Centro di Ricerca e Formazione Permanente per l'Insegnamento delle Discipline Scientifiche

# La geometria del cielo

di Franco Ghione e Walter Febo
con la collaborazione di Stefano Volpe

Il metodo di Aristarco di Samo per calcolare le grandezze del sole e della luna e le loro distanze dalla terra

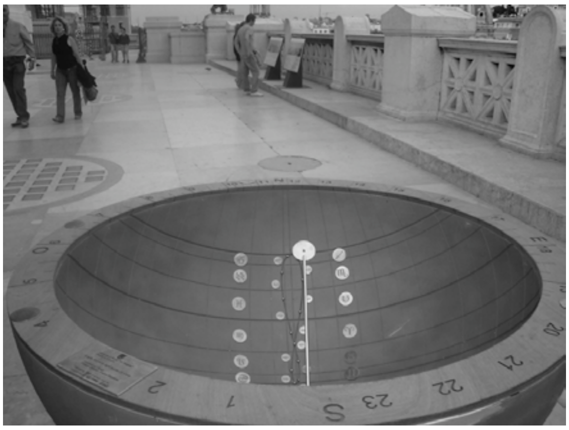
Università di Roma "Tor Vergata"

Tramontata è la luna
e le Pleiadi a mezzo della notte;
anche giovinezza già dilegua,
e ora nel mio letto resto sola.
*Saffo*

Aristarco di Samo è un grande astronomo e matematico, contemporaneo di Archimede, vissuto nel III secolo a.C. La sua unica opera rimastaci è un piccolo trattato "Sulla grandezza e distanza del sole e della luna". Aristarco di Samo è molto importante perché, secondo quanto riferisce Archimede, formulò il modello eliocentrico del sistema solare, ripreso poi da Copernico: il sole al centro, i pianeti su orbite circolari con centro nel sole e la luna su un'orbita circolare attorno alla terra.

*Ora tu ricordi che col termine universo la maggior parte degli astronomi intendono la sfera che ha il centro nel centro della terra e raggio uguale alla distanza tra il centro della terra e quello del sole, dato che tu avrai visto questo nelle dimostrazioni scritte dagli astronomi. Aristraco di Samo, tuttavia, ha pubblicato delle ipotesi dalle quali si ricavano per l'universo delle dimensioni molto più grandi di quelle che ho detto. Lui suppone in effetti che il sole e le stelle fisse restino immobili, che la terra ruoti intorno al sole su una circonferenza che ha il suo centro nel sole*[1]*....*

Ad Aristraco di Samo è anche attribuita, secondo la testimonianza di Vitruvio[2], la meridiana emisferica: un vaso semisferico che riproduce, con una simmetria centrale, il movimento apparente del sole simulando i suoi due cicli fondamentali: quello del giorno diviso nelle 24 ore e quello delle
stagioni diviso nei 12 mesi dell'anno



Meridiana emisferica esposta al Vittoriano
durante la mostra *Apriamo la mente* nel 2005

Esponiamo a grandi linee il metodo di Aristarco di Samo per calcolare la grandezza e la distanza della luna e del sole. La cosa straordinaria è come Aristrarco riesca a

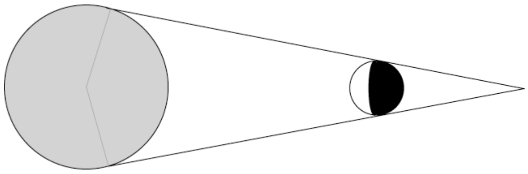
[1] Dall'Arenario di Archimede
[2] Vitruvio, De architettura, Libro IX, capitolo VIII

tradurre osservazioni astronomiche che tutti possiamo fare (le due eclissi, la luna in quadratura e la grandezza apparente del sole e della luna) nel linguaggio della geometria  e da qua ricavare grandezze assolutamente impossibili da misurare direttamente.

La prima ipotesi di Aristarco è che la luna sia illuminata dal sole e che non brilli di luce propria

*Che la luna riceve la luce dal sole*

Questo significa, ipotizzando che la luna il sole e la terra siano sferici[3], che i raggi del sole che illuminano la luna formano un cono, cioè un oggetto geometrico che può essere studiato con i metodi della geometria.

