LA MATEMATICA DELLE CORSE DEI CAVALLI

A.S. 2010 -2011

IVAN COLAVITA (4H)
EMANUELE DI CARO (4M)
CHIARA CEROCCHI (4M)
ELISABETTA AVIZZANO (4M)
ALEXANDRU VIOREL PUPAZA (4H)

ABSTRACT

In questo articolo viene descritto il procedimento per risolvere un problema di combinatoria presente in una competizione di giochi matematici avente a che fare con il calcolo di piazzamenti in una corsa di cavalli.

1.INTRODUZIONE

Semifinali italiane dei
Campionati Internazionali di Giochi Matematici
15 marzo 2008

Quando in una gara ci sono due cavalli, ci sono solo tre piazzamenti possibili: due in cui non c'è parità e uno in cui i due cavalli arrivano a pari merito. Quando la gara è fra tre cavalli, ci sono tredici piazzamenti possibili : sei in cui non c'è alcuna parità, sei in cui due cavalli sono a pari merito (essendo il terzo davanti o dietro a loro) e uno in cui i tre cavalli sono tutti a pari merito. **Quando corrono cinque cavalli, quanti piazzamenti possibili ci sono?**

2. PREREQUISITI

Per risolvere il problema abbiamo bisogno di alcuni prerequisiti.

2.1 Fattoriale

Definizione

Dato un numero naturale n si dice fattoriale di n e si indica con n! il numero:

$n! = n(n-1)(n-2)\dots\dots 3\cdot 2\cdot 1$ se $n>0$

mentre si pone

$0! = 1$

Esempio: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

2.2 Insiemi ordinati

Definizione

Un insieme S si dice ordinato quando si è associato ad ogni elemento un numero naturale: 1 (al primo), 2 (al secondo), 3 (al terzo),….. ecc.

2.3 Calcolo degli ordinamenti di un insieme finito

Ogni insieme S può essere ordinato in modi diversi.
Se S ha n elementi, il numero di ordinamenti diversi di S vale: n!

Infatti:

il primo numero può essere scelto in n modi diversi,
il secondo in (n-1) modi diversi,
il terzo in (n-2) modi diversi,
l'ultimo in n-(n-1) modi diversi, cioè in un solo modo,

ottenendo quindi : $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

2.4 Partizione additiva (ordinata) di un numero naturale

Definizione

Dato un numero naturale n si dice partizione additiva ordinata in m parti, con m>0, ogni m-pla ordinata $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_m)$ di numeri naturali positivi tale che:

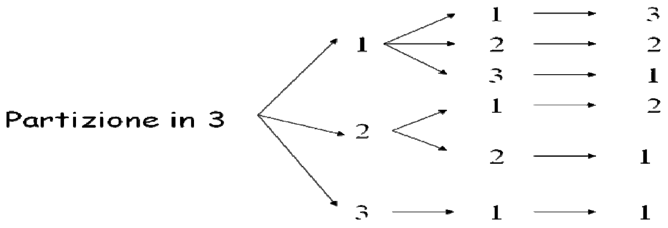
$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \ldots + \lambda_m$$

Esempio 2: (una partizione di 5 in 3 parti)

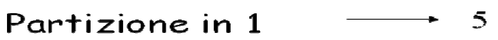
$5 = 1+2+2$

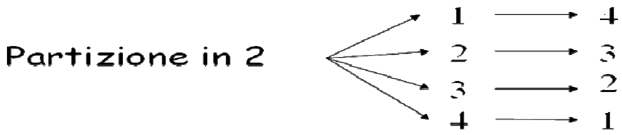
Per determinare tutte le partizioni si possono utilizzare degli schemi ad albero:

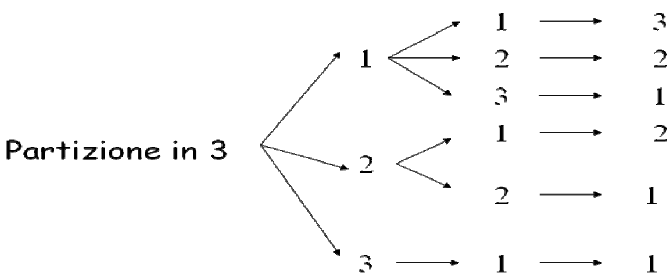
Esempio 3: (tutte le partizioni di 5 in 3 parti)

