Giochi a tasselli mobili

FEDERICO MORODEI
MARTINO WONG
SIMONE CASTELLAN

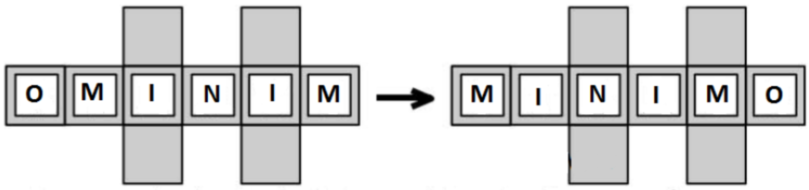
Abstract

I giochi a tasselli mobili sono rompicapi nei quali, muovendo in modo opportuno delle tessere su un tavoliere, si deve ottenere una configurazione richiesta. Tali giochi ben si prestano a diventare oggetto di studio della matematica. Nel presente lavoro, a partire da un problema di una gara, si affrontano alcuni problemi applicati ad un particolare gioco a tasselli mobili e alle sue varianti.

0. INTRODUZIONE: un problema da una gara di matematica

IL MINIMO DEL MINIMO.

In quante mosse, al minimo, si passa dalla configurazione di sinistra a quella di destra? Ogni mossa consiste nello spostamento di un gettone bianco in una casella grigia vuota (immediatamente) adiacente.



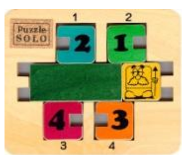
GARA A SQUADRE 2013 UNIVERSITÀ BOCCONI MILANO

Nel problema proposto entrano in gioco diverse questioni che si muovono all'interno della teoria dei cosiddetti "giochi a tasselli mobili".

1. PREREQUISITI

1.1 Giochi a tasselli mobili

Sono chiamati giochi a tasselli mobili i giochi costituiti da una serie di blocchetti mobili che si possono far scorrere all'interno di una scatola attraverso spazi vuoti, senza poter superare i confini della scatola stessa, né essere sollevati dalla scatola o riposizionati.



Terminologia e notazione

Indichiamo con G un generico gioco a tasselli mobili.

Chiamiamo “istanza” del gioco ogni disposizione dei tasselli nella scatola.

Chiamiamo “collegabili” due istanze I_1 e I_2 per le quali esista una sequenza di mosse che fa passare da I_1 a I_2.

Dato un gioco G e due istanze I_1 e I_2 indichiamo con

$$I_1 \overset{G}{\Rightarrow} I_2$$

una (singola) mossa che fa passare da I_1 a I_2 , e con

$$I_1 \overset{G}{\Rightarrow\Rightarrow \ldots \Rightarrow} I_2$$

una sequenza di mosse che fa passare da I_1 a I_2.

1.2 Risolubilità e ottimizzazione

Le due questioni fondamentali nello studio di un gioco a tasselli mobili sono:

- risolubilità
  date due istanze I_1 e I_2 stabilire se sono collegabili;

- ottimizzazione
  date due istanze I_1 e I_2 collegabili, stabilire quali sono le sequenze di mosse che le collegano con il numero minimo di mosse.

Se tutte le istanze sono collegabili, il gioco si dirà “totalmente risolubile”.

1.3 Il gioco del 15

Il gioco a tasselli mobili più famoso è il *Gioco del 15*, formato da quindici blocchetti numerati dall'uno al quindici che possono scorrere in una scacchiera 4 x 4 grazie ad uno spazio vuoto avente le dimensioni di un blocchetto.

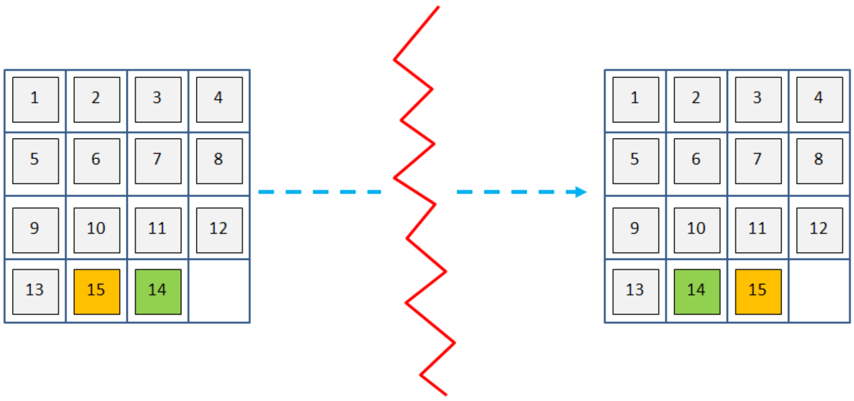
Lo scopo originale del gioco è , partendo da una istanza qualsiasi, ottenere quella con i numeri disposti in ordine crescente e lo spazio vuoto in basso a destra.

