# Un problema geometrico

L. Perrella, G. Piazza; L. Crisci, V. Maiorca, V. Ruscio; L. Niculut
Classi I sez. A; III sez. F; V sez. F – L.S.S. "E. Majorana" – Guidonia

11 giugno 2011

## 1 Introduzione

In questa nota viene presentato il lavoro conclusivo da noi svolto per il laboratorio "Ricerca Matematica Attiva", attivato presso il nostro liceo nell'ambito del Piano Lauree Scientifiche, in collaborazione con l'Università di Roma "Tor Vergata". La stesura è stata svolta sotto la guida del prof. F. Chiera.

La questione di cui ci siamo occupati è riportata qui di seguito. I risultati che abbiamo trovato, con le relative dimostrazioni, si trovano nelle sezioni successive.

*Dato un segmento $AB$ ed un punto $P$ non allineato con $A$ e $B$, ci chiediamo se sia possibile determinare un punto $C$ in modo tale che $P$ risulti rispettivamente*

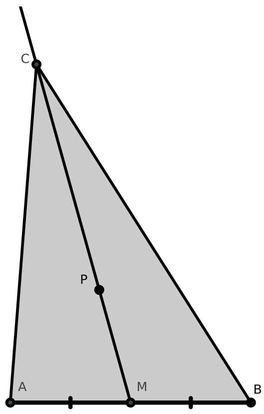
- *il* baricentro *del triangolo $ABC$;*
- *il* circocentro *del triangolo $ABC$;*
- *l'* ortocentro *del triangolo $ABC$;*
- *l'* incentro *o uno degli* excentri *del triangolo $ABC$.*

*Una volta compreso sotto quali condizioni il problema sia eventualmente risolubile, determineremo anche quante e quali siano le soluzioni.*

## 2 Baricentro

**2.1 Teorema.** *Dato un segmento $AB$ ed un punto $P$ non allineato con $A$ e $B$, si riesce sempre a determinare uno ed un solo punto $C$ tale che $P$ risulti essere il baricentro del triangolo $ABC$.*

*Dimostrazione.* Se $P$ deve risultare il baricentro del triangolo $ABC$, $P$ deve trovarsi sulla mediana relativa al lato $AB$. Inoltre, detto $M$ il punto medio di $AB$, il punto $P$ deve dividere $CM$ in due parti $MP$ e $PC$ tali che $PC \cong 2 \cdot MP$. Ne segue che il punto $C$ potrà essere determinato prolungando il segmento $MP$ con un segmento $PC \cong 2 \cdot MP$. Evidentemente il punto $C$ così determinato è anche l'unico ammissibile. $\square$




**2.2 Osservazione.** È importante osservare come il punto $C$ che risolve (in modo unico) il nostro problema sia costruibile con riga e compasso. Basterà costruire il punto medio $M$ di $AB$, considerare quindi la semiretta che lo congiunge con $P$, e su questa determinare infine il punto $C$ tale che $PC \cong 2 \cdot MP$.

Terminiamo questa sezione affrontando nuovamente il problema dal punto di vista della geometria analitica. Ricordiamo dapprima il seguente risultato, la cui dimostrazione sarà fornita nella sezione finale.

**2.3 Teorema.** *Dato un riferimento cartesiano $OXY$, e fissati in esso tre punti non allineati $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ $C = (x_C, y_C)$, il baricentro del triangolo $ABC$ ha coordinate $(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3})$.*

**2.4 Corollario.** *Dato un riferimento cartesiano $OXY$, e in esso tre punti non allineati $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $P = (x_P, y_P)$, l'unico punto $C$ tale che il baricentro del triangolo $ABC$ sia $P$ ha coordinate $(3x_P - x_A - x_B, 3y_P - y_A - y_B)$.*

*Dimostrazione.* Basta tenere conto del Teorema 2.3, ed esplicitare $x_C$ e $y_C$, a partire dalle relazioni

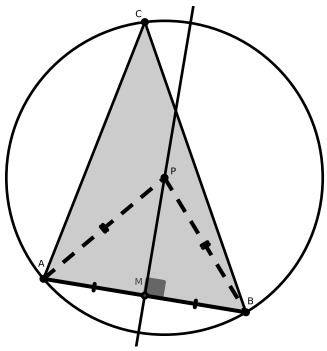
$$x_P = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \qquad y_P = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

