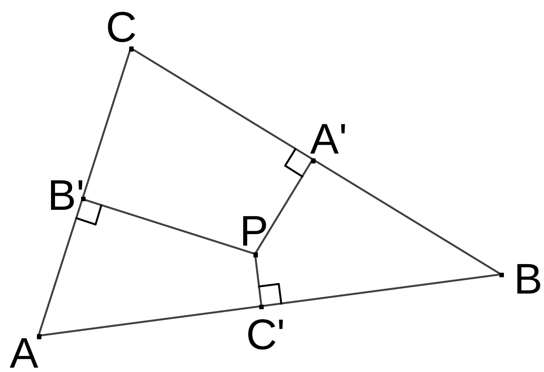
DUE PROBLEMI DI MASSIMO E MINIMO IN GEOMETRIA

Partiamo da un triangolo ABC, i cui lati misurano $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, e consideriamo un suo punto P. Tracciamo le tre proiezioni ortogonali A', B', C' sui lati del triangolo.



Ci chiediamo come, al variare di P in ABC, possono variare le due quantità

$$PA' + PB' + PC' \qquad \text{e} \qquad PA' \cdot PB' \cdot PC'.$$

Quali sono i loro valori massimi e minimi?

La variazione di $PA' + PB' + PC'$.

(1) Mostrare che, se il triangolo ABC è equilatero, allora $PA' + PB' + PC'$ è costante e vale $\frac{2\mathcal{A}_{ABC}}{\ell}$ (dove $\mathcal{A}_{ABC}$ è l'area di ABC e $\ell = a = b = c$). [Teorema di Viviani.]

(2) Mostrare che, se $AB = AC$, allora $PA' + PB' + PC'$ è costante quando P percorre un segmento parallelo alla base. Far vedere che, in tal caso, i valori massimi e quelli minimi si raggiungono se $P = A$ o se $P \in BC$. Dove si ottiene il massimo e dove il minimo?

(3) E nei triangoli scaleni? Far vedere che, in questo caso, il valore massimo e quello minimo si raggiungono in due vertici. Quali vertici? Quanto valgono tale massimo e tale minimo?

La variazione di $PA' \cdot PB' \cdot PC'$.

(1) Qual è il valore minimo di $PA' \cdot PB' \cdot PC'$ per P nel triangolo ABC? Per quali punti P si ottiene tale valore?

Cerchiamo ora il massimo di $PA' \cdot PB' \cdot PC'$.

(2) Spiegare in che senso trovare il massimo di $PA' \cdot PB' \cdot PC'$ equivale a trovare il massimo di
$(PA' \cdot a) \cdot (PB' \cdot b) \cdot (PC' \cdot c)$.

(3) Mostrare che la somma $(PA' \cdot a) + (PB' \cdot b) + (PC' \cdot c)$ è costante. Qual è questa costante?

(4) Mostrare (servendosi di quanto esposto nelle prossime proposizioni) che, se la somma di n quantità positive è una costante assegnata K, il prodotto è massimo se e solo se ciascuna di tali quantità vale K/n. Tale prodotto vale al massimo $(K/n)^n$.

(5) [Media aritmetica e media geometrica.]
- Dimostrare che, se $x, y > 0$, allora $\sqrt{xy} \leqslant (\frac{x+y}{2})$ [ossia $xy \leqslant (\frac{x+y}{2})^2$]. Inoltre vale l'uguaglianza se e solo se $x = y$.
- Interpretare geometricamente la disuguaglianza $\sqrt{xy} \leqslant (\frac{x+y}{2})$.
- Dimostrare che, se $x_1, x_2, ..., x_n > 0$, allora $\sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \leqslant (\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n})$ [ossia $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n \leqslant (\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n})^n$]. Inoltre vale l'uguaglianza se e solo se $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

(6) Concludere che, quando $PA' \cdot a = PB' \cdot b = PC' \cdot c$, il prodotto $(PA' \cdot a) \cdot (PB' \cdot b) \cdot (PC' \cdot c)$ è massimo.

(7) Dato un triangolo ABC, determinare il luogo dei punti del piano Q tali che i triangoli $\mathcal{A}_{AQB} = \mathcal{A}_{AQC}$.

(8) Dalla proposizione precedente, ricavare che:
- le 3 mediane di qualsiasi triangolo concorrono in un punto G (detto *baricentro*);
- per il baricentro G, risulta $\mathcal{A}_{ABG} = \mathcal{A}_{BCG} = \mathcal{A}_{CAG}$;
- dimostrare che il baricentro G è l'unico punto che gode di quest'ultima proprietà;
- dimostrare inoltre che il baricentro G divide ciascuna mediana in due parti, una doppia dell'altra.

(9) Dimostrare che $PA' \cdot PB' \cdot PC'$ assume valore massimo se e solo se P è il baricentro di ABC. Tale massimo vale $\dfrac{8(\mathcal{A}_{ABC})^3}{27abc}$.