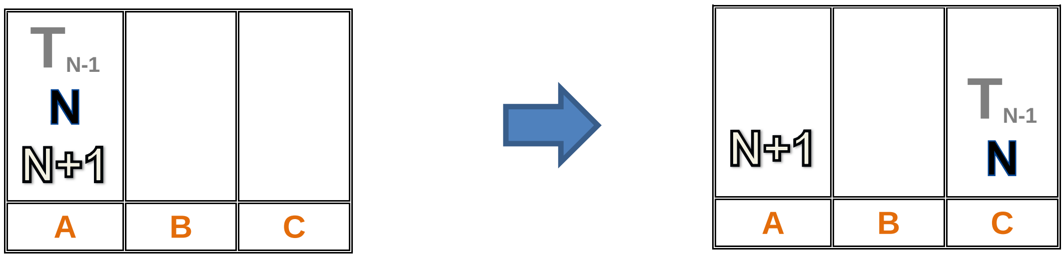


- Passo induttivo

Adesso proviamo la tesi per un qualunque n+1 supponendo sia vera per n.

Supponiamo (senza perdere di generalità) che la torre sia posta all'inizio in A, e che si voglia trasportare la torre in B, e che abbia alla base un disco bianco.
La torre bicolore di n+1 è formata dunque da un disco alla base bianco (indicato con un N+1 bianco), un disco nero (indicato con una N nera) e da una sottotorre bicolore di n-1 dichi (indicata con una T_{N-1} grigia).

Nella prima fase della soluzione ricorsiva, la sottotorre di n dischi (T_{N-1} più il disco N) si dovrà spostare sul piolo C,



e per ipotesi induttiva:

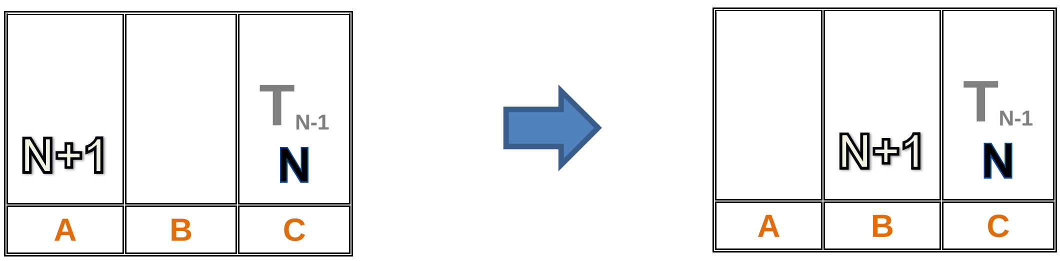
(i) sul disco N+1 e alla base delle torri in C ci saranno solo dischi neri;

(ii) alla base delle torri in B ci saranno solo dischi bianchi;

(iii) tutte le torri che si verranno a creare saranno bicolori (notiamo che le sottotorri bicolori che si poggiano sul disco N+1(bianco) hanno alla base dischi neri (i)).

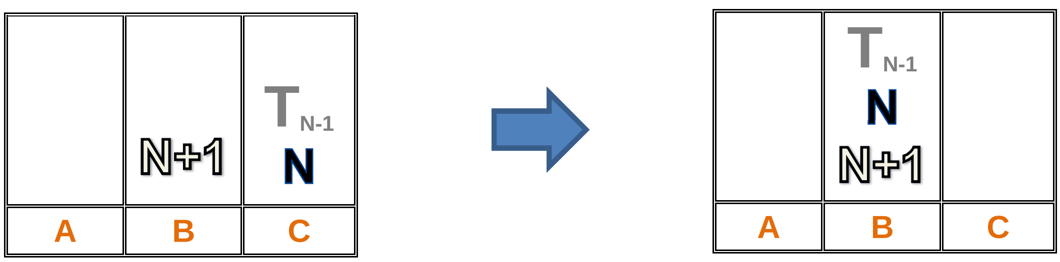
Osserviamo che in tutta questa fase alla base del piolo A è presente sempre il disco bianco N+1.