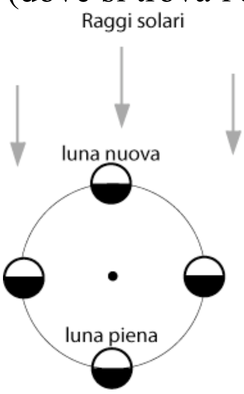


In particolare sulla luna si forma un cerchio che divide la parte buia da quella illuminata.

La seconda ipotesi che formula Aristarco riguarda il movimento della luna: Aristarco ipotizza che la luna mantenga una distanza costante dalla terra.

*Che la terra è assimilata a un punto al centro della sfera dove si muove la luna*

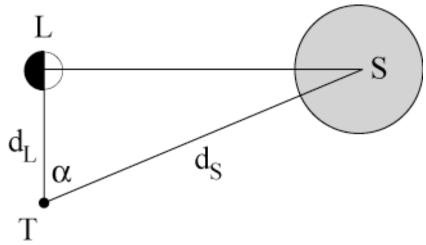
Questo permette di spiegare le fasi lunari secondo la posizione dei tre corpi: sole (che dà luce alla luna), luna e terra (dove si trova l'osservatore).




In particolare esistono due particolari momenti nei quali la luna è illuminata esattamente a metà. In questi casi si dice che la **luna è in quadratura**. Ciò significa che il triangolo Terra Luna Sole è rettangolo in L dato che l'occhio si trova sul piano

[3] Aristarco non formula esplicitamente questa ipotesi ma la sottointende, dovendo, probabilmente essere molto diffusa alla sua epoca.

che divide la luna nella parte illuminata e in quella buia[4] e i raggi del sole sono perpendicolari a quel piano.




L'angolo $\alpha$ tra i segmenti TL e TS può essere valutato dato che la luna è in quadratura anche durante il giorno e quindi possiamo vedere contemporaneamente la luna e il sole e misurare, ad esempio con una diottra, l'angolo tra i due raggi. Aristarco ipotizza che questo angolo valga 87°=90°- 3°.

*Che, quando la luna appare illuminata a metà la sua distanza [angolare] dal sole è più piccola di un quadrate meno un trentesimo di quadrate*

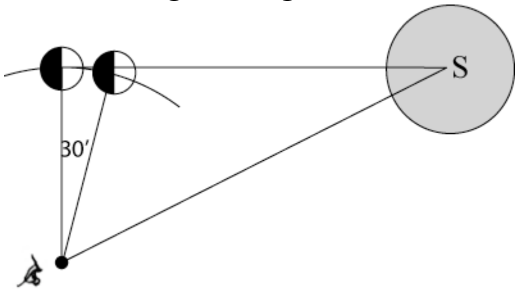
Chiamando le distanze[5] dall'occhio (posto in T) dal centro della luna e dal centro del sole rispettivamente $d_L$, $d_S$ , abbiamo

$$d_L = d_S \cos(\alpha)$$

Considerando che $\cos(87°)=\mathrm{sen}(3°) \cong 0{,}0523$ e che l'inverso di questo numero è circa 19, possiamo concludere, con Aristarco, dicendo che il sole è circa 19 volte più lontano da noi della luna:

$$d_S = 19d_L$$

In realtà il sole è mediamente 400 volte più lontano della luna.
Il fatto è che è molto difficile valutare con precisione l'angolo $\alpha$ (oggi stimato 89°51') dato che non è facile stabilire l'esatto momento nel quale la luna si trova in quadratura. I limiti della risoluzione visiva ci mostrano per un tempo piuttosto lungo la luna illuminata a metà mentre nello stesso tempo l'angolo $\alpha$ cambia sensibilmente data la velocità con la quale la luna si muove sulla sua orbita. La luna infatti compie un giro di 360° in meno di 30 giorni cioè in meno di 720 ore, e quindi si sposta di mezzo grado ogni ora, e quindi, trascurando il movimento della terra rispetto al sole, l'angolo $\alpha$ cambia almeno di mezzo grado ogni ora.

