ILLUSIONI GEOMETRICHE E NUMERI DI FIBONACCI

A.S. 2010 - 2011

GUGLIELMO SACCO (2C)
ENRICO IZZO (2C)

ABSTRACT

In questo articolo vengono messe in luce alcune "illusioni" geometriche nelle quali giocano un ruolo chiave le proprietà dei numeri di Fibonacci.

1. PREREQUISITI

Iniziamo introducendo i numeri di Fibonacci e le loro proprietà

1.1 I NUMERI DI FIBONACCI

La successione di Fibonacci è una successione di numeri interi naturali definibile assegnando i valori dei due primi termini, F_0:=1 ed F_1:=1, in modo tale che per ogni successivo sia $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ con n>2

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34 …. ecc

Di particolare utilità per la dimostrazione è la proprietà secondo la quale: il limite che tende ad infinito del rapporto tra un numero tra il suo precedente è uguale al numero irrazionale $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ =1,618.. (numero aureo)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

2. IDENTITÀ DI CASSINI

Per ogni n ≥ 1 si ha: $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^{\,2} = (-1)^{n+1}$

<u>Dimostrazione</u> (per induzione)

Per n=1, si ha $F_2 \cdot F_0 - F_1^{\,2} = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1 = (-1)^2$

Supponiamo ora che sia vera: $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^{\,2} = (-1)^{n+1}$
e proviamo che: $F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^{\,2} = (-1)^{n+2}$

Da $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, ricaviamo $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ e, sostituendo in $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^{\,2} = (-1)^{n+1}$

troviamo $F_{n+1} \cdot (F_{n+1} - F_n) - F_n^{\,2} = (-1)^{n+1}$

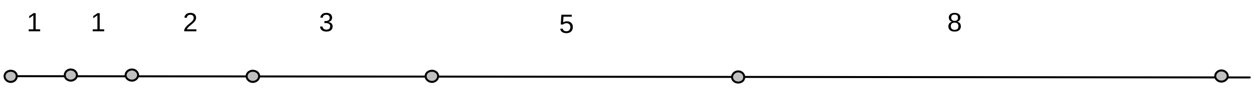
cioè $F_{n+1}^{\,2} - F_{n+1} \cdot F_n - F_n^{\,2} = F_{n+1}^{\,2} - F_n (F_{n+1} + F_n) = F_{n+1}^{\,2} - F_n \cdot F_{n+2} = (-1)^{n+1}$

che non è altro che l'identità $F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^{\,2} = (-1)^{n+2}$ cambiata di segno.