1		7	4
5	3	10	8
9	2	6	12
13	14	11	15

$$\Rightarrow\Rightarrow \cdots \Rightarrow$$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Sam Loyd (1841 –1911), famoso creatore di enigmi matematici, mise in palio la cifra di mille dollari come premio per chi fosse riuscito a risolvere il gioco partendo da una posizione identica a quella finale, ma con i numeri 14 e 15 scambiati. Un premio che nessuno mai avrebbe potuto reclamare poiché, come l'autore sapeva benissimo, tale istanza non è collegabile a quella finale [3]



1.4 Risolubilità e ottimizzazione del gioco del 15

<u>Risolubilità</u>

- Le due istanze utilizzate nell'inganno di Loyd non sono collegabili, dunque il gioco del 15 non è totalmente risolubile.

<u>Ottimizzazione</u>

- E' stato provato che se due istanze I_1 , I_2 sono collegabili allora questo può avvenire in massimo 80 mosse [6]

1.5 Calcolo combinatorico

- Permutazioni

Data una n-pla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, si dicono *permutazioni* di tale n-pla tutti i possibili riordinamenti dei suoi elementi

<u>permutazioni semplici</u>

Se in una n-pla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gli elementi sono tutti distinti, le permutazioni si dicono *semplici.*

Es:

$$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}\ \boxed{D}\ \boxed{E}\ \boxed{F} \longrightarrow \boxed{A}\ \boxed{E}\ \boxed{C}\ \boxed{B}\ \boxed{D}\ \boxed{F}$$

Il numero di permutazioni semplici di una n-pla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è dato dalla formula

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

<u>permutazioni con ripetizione</u>

Se in una n-pla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alcuni elementi sono ripetuti le permutazioni si dicono *con ripetizio*ne.

Es:

$$\boxed{O}\ \boxed{M}\ \boxed{I}\ \boxed{N}\ \boxed{I}\ \boxed{M} \longrightarrow \boxed{M}\ \boxed{I}\ \boxed{N}\ \boxed{I}\ \boxed{M}\ \boxed{O}$$

Il numero di permutazioni con ripetizione di una n-pla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con k_1 elementi uguali a x_1, k_2 uguali a x_2, … , k_n uguali a x_n, è dato dalla formula

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots k_n!}$$

<u>trasposizioni</u>

Data una n-pla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, si dicono *trasposizioni* le permutazioni che scambiano di posto due elementi x_j, x_k lasciando al loro posto i restanti. Indicheremo la trasposizione degli elementi x_j, x_k con: $x_j \leftrightarrow x_k$

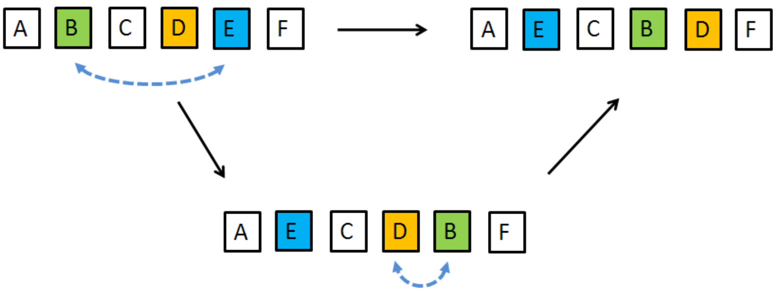
Es:

$$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}\ \boxed{D}\ \boxed{E}\ \boxed{F} \longrightarrow \boxed{A}\ \boxed{E}\ \boxed{C}\ \boxed{D}\ \boxed{B}\ \boxed{F}$$

- Teorema fondamentale delle permutazioni

  Ogni permutazione una n-pla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si può ottenere componendo un numero finito di trasposizioni.