Nello spostamento successivo il disco N+1 (bianco) finisce sul piolo B .



La tesi resta valida.

Nell'ultima fase avviene la ricostruzione della torre di n dischi sopra al disco N+1,



e ancora per ipotesi induttiva:

(i) sul disco N+1 e alla base delle torri in C ci saranno solo dischi neri;

(ii) alla base delle torri in A ci saranno solo dischi bianchi;

(iii) tutte le torri che si verranno a creare saranno bicolori (notiamo che le sottotorri bicolori che si poggiano sul disco N+1(bianco) hanno alla base dischi neri (i)).

Osserviamo che in tutta questa fase alla base del piolo B è sempre presente il disco bianco N+1.

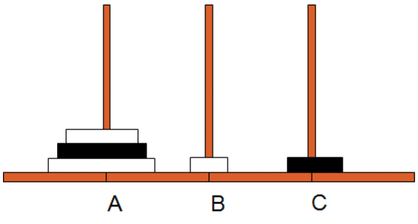
Concludendo in ogni fase:

- tutte le torri che si vengono a trovare sul piolo A e B hanno alla base dischi bianchi;
- tutte le torri che si vengono a trovare sul piolo C hanno alla base dischi neri;
- tutte le torri che si creano sono torri di Hanoi bicolori.

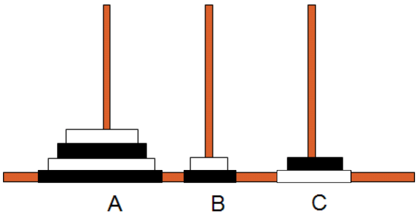
Q.e.d.

4.2 TORRE DI HANOI BICOLORE CON BASE COLORATA.

Per quanto stabilito nel teorema 4.3 il colore dei dischi base sono una costante.
Se ora si dipingono le basi dei pioli con colori "opposti" a quelli dei dischi base, durante la sequenza di mosse si conserverà un'alternanza anche tra dischi e basi dei pioli.
Chiameremo tale gioco: torre di Hanoi bicolore "con base colorata". (Osserviamo che i pioli iniziale e finale devono essere colorati del colore opposto al disco base della torre iniziale, l'altro, invece, dovrà avere lo stesso colore).



TORRE DI HANOI BICOLORE



TORRE DI HANOI BICOLORE CON BASE COLORATA

4.3 RIFORMULAZIONE DELLA SOLUZIONE RICORSIVA.

Vediamo ora come, attraverso le colorazioni delle torri di Hanoi, sia possibile ricostruire la soluzione ricorsiva mediante una sequenza di “mosse obbligate”.

4.4 TEOREMA.

Data una torre di Hanoi bicolore con base colorata, in ogni mossa della soluzione ricorsiva:

esistono un <u>unico disco</u> che si può spostare (se si esclude l’ultimo mosso) e un’<u>unica posizione</u> nella quale può essere spostato, che rispettino i vincoli della dimensione dei dischi e dell’alternanza dei colori (dei dischi e delle basi dei pioli)

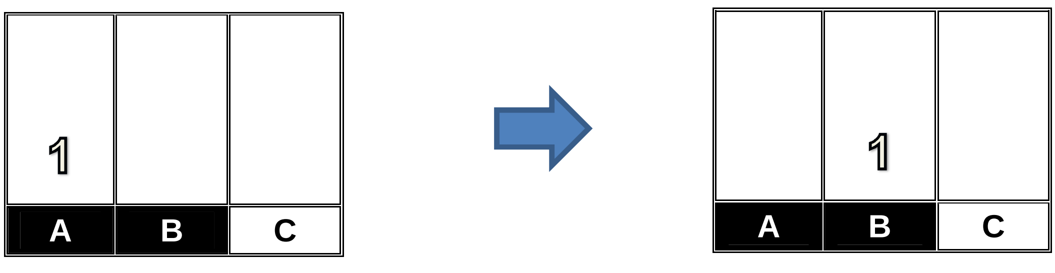
Osserviamo che nella soluzione ricorsiva un disco appena mosso, non verrà spostato nella mossa successiva (altrimenti si perderebbe la proprietà di minimalità), ne consegue che la scelta del disco da muovere (e la sua posizione finale) cadrà sull’altro disco univocamente individuato dai vincoli di dimensione e colore.