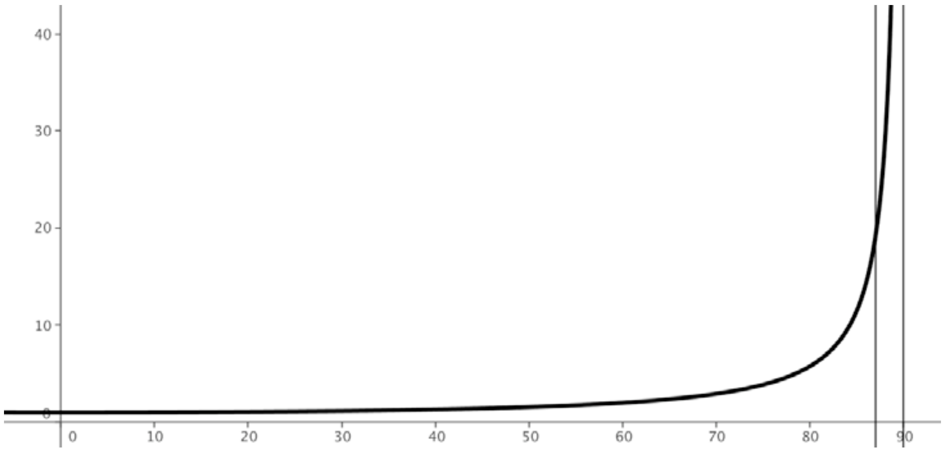



4 Euclide, *Ottica*, Teorema 9
"Il cerchio che divide la parte illuminata da quella buia della luna si vede come un segmento se e solo se l'occhio si trova sul piano del cerchio"

5 L'occhio si immagina posto sulla superficie della terra.

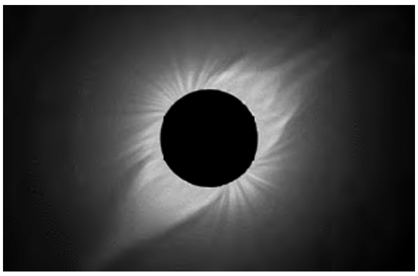
Dopo 1 ora la luna ha compiuto 30' lungo la sua orbita

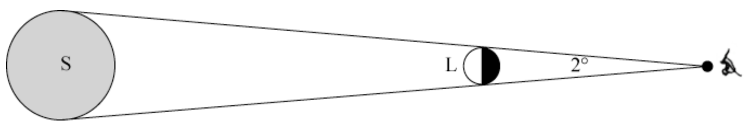
Un'altra difficoltà consiste nel fatto che la funzione 1/cos(x), quando x è molto vicino a 90° cresce molto rapidamente. Piccolissimi incrementi di x producono grandi cambiamenti di 1/cos(x) che è il fattore che Aristarco valuta essere 19. Il grafico seguente[6] mostra l'andamento di questa funzione vicino a 90°.




La retta verticale corrispondente a x=87° dà circa il valore 19

Una ulteriore osservazione utile si riferisce alle **eclissi di sole**. Queste avvengono quando la luna si frappone tra la terra e il sole e finisce per oscurare completamente il sole.

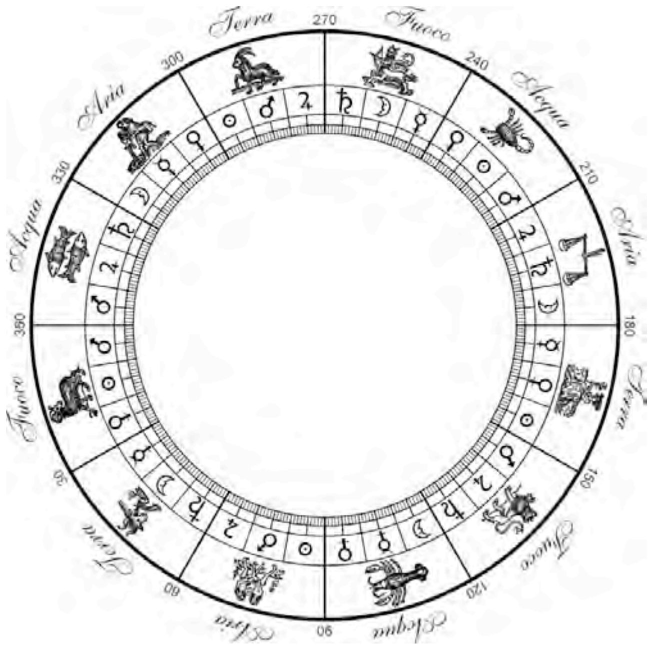





Si osserva che il disco della luna appare sovrapporsi esattamente al sole e quindi le due sfere vengono viste sotto lo stesso angolo. Aristarco valuta questo angolo di 2°.