□

# 3 Circocentro

**3.1 Teorema.** *Dato un segmento $AB$ ed un punto $P$ non allineato con $A$ e $B$, si può determinare un punto $C$ in modo tale che $P$ risulti essere il circocentro del triangolo $ABC$ se e soltanto se $P$ appartiene all'asse del segmento $AB$. In tal caso, forniscono una soluzione al problema tutti i punti $C$, distinti da $A$ e $B$, che appartengono alla circonferenza di centro $P$ e passante per $A$ e $B$.*

*Dimostrazione.* Se $P$ deve risultare il circocentro del triangolo $ABC$, $P$ deve trovarsi necessariamente alla stessa distanza da $A$ e da $B$. Dunque $P$ deve necessariamente trovarsi sull'asse del segmento $AB$. D'altra parte, se $P$ appartiene all'asse di $AB$, $P$ ha la stessa da $A$ e da $B$ e perciò è centro di una circonferenza che passa per $A$ e $B$. Sia dunque $\mathcal{C}$ tale circonferenza e sia $C$ un punto su di essa distinto da $A$ e da $B$. La circonferenza $\mathcal{C}$ è circoscritta al triangolo $ABC$ e $P$ ne è il centro. Per definizione dunque $P$ è il circocentro di $ABC$. □




**3.2 Osservazione.** In questo caso l'ipotesi che $P$ non risulti allineato ad $AB$ non è indispensabile. In effetti se $P$ è il punto medio di $AB$ tutti i triangoli rettangoli $ABC$ con ipotenusa $AB$ hanno $P$ come circocentro.

**3.3 Osservazione.** Come per il baricentro, anche in questo caso si può costruire la soluzione con riga e compasso. In effetti basta tracciare l'asse del segmento $AB$, scegliere $P$ su di esso, e scegliere ancora $C$ sulla circonferenza di centro $P$ e raggio $PA$.

# 4 Ortocentro

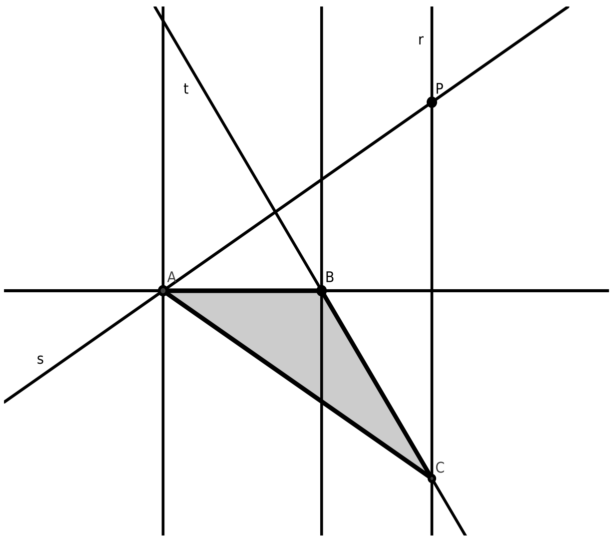
Nel caso dell'ortocentro, è opportuna una discussione preliminare che mostri come il problema non ammette soluzione se il punto $P$ appartiene ad una delle rette perpendicolari al segmento $AB$ e passanti rispettivamente per $A$ e $B$. Sappiamo infatti che l'ortocentro di un triangolo è l'intersezione delle altezze del triangolo; dunque se $P$ appartenesse ad esempio alla perpendicolare ad $AB$ passante per $B$ ne seguirebbe che anche $C$ apparterrebbe a tale perpendicolare e quindi $ABC$ risulterebbe un triangolo rettangolo in $B$. Pertanto l'ortocentro $P$ dovrebbe coincidere col vertice $B$, contro le ipotesi iniziali. Vediamo ora che in tutti gli altri casi la soluzione esiste ed è unica.

**4.1 Teorema.** *Dato un segmento $AB$ ed un punto $P$ non allineato con $A$ e $B$, si può determinare un punto $C$ in modo tale che $P$ risulti essere l'ortocentro del triangolo $ABC$ se e soltanto se $P$ non appartiene alle rette perpendicolari ad $AB$ passanti per $A$ e $B$. In tal caso, il punto $C$ viene determinato univocamente.*

*Dimostrazione.* Sappiamo già che se la soluzione esiste allora $P$ non appartiene alle perpendicolari passanti per gli estremi del segmento. Ci resta quindi da vedere che se $P$ non appartiene a tali rette allora la soluzione esiste (ed è unica).

