LA GRANDE MATRICE

FABRIZIO AFFEDE
MARCO FIUMARA
GIANLUCA RICCI
MARIA ROSARIA FRARACCIO
CHIARA AURIA

ABSTRACT. Prendendo spunto da un problema di una gara di matematica, si illustra un procedimento risolutivo che sfrutta la struttura simmetrica di una matrice infinita.

1. INTRODUZIONE

In una delle gare di matematica dello scorso anno scolastico, ci siamo trovati ad affrontare un problema in cui bisognava individuare il valore di una cella in una matrice infinita avendone solo le coordinate. Riportiamo di seguito il testo del problema:

15. Una grande matrice

0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	3	2	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Riempite le caselle della tabella rettangolare con dei numeri interi non negativi, rispettando le seguenti regole.

Per la prima riga:

- in alto, a sinistra, scrivete 0; dopo non si potrà più mettere 0 né nella prima riga , né nella prima colonna;
- nella casella successiva della prima riga, scrivete 1 (il primo numero possibile); dopo, non si potrà più mettere 1 né nella prima riga né nella seconda colonna;
- e così via (la prima riga conterrà dunque, in ordine, tutti i numeri interi non negativi).

Per la seconda riga:

- nella prima colonna scrivete 1 (è il primo numero possibile, dato che 0 figura già in quella colonna);
- nella seconda colonna scrivete 0 (è il primo numero possibile);
- nella terza colonna scrivete 3 (è il primo numero possibile, dato che 0 e 1 compaiono già nella stessa riga e 2 compare già nella terza colonna);
- e così via, andando avanti allo stesso modo nella seconda riga e in quelle successive.

Quale numero figurerà nell'intersezione tra la 1001.esima riga e la 2002.esima colonna ?

(Gara a squadre 2012, centro Pristem dell'università Bocconi)

2. QUADRATI BINARI

Consideriamo un quadrato di celle (i; j) con $1 \leq i \leq 2^n$ $1 \leq j \leq 2^n$

ESEMPIO CON N=4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
3	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
4	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
5	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
6	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
7	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
8	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
9	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
10	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
11	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
12	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
13	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
14	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
15	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

suddividiamo questo quadrato in quattro sottoquadrati di lato 2^{n-1},

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
3	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
4	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
5	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
6	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
7	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
8	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
9	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
10	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
11	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
12	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
13	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
14	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
15	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

e continuiamo a dividere ogni quadrato ottenuto i quattro nuovi sottoquadrati fino a che si può.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
3	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
4	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
5	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
6	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
7	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
8	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
9	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
10	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
11	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
12	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
13	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
14	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
15	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Chiameremo tutti i quadrati così ottenuti: *quadrati binari.*

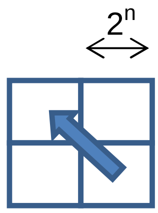
3. Struttura simmetrica della matrice

Si può notare che i quattro sottoquadrati che si ottengono dopo ogni divisione, sono a due a due uguali, e precisamente sono uguali i quadrati simmetrici rispetto al centro del quadrato di cui fanno parte.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
3	2	3	0	1	6	7	4	5	0	11	8	9	14	15	12	13
4	3	2	1	0	7	6	5	4	1	10	9	8	15	14	13	12
5	4	5	6	7	0	1	2	3	2	13	14	15	8	9	10	11
6	5	4	7	6	1	0	3	2	3	12	15	14	9	8	11	10
7	6	7	4	5	2	3	0	1	4	15	12	13	10	11	8	9
8	7	6	5	4	3	2	1	0	5	14	13	12	11	10	9	8
9	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
10	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
11	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
12	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
13	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
14	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
15	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

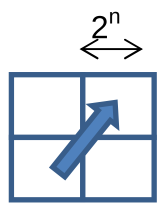
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
3	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
4	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
5	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
6	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
7	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
8	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
9	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
10	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
11	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
12	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
13	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
14	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
15	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Se nella cella (r, c) di un quadrato binario di lato 2^n è presente un numero v allora lo stesso valore si trova nella cella



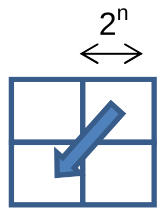
$(r – 2^n ; c – 2^n)$

oppure



$(r – 2^n ; c + 2^n)$

oppure



$(r + 2^n ; c – 2^n)$

4. Quadrati laterali

Chiamiamo *quadrati laterali* i quadrati binari che confinano con il bordo in alto e a sinistra della matrice.

