LA MATEMATICA DELLE RELAZIONI SOCIALI

ALESSIO TORTI
SILVIA LAZZARI
FRANCESCA GERACE
FLAVIA VICICONTE

ABSTRACT. Nell'articolo si analizzano, utilizzando la teoria dei grafi, le diverse configurazioni che si possono presentare all'interno di un gruppo di persone se si analizzano i loro rapporti di "amicizia" .

1.INTRODUZIONE

Il presente lavoro trae spunto dal cosiddetto "problema della festa".

DIMOSTRARE CHE IN UNA QUALUNQUE FESTA È SEMPRE POSSIBILE TROVARE ALMENO DUE INVITATI CHE HANNO TRA I PRESENTI, LO STESSO NUMERO DI AMICI

La soluzione del problema è un esempio di applicazione del "principio dei cassetti" (o della "piccionaia"):

dati m oggetti da disporre in n raggruppamenti, se m > n allora almeno un raggruppamento dovrà contenere più di un oggetto.

<u>Esempio</u>: se 8 piccioni devono trovare posto in 7 vani separati, allora, poiché 8 > 7, almeno un vano dovrà ospitare più di un piccione.

Nel caso di una festa con m[*] persone, possiamo dividere gli invitati in tanti sottogruppi in base al numero di amici posseduti. Così avremo:

- persone che hanno 0 amici;
- persone che hanno 1 amico;
- persone che hanno 2 amici;
- persone che hanno 3 amici;
- ……
- persone che hanno m–1 amici.

[*] Occorre supporre che ci siano almeno due persone, cioè $m \geq 2$

Osserviamo ora che è impossibile che ci siano contemporaneamente persone con 0 amici e con m–1 amici.
Infatti se un invitato non ha amici non può essercene un altro che conosce tutti, altrimenti dovrebbe essere amico del primo.
Viceversa se un invitato conosce tutti non può essercene uno che non conosce nessuno, perché tutti lo avrebbero il primo come amico.

Ne segue che il numero n di sottogruppi nei quali si dividono gli invitati è minore di m.
Per il principio dei cassetti si ha quindi che in almeno uno di questi gruppi ci saranno almeno due invitati (che avranno dunque lo stesso numero di amici).

Q.e.d.

La dimostrazione appena vista stabilisce quindi una banale "condizione necessaria" per la realizzazione di una festa: è impossibile organizzare una festa nella quale ogni invitato ha un numero di amici differente.

Le questioni che ci siamo posti sono ora le seguenti:

- esistono altre condizioni necessarie per la realizzazione di una festa?
- tali condizioni sono anche sufficienti?
- è possibile caratterizzare le tipologie di festa sulla base di tali condizioni?

Per rispondere a questi quesiti abbiamo dovuto scegliere uno strumento per "misurare" lo status di una festa, giungendo alla seguente formalizzazione.

2. La funzione della festa

Data una festa con $m \geq 2$ invitati indichiamo con p(n) la funzione che conta il numero di persone che hanno n amici, poiché il numero di amici può variare da 0 a m–1 si avrà:

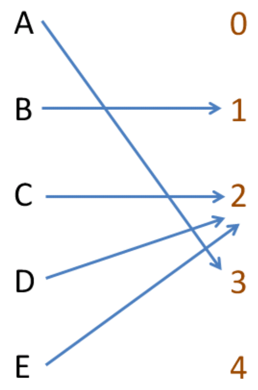
$$p: \{ 0; 1; 2; 3; \dots; m-1\} \to \{ 0; 1; 2; 3; \dots; m\}$$

$$n \mapsto p(n) = \text{numero di persone che hanno n amici}$$

Chiameremo p(n) la *funzione della festa*.

Esempio:

A,B,C,D,E i 5 INVITATI   NUMERO DI AMICI



p(0)= 0; p(1)= 1; p(2)= 3; p(3)= 1; p(4)= 0

3.CONDIZIONI DI COMPATIBILITÀ

Non tutte le funzioni :

$$f: \{ 0; 1; 2; 3; \ldots; m-1\} \rightarrow \{ 0; 1; 2; 3; \ldots; m\}$$

possono essere funzioni di una festa.

Illustriamo due semplice condizioni necessarie che esse devono rispettare.

Chiameremo tali condizioni, “condizioni di compatibilità”.