Poniamoci in questo caso direttamente in un opportuno sistema di riferimento cartesiano, scelto im modo tale che $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $P = (h, k)$, con $h \neq 0, 1$ e $k \neq 0$. Ci chiediamo se sia possibile determinare un punto $C = (x_C, y_C)$ in modo che $ABC$ abbia ortocentro in $P$. Dovendo $P$ appartenere all'altezza relativa al vertice $C$, senz'altro avremo che $x_C = h$. Inoltre $P$ deve essere il punto di intersezione fra la retta di equazione $x = h$, e la retta perpendicolare al lato $AC$ passante per $B$. La retta che passa per $A$ e $C$ ha equazione $y = \frac{y_C}{h}x$. La retta perpendicolare ad $AC$, passante per $B$, ha equazione $y = -\frac{h}{y_C}(x - 1)$. Se il punto $P = (h, k)$ è il circocentro risulta quindi che $k = \frac{h(1-h)}{y_C}$. In altri termini, il punto $C$ ha coordinate $(h, \frac{h(1-h)}{k})$. $\square$

**4.2 Osservazione.** Ancora una volta, quando esiste, la soluzione può essere costruita con riga e compasso. Basterà tracciare la retta $r$ passante per $P$ e perpendicolare ad $AB$, quindi la retta $s$ passante per $A$ e $P$, e infine la retta $t$ passante per $B$ e perpendicolare ad $s$. Il punto $C$ si ottiene come intersezione fra $r$ e $t$.




# 5 Incentro ed excentri

Ricordiamo dapprima il seguente risultato, la cui dimostrazione sarà fornita nella sezione finale.

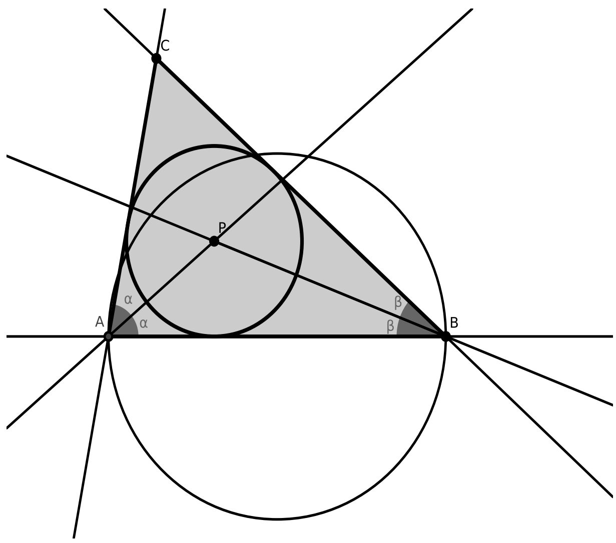
**5.1 Teorema.** *Data una circonferenza $\mathcal{C}$ di diametro $AB$, valgono le seguenti affermazioni:*

- *un punto $P$ appartiene $\mathcal{C}$ se e solo se $A\widehat{P}B$ è retto;*
- *un punto $P$ è interno a $\mathcal{C}$ se e solo se $A\widehat{P}B$ è ottuso;*
- *un punto $P$ è esterno a $\mathcal{C}$ se e solo se $A\widehat{P}B$ è acuto.*

**5.2 Teorema.** *Dato un segmento $AB$ ed un punto $P$ non allineato con $A$ e $B$, si può determinare un punto $C$ in modo tale che $P$ risulti essere l'incentro del triangolo $ABC$ se e soltanto se $P$ è interno alla circonferenza di diametro $AB$. In tal caso, il punto $C$ viene determinato univocamente.*

*Dimostrazione.* Sappiamo che l'incentro di un triangolo è il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli interni al triangolo. Dunque se $P$ è l'incentro di $ABC$ risulta che $C\widehat{A}B \cong 2 \cdot P\widehat{A}B$ e $C\widehat{B}A \cong 2 \cdot P\widehat{B}A$. Risultando $C\widehat{A}B + C\widehat{B}A$ un angolo minore di un angolo piatto, necessariamente risulterà che $P\widehat{A}B + P\widehat{B}A$ è un angolo acuto. Quindi $A\widehat{P}B$ è ottuso e $P$ è interno alla circonferenza di diametro $AB$.