Quadrati laterali

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
3	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
4	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
5	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
6	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
7	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
8	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
9	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
10	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
11	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
12	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
13	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
14	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
15	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Quadrati non laterali

I quadrati laterali più piccoli sono formati da un solo quadrato. Il numero in essi contenuto si ottiene togliendo 1 all'indice di riga (quadrato della prima colonna) o all'indice di colonna (quadrato della prima riga).

Osserviamo inoltre che in ogni quadrato laterale ci sono sempre almeno due sottoquadrati laterali nei quali si trovano tutti i numeri contenuti nel quadrato di partenza.

Sottoquadrati laterali

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
3	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
4	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
5	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
6	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
7	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
8	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
9	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
10	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
11	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
12	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
13	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
14	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
15	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

5. Algoritmo risolutivo

Teorema

Dato una cella (r ,c) della matrice è sempre possibile in un numero finito di passi trovare una cella della prima riga o della prima colonna contenente lo stesso valore.

Dimostrazione

E' sempre possibile trovare un quadrato di celle (i; j) con $1 \le i \le 2^n$ e $1 \le j \le 2^n$ che contiene la cella (r, c); ma questo è un quadrato laterale, possiamo quindi trovare lo stesso valore della cella (r, c) anche in un altro quadrato laterale di lato 2^{n-1},
ripetendo il ragionamento più volte otteniamo via-via quadrati laterali sempre più piccoli fino ad arrivare ad una cella della prima riga o colonna, il cui contenuto è noto; tale valore coincide con quello della cella (r, c) di partenza

6. Un esempio

Proviamo a determinare la cella della prima riga o della prima colonna che ha lo stesso valore della cella (11, 10)

Il primo quadrato binario da considerare è il seguente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
3	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
4	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
5	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
6	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
7	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
8	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
9	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
10	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
11	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
12	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
13	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
14	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
15	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Abbiamo poi diviso il primo quadrato in quattro sottoquadrati, simmetrici fra loro a due a due:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
3	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
4	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
5	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
6	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
7	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
8	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
9	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
10	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
11	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
12	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
13	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
14	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
15	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

e ci siamo spostati in un quadrato laterale con il seguente cambiamento di cella:
(11, 10) $\Rightarrow$ $(11 - 2^3, 10 - 2^3)$ $\Rightarrow$ (3, 2)

Abbiamo poi diviso questo quadrato in quattro sottoquadrati:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
3	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
4	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
5	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
6	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
7	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
8	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
9	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
10	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
11	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
12	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
13	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
14	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
15	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

e poi ancora una volta

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
3	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
4	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
5	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
6	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
7	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
8	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
9	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
10	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
11	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
12	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
13	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
14	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
15	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

e ci siamo spostati in un quadrato laterale con il seguente cambiamento di cella:

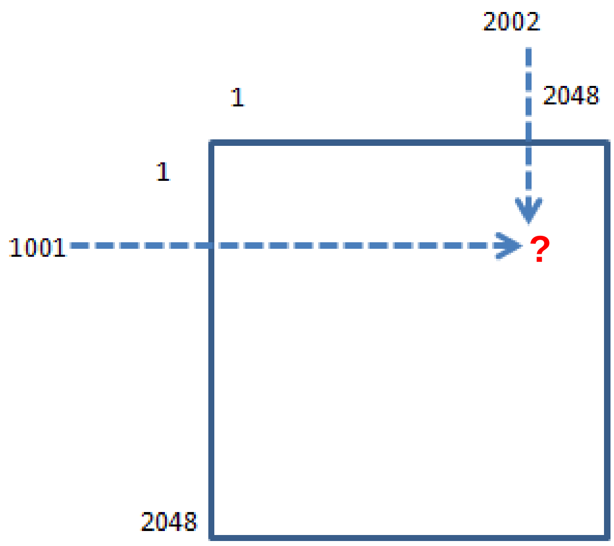
$(3, 2) \quad \Rightarrow \quad (3 - 2^1, 2 + 2^1) \quad \Rightarrow \quad (1, 4)$

fino ad ottenere una cella della prima riga.
Il numero cercato si ottiene quindi togliendo 1 all'indice di colonna: $4 - 1 = 3$