<u>Dimostrazione</u> (per induzione)

- Base dell’induzione: n=1

Il disco (che all’inizio poggerà sulla base di un piolo di colore opposto)

Supponiamo che (senza perdere di generalità) si voglia spostare un disco bianco (indicato in figura con un 1 bianco) dal piolo A a quello B; la base dei pioli A e B sono dunque neri e quella del piolo C bianca. La tesi si verifica banalmente.



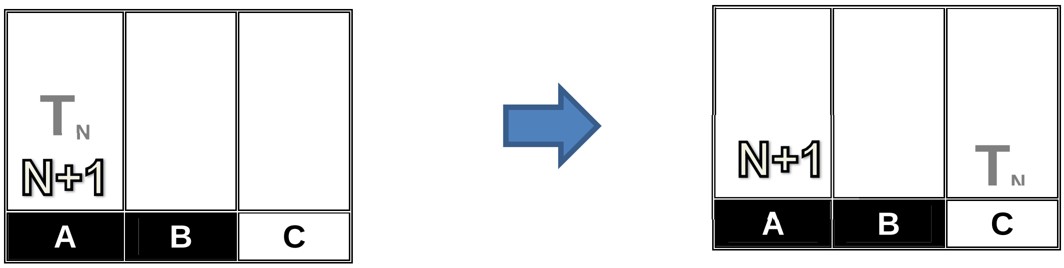
- Passo induttivo

Adesso proviamo la tesi per un qualunque n+1 supponendo sia vera per n.

Supponiamo (senza perdere di generalità) che la torre sia posta all’inizio in A, e che si voglia trasportare la torre in B, e che abbia alla base un disco bianco; la base dei pioli A e B sono dunque neri e quella del piolo C bianca.

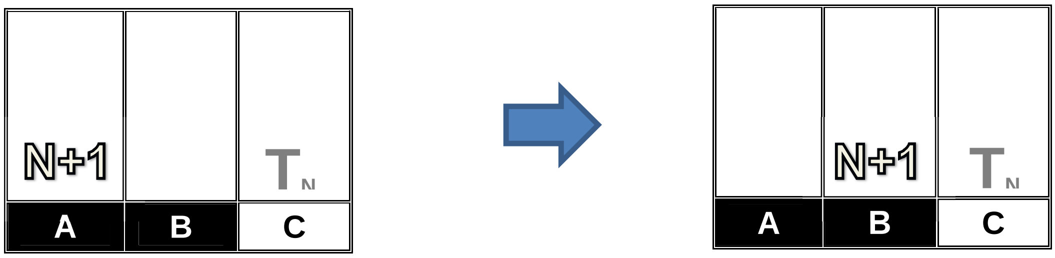
La torre bicolore di n+1 è formata dunque da un disco alla base bianco (indicato con un N+1 bianco), e da una sottotorre bicolore di n dischi (indicata con una T_N grigia).