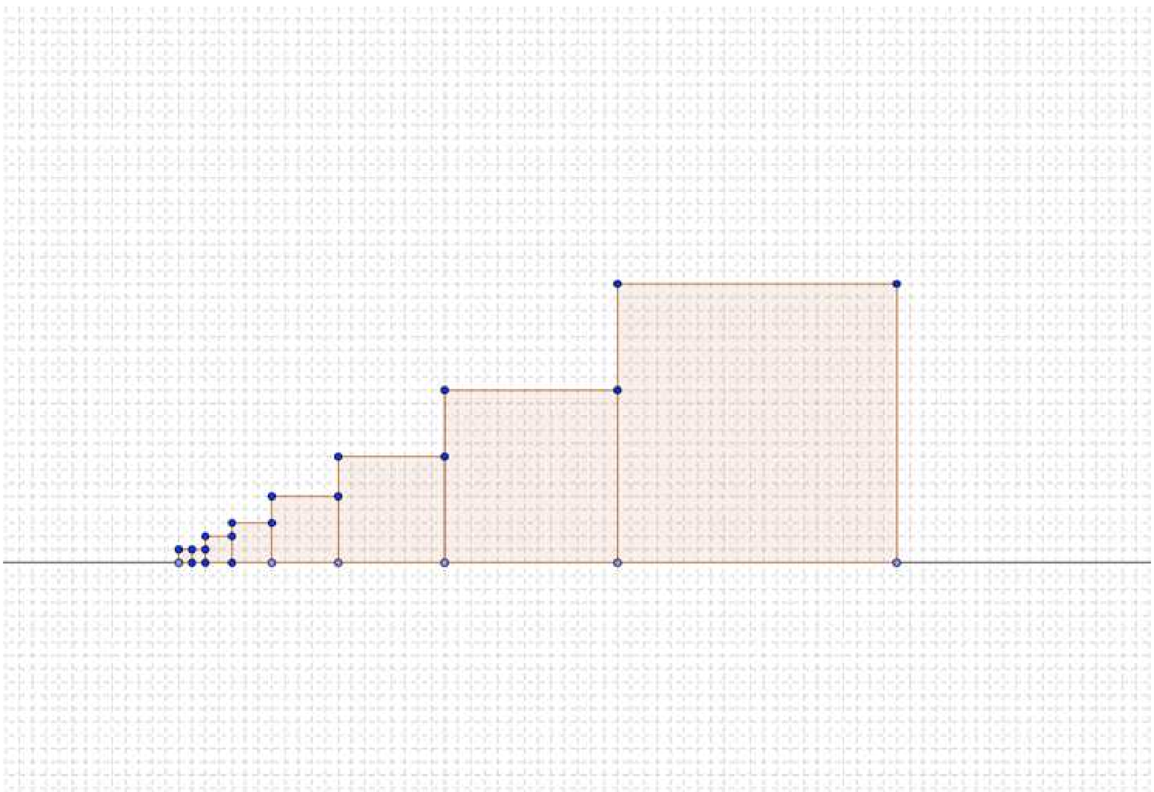
3. L'ILLUSIONE DEI QUADRATI

3.1 COSTRUZIONE

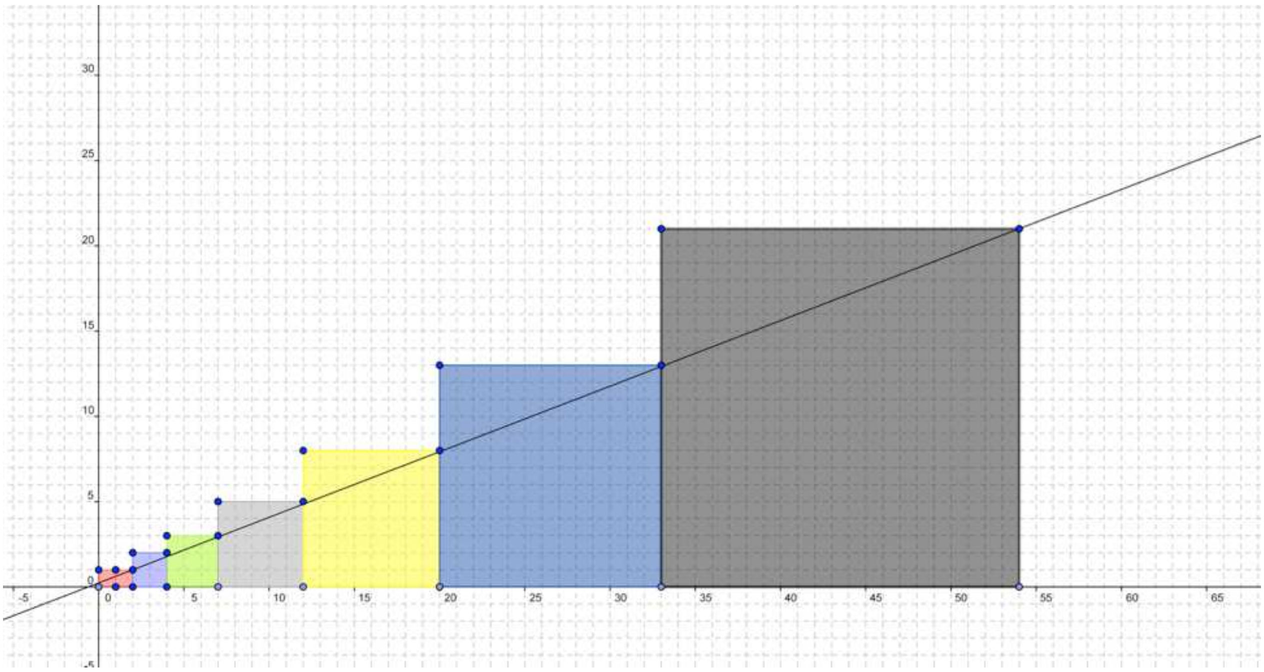
Il punto di partenza della costruzione è quello di tracciare i punti della serie di Fibonacci su di una semiretta, ottenendo il seguente risultato:



Continuando, si costruiscono quadrati aventi come dimensioni i numeri di Fibonacci corrispondenti:



Tracciando gli assi cartesiani e colorando diversamente ogni quadrato, si tracci una linea che passi per il vertice in alto a destra di ogni quadrato escludendo il primo.



Ad una prima osservazione sembrerebbe una retta, ovvero che esista una retta che passi per il vertice in alto a destra di ogni quadrato ad eccezione del primo. Tuttavia non è così: la retta che abbiamo tracciato non appartiene a tutti i vertici in alto a destra dei quadrati, come poteva sembrare ad una prima osservazione. Lo scarto con il quale la retta non appartiene ai vertici non è casuale. E che questo scarto si mantiene costante all'infinito per tutta la serie dei numeri di Fibonacci, è possibile dimostrarlo nel modo che segue.

3.2 La retta cartesiana

La dimostrazione necessita di richiami sul coefficiente angolare di una retta

Definizione

il coefficiente angolare di una retta nel piano cartesiano è il valore del parametro "m" nell'equazione: $y=mx+q$.

Proprietà

- Il coefficiente angolare rappresenta inoltre la tangente dell'angolo α che la retta forma con il semiasse positivo delle x, ovvero $m=\tan\alpha$.

- Il coefficiente angolare della retta passante per i punti $P(x_P;y_P)$ e $Q(x_Q;y_Q)$ vale:

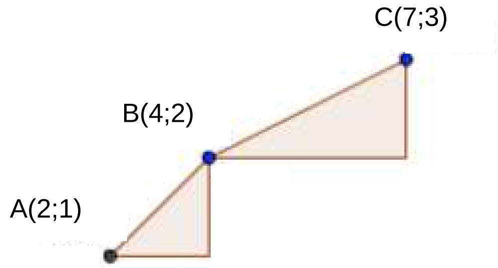
$$m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$$

3.2 ALLINEAMENTO DI TRE VERTICI DI TRE QUADRATI CONSECUTIVI.

Se applichiamo la formula del coefficiente angolare alla retta passante per i vertici del secondo e del terzo dei quadrati costruiti, cioè la retta passante per i punti A(2;1) e B(4;2) si ottiene $m = \frac{2-1}{4-2} = \frac{1}{2}$

Se vogliamo ripetere il calcolo per il terzo e il quarto dei quadrati costruiti, dobbiamo considerare i punti B(4;2) e C(7;3). Si ottiene in questo caso: $m = \frac{3-2}{7-4} = \frac{1}{3}$

Avendo le due rette coefficiente angolare diverso, i punti non sono allineati, come poteva apparire inizialmente



Questo ragionamento può essere generalizzato per una qualunque terna di vertici consecutivi, ovvero per le terne di punti.

Osserviamo intanto che se $P_n (x_n;y_n)$ e $P_{n+1} (x_{n+1};y_{n+1})$ sono due vertici in alto a destra di due quadrati consecutivi si ha:

$x_{n+1} - x_n = F_{n+1}$ e $y_{n+1} - y_n = F_{n+1} - F_n$

Presi ora tre vertici consecutivi P_n , P_{n+1} e P_{n+2} dimostriamo che i coefficienti angolari delle rette $P_n P_{n+1}$ e $P_{n+1} P_{n+2}$ sono diversi e che quindi i tre punti non sono allineati.
Per quanti visto prima i due coefficienti angolari valgono:

$$m_{n,n+1}=\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\frac{F_{n+1}-F_n}{F_{n+1}}=1-\frac{F_n}{F_{n+1}}$$

$$m_{n+1,n+2}=\frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{x_{n+2}-x_{n+1}}=\frac{F_{n+2}-F_{n+1}}{F_{n+2}}=1-\frac{F_n+1}{F_{n+2}}$$

E' allora sufficiente dimostrare che:

$$\frac{F_n}{F_{n+1}}\neq\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$$

.