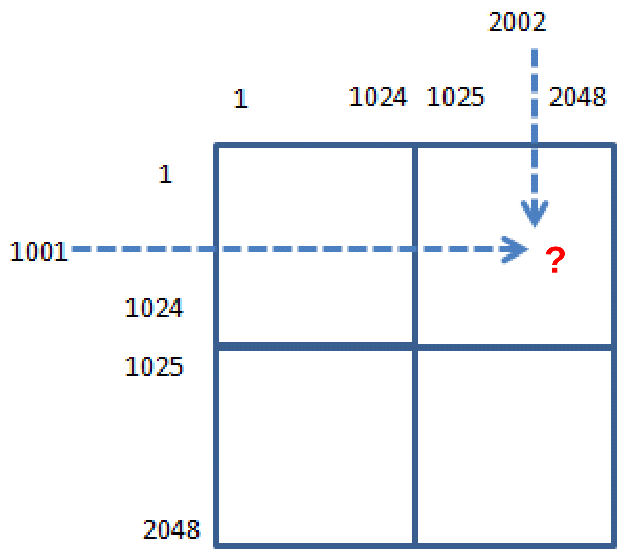
7. Il problema della gara

Passiamo ora a risolvere il problema della gara. Dobbiamo scoprire il valore della cella (1001, 2002). Ecco i vari passi.

Si individua il più piccolo quadrato laterale (confinante con entrambi i lati della matrice) contenente la cella (1001, 2002)

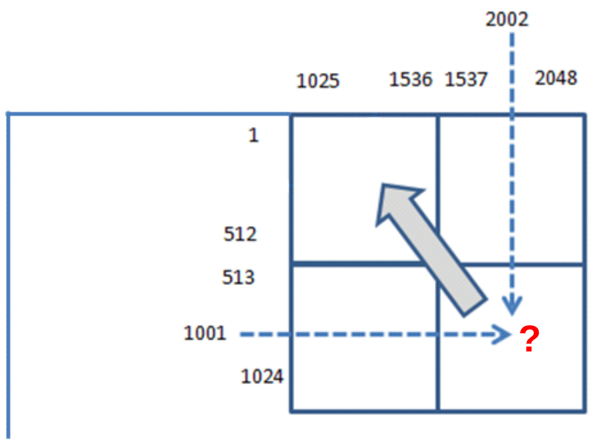


si tratta di un quadrato binario di lato 2^{11} ; si individua poi il sottoquadrato binario di lato 2^{10} che contiene la cella.



Si tratta di un quadrato laterale, per cui non si effettuano “spostamenti”.

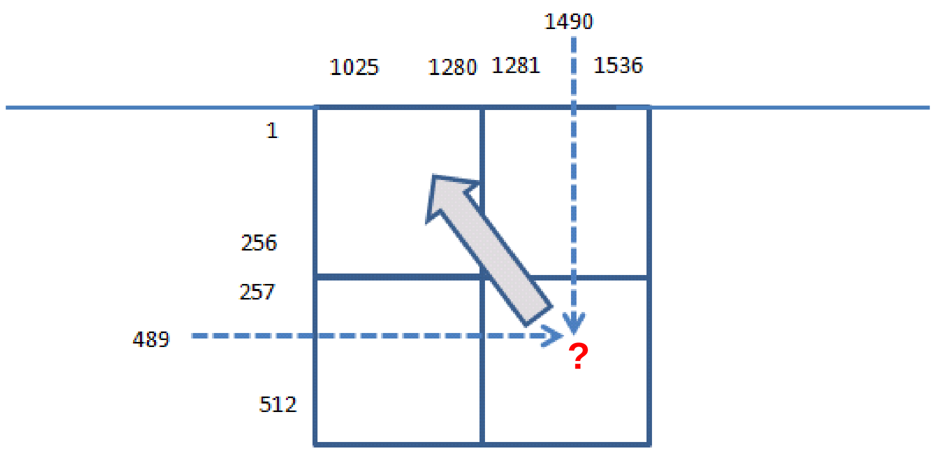
Si individua il sottoquadrato binario di lato 2^9 che contiene la cella.