Viceversa se $P$ è interno alla circonferenza di diametro $AB$, $A\widehat{P}B$ è ottuso e quindi $P\widehat{A}B + P\widehat{B}A$ è acuto. È quindi possibile duplicare gli angoli acuti $P\widehat{A}B$ e $P\widehat{B}A$, ottenendo due rette che formano con $AB$ angoli coniugati interni non supplementari, e che per questo sono incidenti. Il punto $C$ non potrà dunque che essere scelto come l'intersezione di tali rette. ☐




**5.3 Teorema.** *Dato un segmento $AB$ ed un punto $P$ non allineato con $A$ e $B$, si può determinare un punto $C$ in modo tale che $P$ risulti essere un excentro del triangolo $ABC$ se e soltanto se $P$ è esterno alla circonferenza di diametro $AB$. In tal caso, il punto $C$ viene determinato univocamente.*

*Dimostrazione.* Sappiamo che ogni excentro di un triangolo è il punto di intersezione delle bisettrici di due angoli esterni al triangolo e della bisettrice del rimanente angolo interno. Supponiamo ad esempio che $P$ sia centro della circonferenza tangente al lato $BC$ e ai prolungamenti di $AC$ e $AB$. Il punto $P$ sarà allora intersezione della bisettrice degli angoli esterni $\widehat{B}_e$, $\widehat{C}_e$ e dell'angolo $C\widehat{A}B$. Sfruttando il teorema dell'angolo esterno, e denotando con $\widehat{P}$ l'angolo piatto, si ottengono le seguente congruenze:

$$A\widehat{P}B \cong \widehat{P} - (P\widehat{A}B + P\widehat{B}A) \cong \widehat{P} - (P\widehat{A}B + P\widehat{B}C + C\widehat{B}A) \cong$$

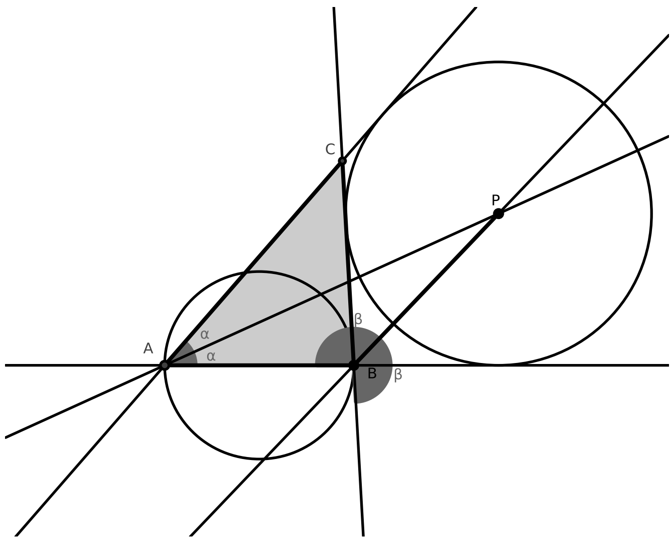
$$\cong \widehat{P} - (P\widehat{A}B + P\widehat{A}B + \frac{A\widehat{C}B}{2} + C\widehat{B}A) \cong$$

$$\cong \widehat{P} - (C\widehat{A}B + \frac{A\widehat{C}B}{2} + C\widehat{B}A) \cong \widehat{P} - (\widehat{C}_e + \frac{A\widehat{C}B}{2}) \cong \frac{A\widehat{C}B}{2}.$$

Essendo $A\widehat{C}B$ senz'altro minore dell'angolo piatto, $A\widehat{P}B$ risulta necessariamente acuto, e quindi $P$ è esterno alla circonferenza di diametro $AB$.

Viceversa se $P$ è esterno alla circonferenza di diametro $AB$, $A\widehat{P}B$ è acuto e quindi $P\widehat{A}B + P\widehat{B}A$ è ottuso. Duplicando gli angoli $P\widehat{A}B$ e $P\widehat{B}A$, e sommandoli, si ottiene un angolo maggiore di un angolo piatto (e minore di un angolo giro), si ottengono cioè due rette che formano con $AB$ angoli coniugati interni non supplemenatri, e che per questo sono incidenti. Il punto $C$ non potrà dunque che essere scelto come l'intersezione di tali rette.

□



**5.4 Osservazione.** Anche in questo ultimo caso, quando esiste, la soluzione può essere costruita con riga e compasso. Ciò segue dal fatto che il problema della duplicazione di un angolo è risolubile elementarmente.

# 6 Appendice

Per completezza riportiamo le dimostrazioni dei Teoremi 2.3 e 5.1.