La prima fase della soluzione ricorsiva si applica solo alla sottotorre T_N. Il disco N+1 non verrà mai preso in considerazione fino a che la sotttorre T_N non si troverà sul piolo C,

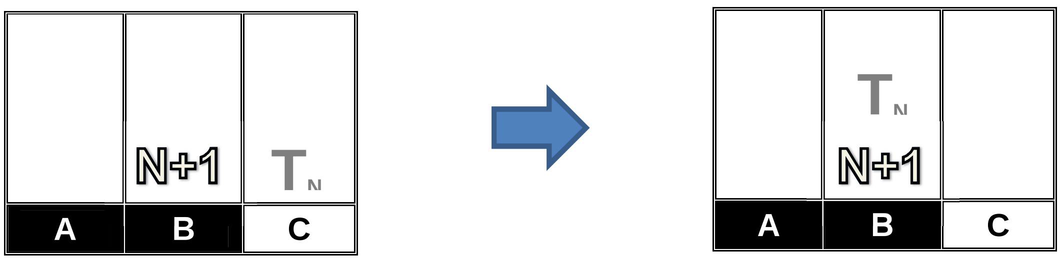


e la tesi vale per ipotesi induttiva:

Nello spostamento successivo (se si eccettua il disco in alto alla torre T_N che è stato appena mosso) l'unico disco che si può muovere rispettando i vincoli è il disco N+1 (bianco) che finisce sul piolo B : la tesi è quindi valida.



Nell'ultima fase avviene la ricostruzione della torre di n dischi sopra al disco N+1,



e il disco N+1 non viene mai preso in considerazione (all'inizio perché è stato appena mosso, e in seguito perché ha sopra di sé altri dischi) , quindi la tesi vale ancora per ipotesi induttiva.

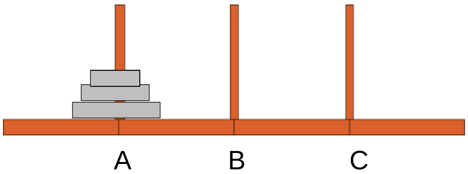
Q.e.d.

4.5 SOLUZIONE DELLA TORRE DI HANOI MEDIANTE COLORAZIONE.

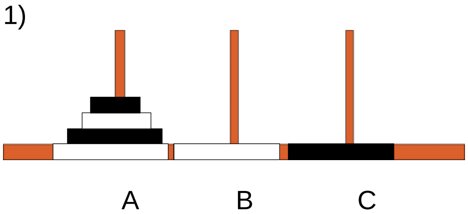
Si può dunque risolvere una torre di Hanoi con l'aiuto dei colori, nel seguente modo:

1) Si colorano di bianco e di nero alternativamente i dischi della torre e la base del piolo di partenza;
2) Si colora la base del piolo di arrivo dello stesso colore della base del piolo di partenza;
3) Si colora la base del piolo restante del colore opposto di quello della base del piolo di partenza (e di arrivo);
4) Si esegue la sequenza di mosse obbligate dai vincoli di dimensione e di colorazione, senza mai muovere un disco appena mosso.
5) Si eliminano i colori.

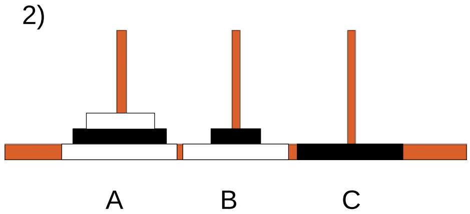
Esempio: spostamento di una torre di Hanoi di 3 dischi dal piolo A al piolo B



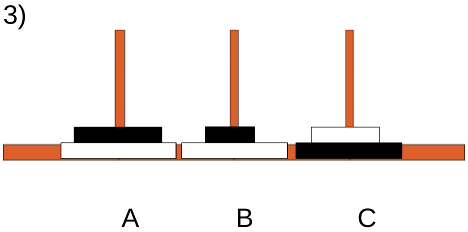
1)



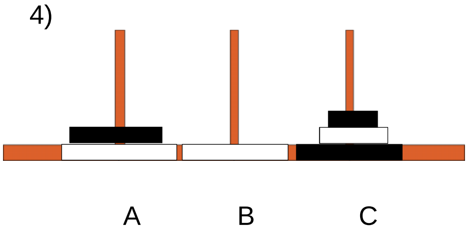
2)