Si tratta di un quadrato non laterale, per cui si effettua uno spostamento.

$(1001; 2002) \Rightarrow (1001 - 2^9; 2002 - 2^9) = (489, 1490)$

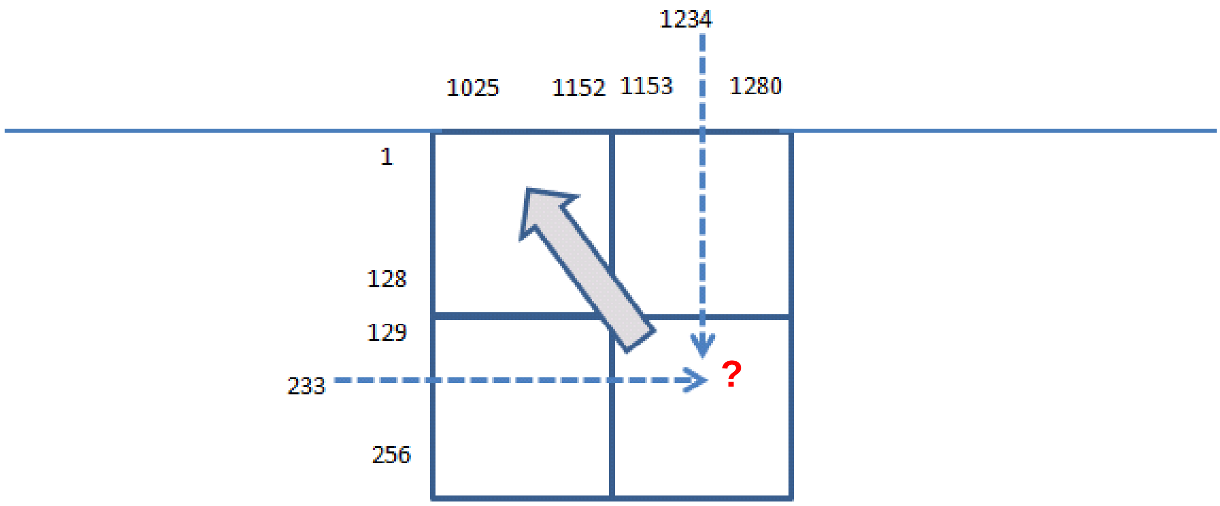
Si individua il sottoquadrato binario di lato 2^8 che contiene la cella.
(da qui in poi i disegni non rispettano le proporzioni)



Si tratta di un quadrato non laterale, per cui si effettua uno spostamento.

$(489, 1490) \Rightarrow (489 - 2^8; 1490 - 2^8) = (233, 1234)$

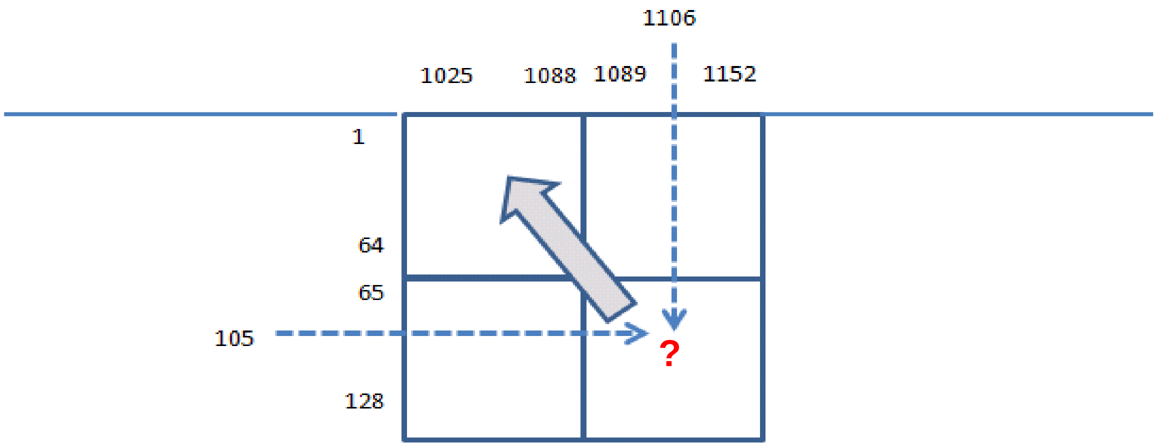
Si individua il sottoquadrato binario di lato 2^7 che contiene la cella.