Per assurdo se fosse:

$$\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$$

allora

$$\frac{F_n}{F_{n+1}}-\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}=0$$

$$\frac{F_n\cdot F_{n+2}-F_{n+1}^{\;2}}{F_{n+1}\cdot F_{n+2}}=0$$

$$F_n\cdot F_{n+2}-F_{n+1}^{\;2}=0$$

e questo contraddice l'identità di Cassini (vedi 2)

Quindi si giunge alla conclusione che i punti non sono allineati, tuttavia estendendo questo ragionamento per n che tende all'infinito, si noti come il coefficiente angolare della "illusoria" retta si avvicini sempre più al valore: $\frac{1}{\varphi^2}$

Infatti ricordando che: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\varphi$

e che vale $\varphi-1=\frac{1}{\varphi}$

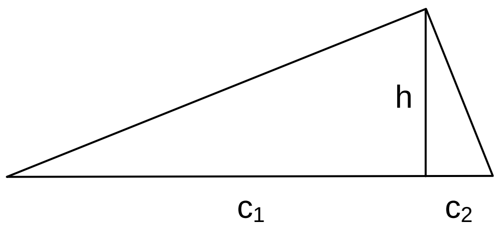
si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{F_n}{F_{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{F_n}{F_{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}}\right)=1-\frac{1}{\varphi}=\frac{\varphi-1}{\varphi}=\frac{\frac{1}{\varphi}}{\varphi}=\frac{1}{\varphi^2}$$

4. L'ILLUSIONE DEI TRIANGOLI RETTANGOLI.

4.1. SECONDO TEOREMA DI EUCLIDE.

In geometria il secondo teorema di euclide è un teorema concernente il triangolo rettangolo e può essere enunciato in due modi diversi a seconda della proprietà che si desidera sottolineare:
a) mediante l'equiestensione tra figure: In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.
b) mediante relazioni e segmenti: In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.



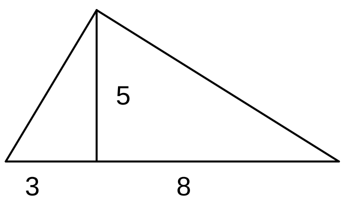
Se indichiamo con c_1 , c_2 e h rispettivamente le lunghezze delle proiezioni dei due cateti e l'altezza relativa all'ipotenusa si ha:

$$c_1 \cdot c_2 - h^2 = 0$$

4.1. COSTRUZIONE

Utilizzando ancora l'identità di Cassini $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^{n+1}$
è possibile con tre numeri di Fibonacci consecutivi costruire dei "falsi" triangoli rettangoli che soddisfano il secondo teorema di Euclide a meno di una unità. L'errore che si commette è sempre di ± 1.

Se ad esempio si costruisce un triangolo di altezza 5 e proiezioni dei lati sulla base pari a 3 e 8 assegna all'altezza ed alle due basi che si formano tre numeri consecutivi di Fibonacci (es: 3,5 e 8) si ottiene l'apparente triangolo rettangolo in figura:



L'illusione cresce con l'aumentare della grandezza dei numeri di Fibonacci scelti.

5. CONCLUSIONE.

Il presente lavoro ha messo in luce alcune curiose proprietà dei numeri di Fibonacci che ben si prestano alla costruzione di figure ingannevoli (vedi [4] pag.46). Ne viene fuori da una parte la ricchezza delle proprietà di questa importanti numeri, ma anche la necessità e la potenza della matematica che con i suoi strumenti analitici riesce a svelare le illusioni prodotte da una erronea percezione della realtà.

6. BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

[1] http://it.wikipedia.org/wiki/Successione_di_Fibonacci
[2] Massimo Bergamini, Anna Trifone, Graziella Barozzi, Talete Le grandezze geometriche, la similitudine, lo spazio, Zanichelli
[3] http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads//2010/04/logica2.pdf
[4] Nicholas Falletta, *Il libro dei paradossi*, Longanesi