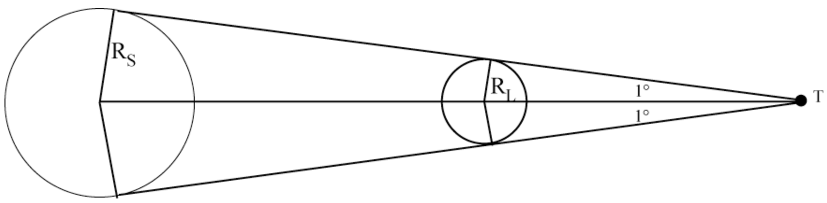
*Che la luna sottende la quindicesima parte di un segno dello zodiaco*

[6] I grafici sono realizzati col software Geogebra che è gratuito e molto utile nella simulazione geometrica



I segni zodiacali sottendono in cielo un angolo di 30°

La misura di questo angolo si determina più facilmente della misura del precedente: esso è l'angolo col quale vengono visti la luna e il sole. In una notte di luna piena, si può misurare, ad esempio, incollando un disco di pochi centimetri di diametro su un vetro e calcolando la distanza alla quale si deve mettere l'occhio per vedere la luna esattamente ricoperta dal disco e da questa distanza è facile ricavare l'angolo. Archimede valuta questo angolo di mezzo grado che è il valore oggi accettato. Questa osservazione ci permette di trovare altre due relazioni tra le nostre 4 incognite. Indichiamo con $R_S$ e $R_L$ i raggi del sole e della luna.




Per similitudine troviamo, seguendo la stima di Aristarco

$$\frac{d_S}{R_S} = \frac{d_L}{R_L} = \frac{1}{\sin(1°)}$$

Poiché sin(1°)=0,0174 , il suo inverso risulta poco più di 57 e quindi, la distanza del sole e della luna dalla terra è poco più di 57 volte il loro raggio.

$$d_S = 57\, R_S \quad , \quad d_L = 57\, R_L$$

Come abbiamo già visto

$$d_S = 19\, d_L$$

e quindi la stessa proporzione varrà per i raggi.

Osserviamo che Aristarco trova una stima molto interessante per il seno di un angolo più piccolo di 22 gradi e mezzo. Scrivendo gli angoli in radianti Aristarco dimostra che,  se $0 < \mu < \pi/8$ , allora

$$\frac{3\mu}{\pi} < sen(\mu) < \frac{10\mu}{3\pi}$$

nel caso $\mu = \pi/180$ (un grado) troviamo

$$54 < \frac{1}{\sin(1°)} < 60$$

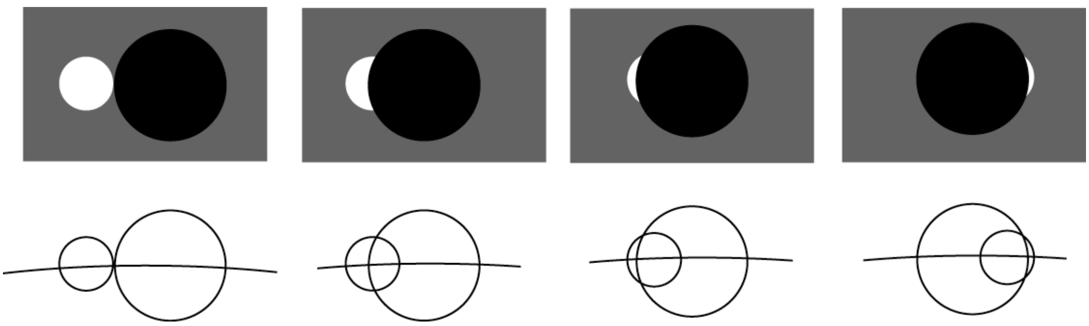
nel caso $\mu = \pi/60$ (tre gradi) troviamo invece