<u>Condizione di compatibilità 1</u>

Per ogni funzione di una festa necessariamente:

$p(0) + p(1) + p(2) + \ldots. + p(m-1) = m$

(Segue dal fatto che i sottoinsiemi delle persone che hanno lo stesso numeri di amici costituiscono una partizione)

> <u>Condizione di compatibilità 2</u>
>
> La funzione p deve avere necessariamente per qualche n, un valore ≥ 2.

(Segue dal il teorema della festa dimostrato all’inizio, ad esempio se m = 3 la funzione:

$$p(0) = 1 \; ; \; p(1) = 1 \; ; \; p(2) = 1$$

non può essere la funzione di una festa perché non ci sono persone con lo stesso numero di amici)

4.TEORIA DEI GRAFI

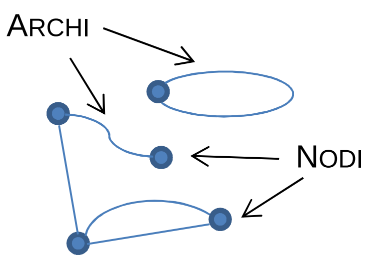
Le funzioni delle feste non sono sufficienti per proseguire la nostra ricerca. Abbiamo bisogno di un altro strumento: la teoria dei grafi.

GRAFI

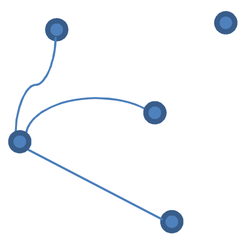
- Un *grafo* è un insieme di punti, detti *nodi* e linee di collegamento, dette *archi*;
- Un grafo si dice *semplice* se tra due punti esiste non più di un arco, e se nessun punto è collegato a se stesso da un arco.

Esempi:

GRAFO



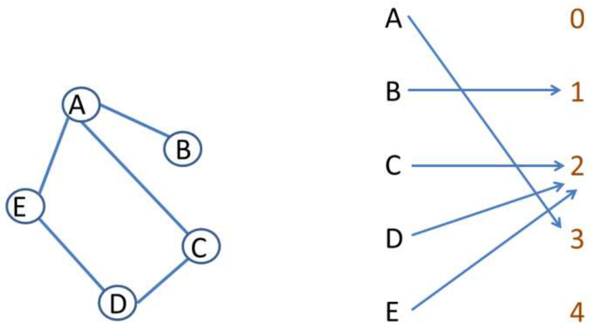
GRAFO SEMPLICE



GRAFO DELLA FESTA

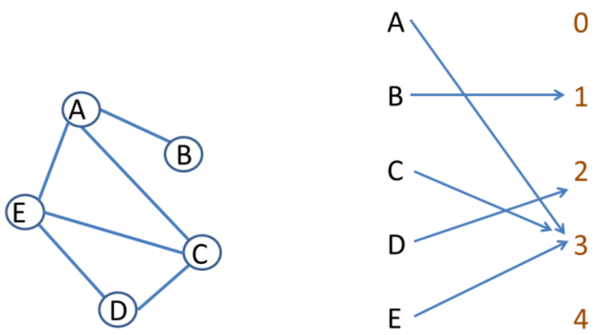
La teoria dei grafi ben si presta a rappresentare le relazioni di amicizia all’interno di una festa, infatti ad ogni festa è associato un grafo semplice nel quale i punti rappresentano gli invitati e gli archi di collegamento la relazione di amicizia. Tale grafo sarà chiamato *grafo della festa*.

Nel seguente esempio si descrive una festa con 5 invitati: A, B, C, D e E utilizzando il grafo della festa e la funzione della festa:



p(0) = 0 ; p(1) = 1 ; p(2) = 3; p(3) = 1 ; p(4) = 0

nel successivo esempio si tiene conto della nascita di un nuovo rapporto di amicizia tra gli invitati C ed E :



p(0) = 0 ; p(1) = 1 ; p(2) = 1; p(3) = 3 ; p(4) = 0

5.Funzioni quasi nulle

Siamo ora in grado di proseguire la nostra ricerca con lo studio di particolari funzioni che chiameremo *funzioni quasi nulle*, cioè le funzioni del tipo:

$$p(0) = 0,\ p(1) = 0\ ,\ \dots\ ,\ p(h) = m\ ,\ \dots\ ,\ p(m-2) = 0,\ p(m-1) = 0$$

al fine di stabilire se esse siano oppure no funzioni delle feste; feste nelle quali dunque tutti gli invitati dovrebbero avere lo stesso numero h di amici.