**6.1 Teorema.** *Dato un riferimento cartesiano* $OXY$*, e fissati in esso tre punti non allineati* $A = (x_A, y_A)$*,* $B = (x_B, y_B)$ $C = (x_C, y_C)$*, il baricentro del triangolo* $ABC$ *ha coordinate* $(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3})$.

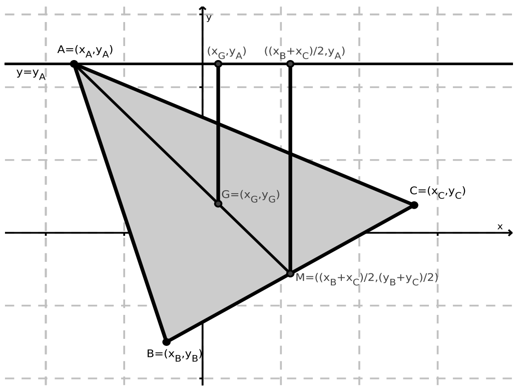
*Dimostrazione.* Ricordiamo che il baricentro di un triangolo suddivide ciascuna mediana in due parti che sono l'una la metà dell'altra, la parte più lunga essendo quella che congiunge il baricentro col vertice del triangolo.

Consideriamo allora ad esempio la mediana che congiunge $A$ con il punto medio di $BC$. Denotando con $G = (x_G, y_G)$ il baricentro, e proiettando sulla retta di equazione $y = y_A$ il baricentro e il punto medio di $BC$, si ottengono due triangoli (rettangoli) simili, i cui vertici hanno coordinate rispettivamente

$$(x_A, y_A); \quad (x_G, y_G); \quad (x_G, y_A)$$

e

$$(x_A, y_A); \quad (\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}); \quad (\frac{x_B + x_C}{2}, y_A).$$



Ora, sapendo che il rapporto fra i lati di questi due triangoli è $\frac{2}{3}$ si ottengono le proporzioni

$$(x_G - x_A) : \left( \frac{x_B + x_C}{2} - x_A \right) = 2 : 3$$

e

$$(y_G - y_A) : \left( \frac{y_B + y_C}{2} - y_A \right) = 2 : 3.$$

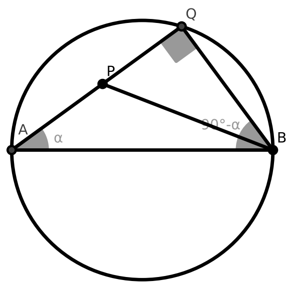
Esplicitando $x_G$ e $y_G$ da queste proporzioni si ottegono facilmente le espressioni cercate per le coordinate del baricentro. $\square$

**6.2 Teorema.** *Data una circonferenza $\mathcal{C}$ di diametro $AB$, valgono le seguenti affermazioni:*

- *un punto $P$ appartiene $\mathcal{C}$ se e solo se $A\widehat{P}B$ è retto;*
- *un punto $P$ è interno a $\mathcal{C}$ se e solo se $A\widehat{P}B$ è ottuso;*
- *un punto $P$ è esterno a $\mathcal{C}$ se e solo se $A\widehat{P}B$ è acuto.*

*Dimostrazione.* La prima affermazione è una famosa conseguenza del teorema dell'angolo al centro.

Se un punto $P$ è interno alla circonferenza di diametro $AB$, si potrà ad esempio prolungare il segmento $AP$ fino ad ottenere una corda $AQ$. Il triangolo $ABQ$ risulta allora rettangolo in $Q$, e quindi $P\widehat{A}B$ è complementare a $Q\widehat{B}A$. Ora, essendo l'angolo $P\widehat{B}A$ contenuto per costruzione in $Q\widehat{B}A$, ne segue che la somma di $P\widehat{A}B$ e $P\widehat{B}A$ è minore di un angolo retto. In altri termini, $A\widehat{P}B$ è ottuso.



Se un punto $P$ è esterno alla circonferenza di diametro $AB$, almeno uno fra i segmenti $AP$ e $BP$ sarà secante la circonferenza. Supponiamo che sia $Q = AP \cap \mathcal{C}$. Gli angoli $Q\widehat{A}B$ e $Q\widehat{B}A$ sono supplementari, e per costruzione $P\widehat{B}A$ contiene $Q\widehat{B}A$. Quindi la somma degli angoli $P\widehat{B}A$ e $P\widehat{A}B$ è maggiore di un angolo retto, cioè $A\widehat{P}B$ è acuto. $\square$