$$18 < \frac{1}{\sin(3°)} < 20$$

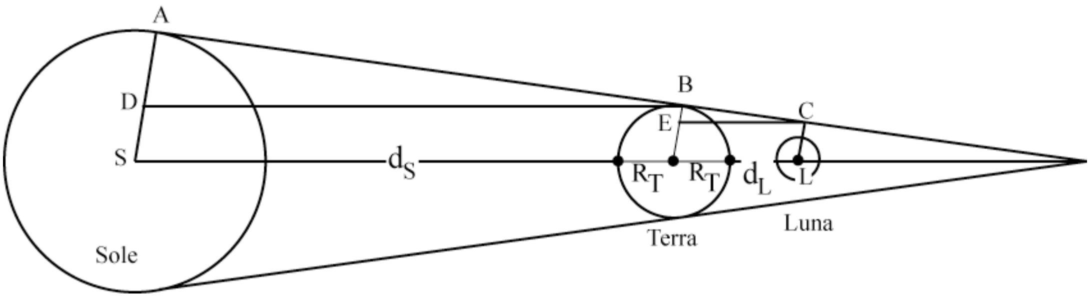
La ultima osservazione che ci può essere utile per trovare una nuova relazione tra le nostre incognite riguarda le **eclissi di luna**.

Da questo punto in poi netta entra in gioco il diametro della Terra. Aristarco effettuò una stima del rapporto fra il diametro della Terra e quello Luna facendo osservazioni sulle eclissi di Luna: misurò prima il tempo trascorso fra l'istante in cui il bordo della Luna era entrato nell'ombra e il primo istante in cui la Luna risultava totalmente oscurata per la prima volta.  Poi confrontò questo valore con quello del tempo durante il quale la Luna era rimasta totalmente oscurata e scoprì, in questo modo, che il periodo di oscurità totale aveva all'incirca la stessa durata del periodo necessario alla Luna per entrare nell'ombra della Terra. Ne trasse la conclusione che la larghezza dell'ombra della Terra nella regione dove essa è attraversata dalla Luna è, con grande approssimazione, due volte il diametro della stessa Luna.

*Che la larghezza [angolare] dell'ombra della terra è quanto [la grandezza angolare di] due lune*



Vediamo come possiamo utilizzare geometricamente questa informazione. Per facilitare il calcolo semplificheremo molto la trattazione di Aristarco il quale considera il percorso della luna interno al cono d'ombra lungo un arco di circonferenza e non come faremo noi lungo tratti rettilinei.




Lo spazio CL, che è qua supposto uguale a metà dell'intero percorso della luna nel cono d'ombra, sarà uguale al diametro della luna cioè $CL=2R_L$. Inoltre guardando i triangoli rettangoli simili ABD e BCE che si sono formati, e denotando con $R_T$ il raggio della terra, abbiamo

$$AD : BE = DB : EC$$

ma $AD = R_S - R_T$, $BE = R_T - 2R_L$, $DB = d_S + R_T$ , $EC = d_L + R_T$ e quindi troviamo la nostra quarta equazione

$$\frac{R_S - R_T}{d_S + R_T} = \frac{R_T - 2R_L}{d_L + R_T}$$

Possiamo esprimere tutte le incognite in funzione del raggio della terra che Eratostene aveva calcolato con la massima precisione[7].
Dalle prime tre equazioni ricaviamo le nostre 4 incognite in funzione di $R_L$.

$$\begin{cases} d_S = 19d_L \\ d_S = 57R_S \\ d_L = 57R_L \end{cases} \qquad \begin{cases} d_S = 1083R_L \\ R_S = 19R_L \\ d_L = 57R_L \end{cases}$$

sostituiamo questi valori nella quarta equazione e ricaviamo una equazione in $R_L$ e $R_T$. Ponendo
$R_L = x$ $R_T = a$, questa equazione diventa

$$\frac{19x - a}{1083x + a} = \frac{a - 2x}{57x + a}$$

Cioè

[7] Eratostene, matematico, astronomo, direttore della biblioteca di Alessandria, contemporaneo di Archimede e Aristarco, aveva valutato con grande precisione la lunghezza di un meridiano e, di conseguenza, il raggio della terra stimandolo circa 4.000 stadi cioè circa 6.300 km. La misura media attualmente accertata è di 6378 Km.

$$3249x^2 - 1119ax - 2a^2 = 0$$

e quindi il rapporto tra il raggio della luna e quello della terra vale

$$\frac{x}{a} = \frac{1119 + \sqrt{1119^2 + 8 \bullet 3249}}{6498} \cong 0{,}34$$