Osserviamo che le funzioni quasi nulle soddisfano le condizioni (necessarie) di compatibilità:

- $p(0) + p(1) + p(2) + \dots + p(m-1) = 0 + 0 + 0 + \dots + m + \dots + 0 + 0 = m$ (condizione 1)
- la funzione p assume per h il valore $m \geq 2$ (condizione 2)

Nel seguito vedremo in quali casi essere funzione quasi nulla sia anche una condizione sufficiente per essere una funzione di una festa.

6. Festa di sconosciuti

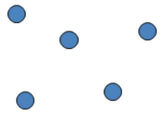
Consideriamo la funzione quasi nulla seguente:

$$p(0) = m,\ p(1) = 0\ ,\ \dots\ ,\ p(m-2) = 0,\ p(m-1) = 0$$

E' banale osservare che:

- Esistenza: la festa con m sconosciuti ha p come funzione della festa;
- Unicità: se p è la funzione di una festa, questa è per forza una festa con m sconosciuti.

Esempio del grafo di una festa di 5 sconosciuti:



7. Festa di coppie

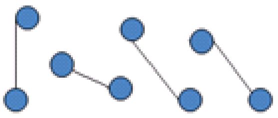
Consideriamo la funzione quasi nulla seguente:

$$p(0) = 0,\ p(1) = m\ ,\ \dots\ ,\ p(m-2) = 0,\ p(m-1) = 0 \quad \text{con } m \text{ pari}$$

E' facile osservare che:

- Esistenza: la festa nella quale le persone si conoscono solo all'interno di coppie di amici separate tra loro, ha p come funzione della festa (infatti in tale caso tutti hanno solo un amico, il compagno di coppia). Chiameremo questa tipologia di festa: *festa di coppie*

Esempio del grafo di una festa di 4 coppie m = 8:



Proveremo ora che:

- Unicità: se p è la funzione di una festa, questa è per forza una festa di coppie.

TEOREMA DELLA FESTA DI COPPIE

Se la funzione p così definita:

$$p(0) = 0,\ p(1) = m\ ,\ \dots\ ,\ p(m-2) = 0,\ p(m-1) = 0 \qquad \text{con } m \text{ pari}$$

è una funzione di una festa, allora si tratta di una festa di “coppie”.

<u>Dimostrazione (per induzione generalizzata)</u>

- Passo base m=2: la funzione p è così definita:

$$p(0)=0 \text{ e } p(1)=2$$

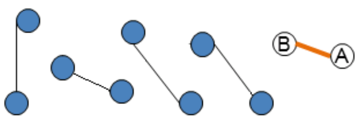
è banale verificare che l’unica festa associata a p è quella formata da una sola coppia di amici:

- Passo induttivo: supponiamo la tesi vera per ogni $n < m$ e proviamola per m

Consideriamo dunque una festa con m (pari) invitati con la funzione p così definita:

$$p(0) = 0,\ p(1) = m\ ,\ \dots\ ,\ p(m-2) = 0,\ p(m-1) = 0$$

e consideriamo un invitato A:



A ha un solo amico: B che ha A come suo unico amico. Se ora allontaniamo A e B o non resta nulla: in questo caso la festa è formata solo dalla coppia A-B, oppure otteniamo una festa con m–2 pari invitati con funzione p’:

$$p'(0) = 0,\ p'(1) = m-2\ ,\ \dots\ ,\ p'(m-4) = 0,\ p'(m-3) = 0$$

Per ipotesi induttiva si tratta di una festa di coppie.

Se infine facciamo rientrare la coppia A e B che non era collegata a nessuno, siamo in grado di provare che anche la festa descritta inizialmente dalla funzione p era una festa a coppie.

Q.e.d.

8. Festa di coppie imperfetta

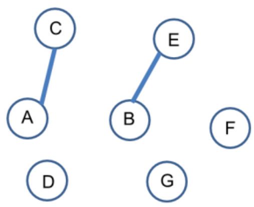
Consideriamo la funzione quasi nulla seguente:

$$p(0) = k,\ p(1) = m–k\ ,\ \dots\ ,\ p(m–2) = 0,\ p(m–1) = 0 \quad \text{con } m–k \text{ pari}$$

E' facile osservare che:

- <u>Esistenza</u>: la festa con coppie di amici separate alle quali si aggiungono k sconosciuti, ha p come funzione della festa. Chiameremo questa tipologia di festa: *festa di coppie imperfetta*.