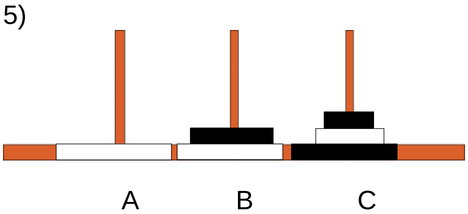
3)



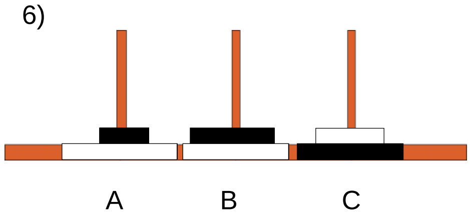
4)



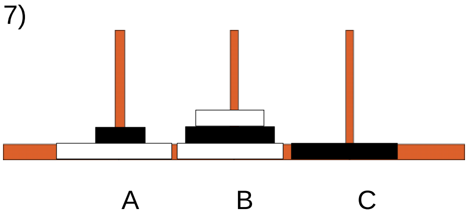
5)



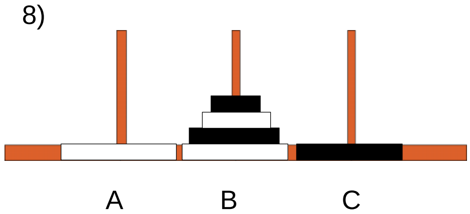
6)

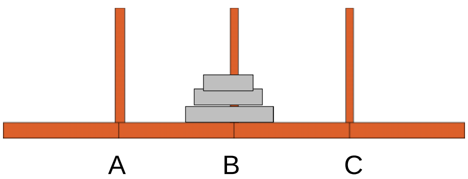


7)



8)





5.Conclusione

Abbiamo così visto come nella torre di Hanoi nella sua variante classica e nelle altre introdotte in questo lavoro, giochi un ruolo chiave “la ricorsività”, cioè la realizzazione dello spostamento di una torre si ottiene spostando tutte le sue sottotorri iniziando da quella di un solo disco.
Con i teoremi di ottimalità abbiamo mostrato che le soluzioni ricorsive non sono solo eleganti ma anche le più efficienti.
La struttura ricorsiva delle procedure ci ha permesso di trovare dimostrazioni che fanno un uso costante del principio di induzione.
L’esecuzione della strategia ricorsiva ha lo svantaggio che ogni mossa è scelta sulla base dell’intera successione di mosse precedenti e non dall’ultima; mediante colorazioni alternate abbiamo visto come la stessa strategia ricorsiva può essere sviluppata a partire dalla mossa precedente, scegliendo “l’unica” mossa compatibile con (gli accresciuti) vincoli introdotti mediante il colore dei dischi: aumentando le informazioni è risultato più facile operare un controllo sull’esecuzione della sequenza di mosse con la possibilità di “guidarla” .

Possibili spunti di ricerca a partire dai risultati qui stabiliti potrebbero essere:

- lo studio di ulteriori varianti;
- generalizzazioni dei risultati;
- introdurre una opportuna colorazione che permetta di guidare la soluzione “passo uno”;
- mettere in relazioni i risultati stabiliti con la relazione illustrata in [4] tra il *Il gioco dell'icosaedro* e *la torre di Hanoi* .

6.Bibliografia e sitografia

[1] http://it.wikipedia.org/wiki/Torre_di_Hanoi

[2] http://it.wikipedia.org/wiki/Édouard_Lucas

[3] http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/probegio/GAMEMATH/Hanoi/Hanoi.htm

[4] Martin Gardner, *Il gioco dell'icosaedro e la torre di Hanoi* in *Enigmi e giochi matematici*, Rizzoli

[5] http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads//2010/04/logica2.pdf