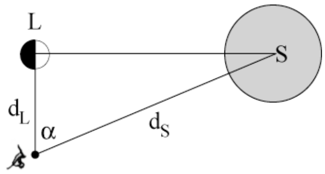
In definitiva, ponendo a = 4000 Stadi (misura di Eratostene), abbiamo circa

$R_L$ = 1.360 Stadi, $R_S$ = 25.840 Stadi, $d_L$ =77.520 Stadi, $d_S$ =1.472.880 Stadi

Dato che uno stadio vale circa 1,57 Km queste misure risultano molto inferiori alle misure reali.
Tanto il metodo di calcolo è fantastico tanto i risultati sono lontani dal vero perché le stime degli angoli fatte da Aristarco, essenzialmente ad occhio, erano (volutamente?) solo indicative. Ci resta uno splendido esempio della potenza del pensiero geometrico per comprendere il nostro Universo.

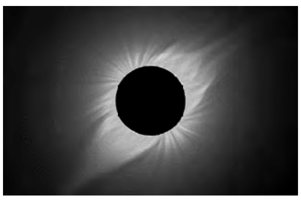
## In sintesi
## 5 incognite, 4 osservazioni sperimentali, 5 equazioni

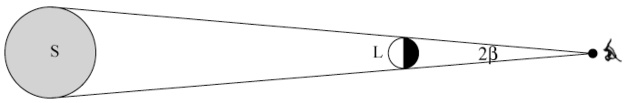
### *La luna in quadratura visibile insieme al sole*

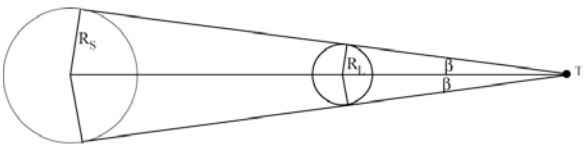



$d_L = d_S \cos(\alpha)$
Aristarco valuta $\alpha$= 87°

### *Eclisse di Sole*



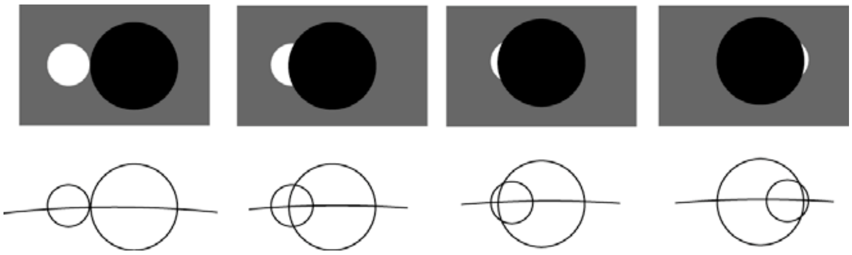


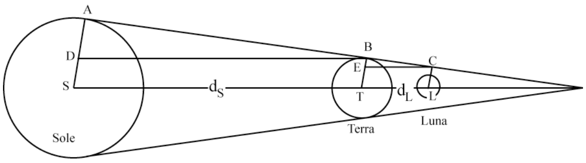




$R_L = d_L \,\mathrm{sen}(\beta)$
$R_S = d_S \,\mathrm{sen}(\beta)$

Aristarco valuta $\beta$=1°

## *Eclisse di luna*



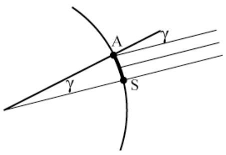



$$\frac{R_S - R_T}{d_S + R_T} = \frac{R_T - 2R_L}{d_L + R_T}$$

Aristarco valuta lo spazio percorso dalla luna, internamente al cono d'ombra della terra, uguale a due diametri lunari.

## *La misura del raggio della terra*

Eratostene contemporaneo di Aristarco e Archimede, calcola la lunghezza di un meridiano terrestre misurando, nello stesso istante, la differenza tra l'inclinazione dei raggi del sole in due località lontane. L'istante scelto, che permette una contemporaneità a distanza, è il mezzogiorno dell'equinozio di primavera (che avviene nello stesso istante se le due città si trovano sullo stesso meridiano). Le città scelte sono Alessandria e Siene.




$$\frac{AS}{2\pi R_T} = \frac{\gamma°}{360°}$$

Eratostene valuta $\gamma$ =7°12' e la distanza AS=Alessandria-Siene =5.000Stadi circa 80Km