Esempio del grafo di una festa di coppie imperfetta:



Si notano i due legami di coppia A-C e B-E e gli sconosciuti D, G e F.

Proveremo ora che:

- <u>Unicità</u>: se p è la funzione di una festa, questa è per forza una festa di coppie imperfetta.

Teorema della festa di coppie imperfetta

Se la funzione p così definita:

$$p(0) = k,\ p(1) = m – k\ ,\ \dots\ ,\ p(m – 2) = 0,\ p(m – 1) = 0 \quad \text{con } m – k \text{ pari}$$

è la funzione di una festa, allora si tratta di una di una “festa di coppie imperfetta”.

<u>Dimostrazione</u>

Dalla festa di partenza avente funzione

$$p(0) = k,\ p(1) = m – k\ ,\ \dots\ ,\ p(m – 2) = 0,\ p(m – 1) = 0 \quad \text{con } m – k \text{ pari}$$

togliamo i k sconosciuti, ottenendo così una festa con funzione:

$$p'(0) = 0,\ p'(1) = m - k,\ \dots ,\ p'(m - k - 2) = 0,\ p'(m - k - 1) = 0 \quad \text{con } m-k \text{ pari.}$$

Per il teorema della festa a coppie, tale festa è formata solo da coppie. Se ora reintroduciamo i k tolti, otteniamo una festa a coppie *imperfetta*.

Q.e.d.

9.Festa a catene

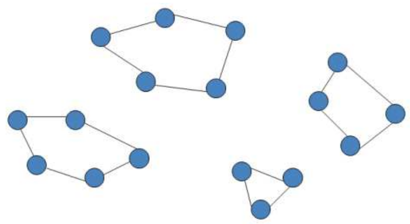
Consideriamo la funzione quasi nulla seguente:

$$p(0) = 0,\ p(1) = 0\ ,\ p(2) = m\ \dots ,\ p(m-2) = 0,\ p(m-1) = 0 \qquad \text{con } m \geq 3$$

E' facile osservare che:

- <u>Esistenza</u>: la festa nella quale sono presenti delle relazioni di amicizia a "catene chiuse" (nelle quali ognuno conosce solo i due vicini di destra e di sinistra) separate tra loro, ha p come funzione della festa. Chiameremo questa tipologia di festa: *festa a catene*.

Esempio del grafo di una festa a catene:



Proveremo ora che:

- <u>Unicità</u>: se p è la funzione di una festa, questa è per forza una festa a catene.

Occorre però prima stabilire un lemma

Lemma

Se la funzione quasi nulla seguente:

$$p(0) = 0,\ p(1) = 0\ ,\ p(2) = m\ \dots ,\ p(m-2) = 0,\ p(m-1) = 0$$

è una funzione di una festa, allora $m \geq 3$.

Dimostrazione

Se A è un invitato della festa allora come tutti deve avere esattamente due amici B e C, quindi nella festa ci sono almeno 3 persone.

Q.e.d.

TEOREMA DELLA FESTA A CATENE

Se la funzione p così definita:

$$p(0) = 0,\ p(1) = 0\ ,\ p(2) = m\ \dots\ ,\ p(m–2) = 0,\ p(m–1) = 0 \quad \text{con } m \geq 3$$

è la funzione di una festa allora si tratta di una di una “festa a catene”.

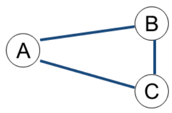
Dimostrazione (per induzione generalizzata)

- Passo base m = 3:

La funzione p vale:

$$p(0) = 0,\ p(1) = 0\ ,\ p(2) = 3$$

è banale verificare che l’unica festa che ha p come funzione è formata da una sola catena chiusa con tre invitati:



- Passo induttivo: supponiamo la tesi vera per ogni n < m e proviamola per m

Consideriamo dunque la funzione della festa p così definita:

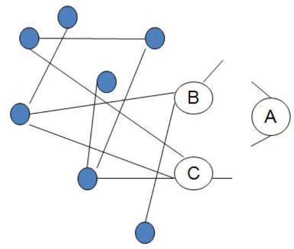
$$p(0) = 0,\ p(1) = 0\ ,\ p(2) = m\ \dots\ ,\ p(m–2) = 0,\ p(m–1) = 0 \quad \text{con } m \geq 3$$

Se ora allontaniamo dalla festa un invitato A (che prima aveva i due amici B e C) siamo ricondotti ad una festa con m–1 persone nella quale, due invitati (B e C) sono rimasti senza un amico: perciò la funzione p si trasforma nella funzione p’:

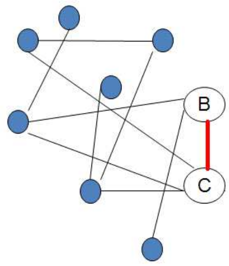
$$p’(0) = 0;\ p’(1) = 2;\ p’(2) = m–3\ ;\dots;\ p’(m–2) = 0$$

Si possono ora presentare due casi:

1° CASO: B e C non si conoscono.



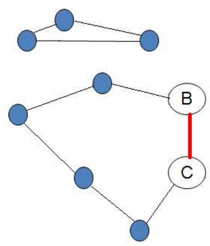
Supponiamo allora che B e C stringono amicizia dopo l'allontanamento di A,



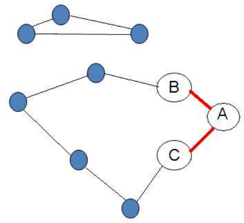
la funzione della festa p' diventa quindi la funzione p'':

$$p''(0) = 0;\ p''(1) = 0;\ p''(2) = m-1;\ldots;\ p''(m-2) = 0$$

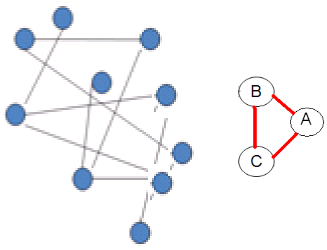
con $m-1 \geq 3$ per il lemma; ma allora per ipotesi induttiva la festa descritta da p'' è una festa a catene. In tale festa B e C devono far parte della stessa catena.



Se ora ristabiliamo i collegamenti iniziali eliminando il collegamento tra B e C e ripristinando quelli tra A e B e A e C, si prova che la festa descritta inizialmente dalla funzione p è una festa a catene.



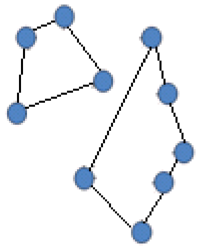
2° CASO: B e C si conoscono. In tale caso A, B e C formano una catena a tre (B e C possono essere amici solo di A).



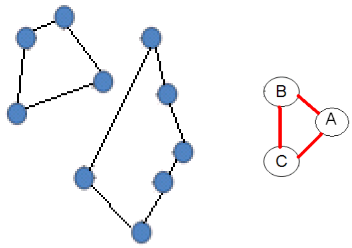
Se ora si allontana il terzetto dal il resto della festa o non resta nulla: in tal caso la festa è formata dalla solo catena A-B-C; oppure si ottiene una nuova festa con funzione p’:

$$p'(0) = 0;\ p'(1) = 0;\ p'(2) = m-3\ ;\ldots;\ p'(m-4) = 0$$

con $m-3 \geq 3$ per il lemma; ma per ipotesi induttiva la festa descritta da p’ è una festa di catene.



Reintroducendo la catena A-B-C si prova che anche in questo caso la festa descritta dalla funzione p è una festa a catene.



Q.e.d.

10. Conclusioni

La nostra analisi potrebbe continuare con lo studio delle feste in cui ci siano gruppi separati all'interno dei quali tutti si conoscano («cricche»), studiando le condizioni di compatibilità delle relative funzioni della festa e classificando le diverse tipologie di feste che si potrebbero generare.

Possibili questioni:

- Date m persone quante sono le possibili cricche presenti alla festa?
- Quali sono le caratteristiche delle funzioni delle feste associate?

11. Bibliografia e sitografia

- Oystein Ore, *I grafi e le loro applicazioni*, Zanichelli
- http://utenti.quipo.it/base5/combinatoria/cassettiera.htm
- http://www.dmi.units.it/divulgazione/matCultSoc/olimpia10/gomut/dispense_olimpioniche.pdf