Si tratta di un quadrato non laterale, per cui si effettua uno spostamento.

$(233, 1234) \Rightarrow (233 - 2^7; 1234 - 2^7) = (105, 1106)$

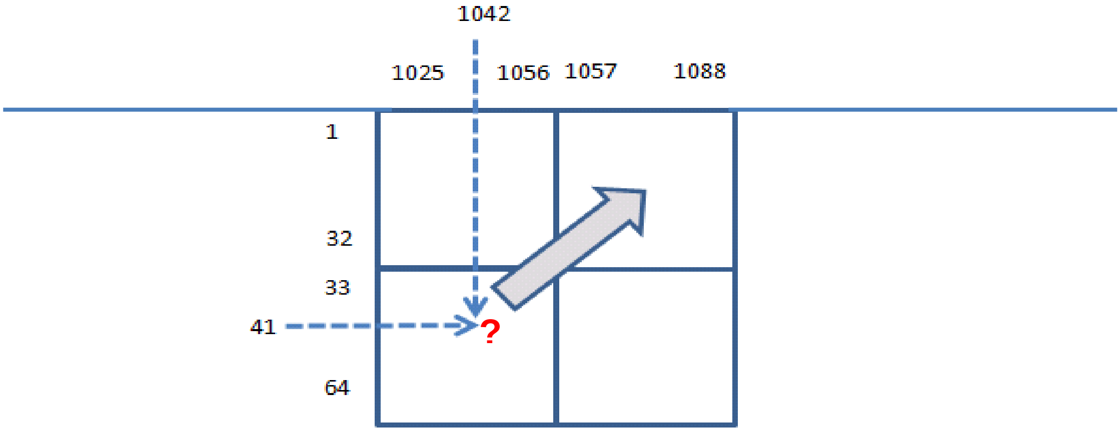
Si individua il sottoquadrato binario di lato 2^6 che contiene la cella.



Si tratta di un quadrato non laterale, per cui si effettua uno spostamento.

$(105, 1106) \Rightarrow (105 - 2^6; 1106 - 2^6) = (41, 1042)$

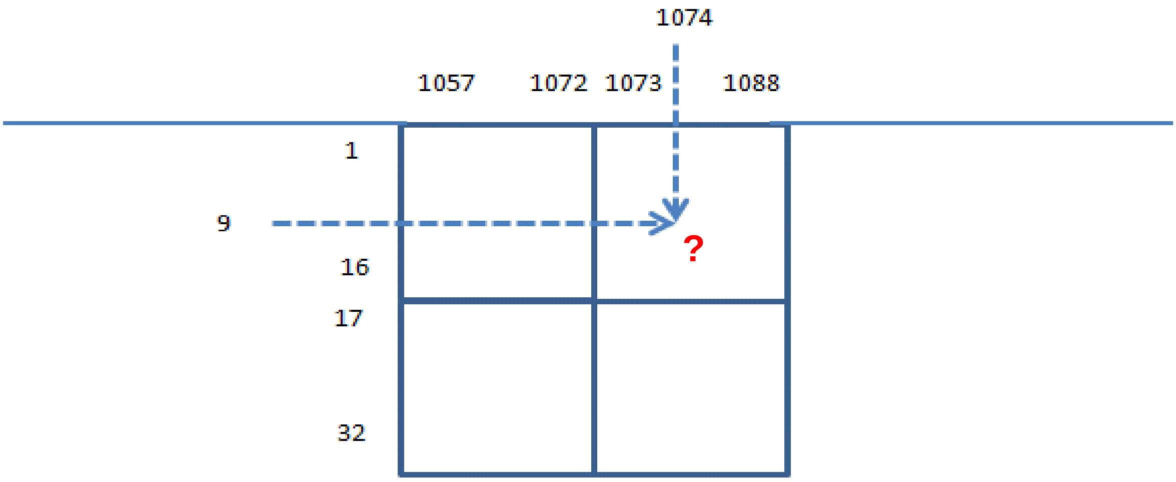
Si individua il sottoquadrato binario di lato 2^5 che contiene la cella.