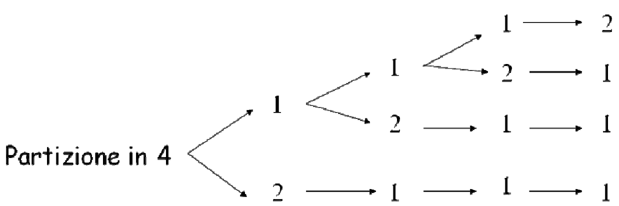


3. DETERMINAZIONE DELLE PARTIZIONI ORDINATE DI 5 IN 1, 2, 3, 4, 5 PARTI









4. DALLE PARTIZIONI ORDINATE AI PIAZZAMENTI

Vediamo ora come le partizioni ordinate ci aiutino a contare i piazzamenti.
Illustriamo l'idea con alcuni esempi:

Consideriamo 5 cavalli: scelta la partizione ordinata di 5 (1;1;3) e scelto un ordinamento dei cavalli si ha:

a b c d e

Se si sceglie un altro ordinamento dei cavalli mediante la stessa partizione ordinata di 5 (1;1;3) si ottiene un altro piazzamento:

b a c d e

Possiamo continuare così cambiando ogni volta l' ordinamento dei 5 cavalli e questo può avvenire in $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ modi diversi.

5. CORREZIONE DEL CALCOLO

Osserviamo che considerare per ogni partizione ordinata tutti gli ordinamenti non risolve ancora il problema.
Infatti: ci sono ordinamenti diversi dei cavalli che generano lo stesso piazzamento esempio:

a b c d e

a b d c e

E quindi se si considerano tutti gli ordinamenti dei 5 cavalli associati ad alcune partizioni otteniamo più volte alcuni piazzamenti. Ma quante volte accade?

Per ogni piazzamento associato alla partizione (1;1;3) ritroviamo più volte quelli che si ottengono scambiando tra di loro i tre cavalli che arrivano insieme al terzo posto, e questo avviene un numero di volte uguale a $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Dunque i piazzamenti associati alla partizione (1;1;3) non sono 5! bensì:

$$\frac{5!}{3!}$$

6. Conclusione

Siamo ora in grado di calcolare tutti i piazzamenti.

Partizione in 1

(5)

1 Piazzamento

+

Partizioni in 2

$(1,4) = \frac{5!}{4!} = 5$

$(2,3) = \frac{5!}{2!3!} = 10$

$(3,2) = \frac{5!}{2!3!} = 10$

$(4,1) = \frac{5!}{4!} = 5$

30 Piazzamenti

+

Partizioni in 3

$(1,1,3) = \frac{5!}{3!} = 20$

$(1,2,2) = \frac{5!}{2!2!} = 30$

$(1,3,1) = \frac{5!}{3!} = 20$

$(2,1,2) = \frac{5!}{2!2!} = 30$

$(2,2,1) = \frac{5!}{2!2!} = 30$

$(3,1,1) = \frac{5!}{3!} = 20$

150 Piazzamenti

+

Partizioni in 4

$(1,1,1,2) = \frac{5!}{2!} = 60$

$(1,1,2,1) = \frac{5!}{2!} = 60$

$(1,2,1,1) = \frac{5!}{2!} = 60$

$(2,1,1,1) = \frac{5!}{2!} = 60$

240 Piazzamenti

\+

Partizione in 5

$(1,1,1,1,1) = 5! = 120$

120 Piazzamenti

=

541 Piazzamenti

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

[1] http://matematica.unibocconi.it/articoli/archivio-giochi
[2] http://it.wikipedia.org/wiki/Fattoriale
[3] http://it.wikipedia.org/wiki/Calcolo_combinatorio
[4] http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads//2010/04/logica2.pdf