Si tratta di un quadrato non laterale, per cui si effettua uno spostamento.

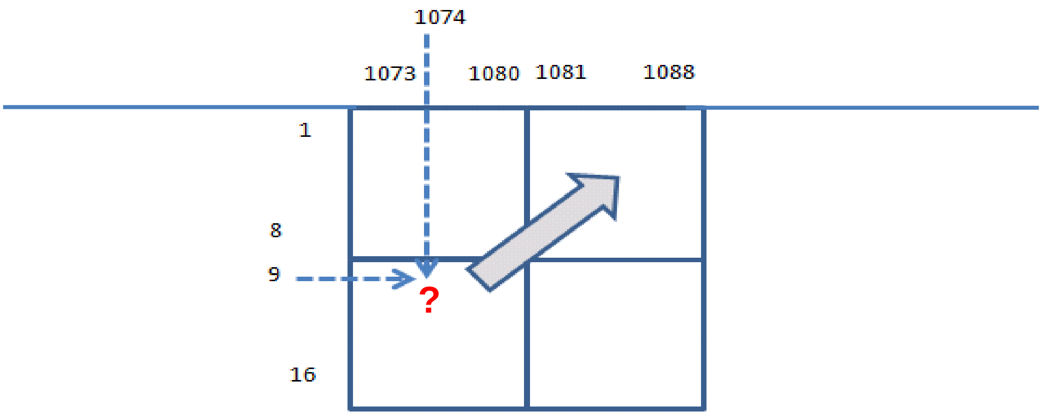
$(41, 1042) \Rightarrow (41 - 2^5; 1042 + 2^5) = (9, 1074)$

Si individua il sottoquadrato binario di lato 2^4 che contiene la cella.



Si tratta di un quadrato laterale, per cui non si effettuano “spostamenti”.

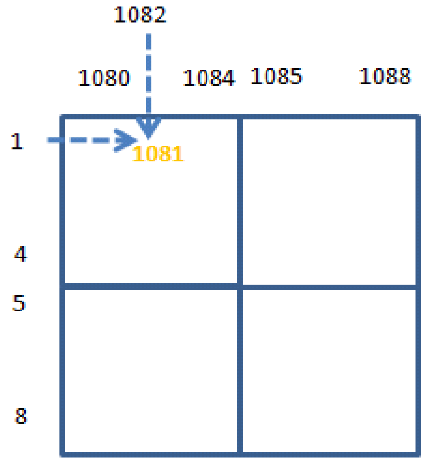
Si individua il sottoquadrato binario di lato 2^3 che contiene la cella.



Si tratta di un quadrato non laterale, per cui si effettua uno spostamento.

$(9, 1074) \Rightarrow (9 - 2^3; 1074 + 2^3) = (1, 1082)$

Siamo quindi arrivati ad una cella della prima riga



il numero in essa contenuta si ottiene sottraendo 1 all'indice di colonna.

Il numero cercato è quindi 1081.

8.Conclusioni

Il procedimento trovato sfrutta le caratteristiche della matrice ed e finalizzato alla ricerca della soluzione del problema. Sarebbe interessante studiare la matrice come oggetto matematico interessante in sé; cercando di capire come la sua struttura scaturisca dalle semplici di regole riempimento riga per riga.

9.Bibliografia e sitografia

http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads//2010/04/logica2.pdf

http://matematica.unibocconi.it/sites/default/files/TestiGSQ2012.pdf