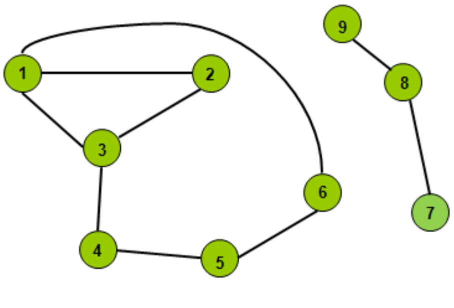
  Es:



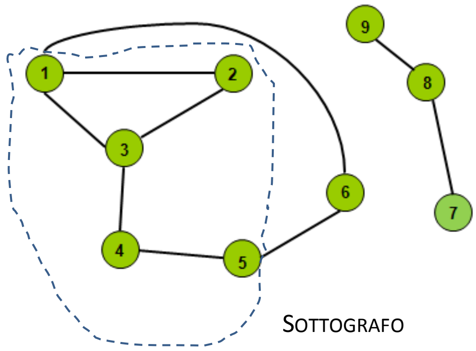
1.6 Teoria dei grafi

- Un *grafo* è un insieme di punti, detti *nodi,* e di linee di collegamento, dette *archi*.
- Un grafo si dice *semplice* se tra due nodi esiste non più di un arco, e se nessun punto è collegato a se stesso da un arco.
- Dato un grafo G, si dice *sottografo* di G un grafo G' che ha nodi e archi in G
- Un *cammino* è una sequenza $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ di nodi, tale che per ogni i = 1,…,n-1 v_i e v_{i+1} sono collegati da un arco del grafo, si dice *lunghezza* del cammino il numero di archi in esso contenuti.
- Due nodi P e Q si dicono *connessi* se esiste un cammino di estremi P e Q . Un grafo si dice *connesso* se ogni per coppia di nodi P e Q , P e Q risultano connessi. Si dice *componente connessa* di un grafo G, un sottografo G' connesso tale che ogni suo nodo non risulti connesso ai nodi appartenenti a $G - G'$.
- Un grafo semplice si dice ciclico se è formato da un cammino $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dove $v_1 = v_n$ e per ogni j e k = 1, 2 , … , n-1 $j \neq k \Rightarrow v_j \neq v_k$

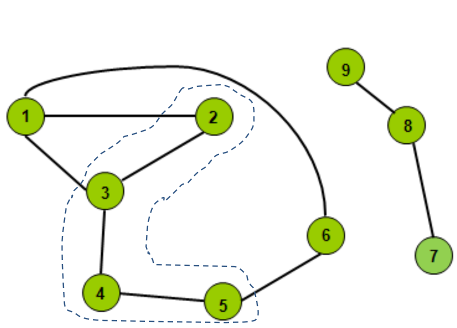
Es:



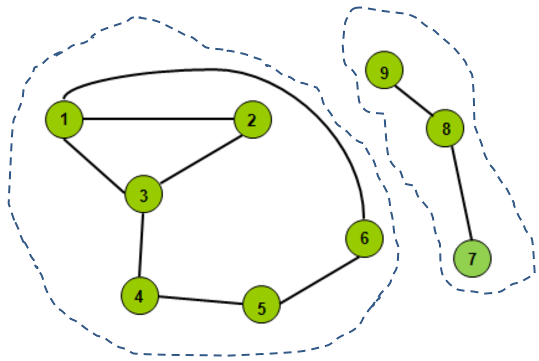
GRAFO SEMPLICE



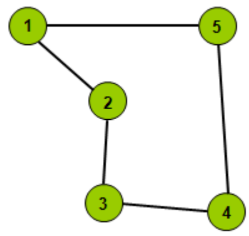
SOTTOGRAFO



CAMMINO DI LUNGHEZZA 3



2 COMPONENTI CONNESSE



GRAFO CICLICO

1.7 Grafo di un gioco

Vediamo ora come è possibile analizzare lo sviluppo di un gioco attraverso l'introduzione di un grafo.

<u>Definizione</u>

Si dice "grafo del gioco" un grafo (semplice) nel quale

- i nodi corrispondono alle istanze del gioco;
- l'arco che collega due nodi I_1 e I_2 indica la mossa che fa passare dall'istanza I_1 all'istanza I_2

Un cammino che collega due nodi corrispondenti a I_1 e I_2 rappresenta dunque una sequenza di mosse che fa passare dall'istanza I_1 all'istanza I_2

1.8 Grafi, risolubilità e ottimizzazione

- Due istanze I_1 e I_2 sono collegabili sse esiste nel grafo un cammino che ha come estremi i nodi corrispondenti a I_1 e I_2
- Un gioco è totalmente risolubile sse ha un grafo connesso.
- Dati due istanze I_1 e I_2 il numero minimo di mosse necessario per passare da I_1 e I_2 coincide con la minima lunghezza dei cammini che hanno come estremi i nodi corrispondenti a I_1 e I_2.

Nota: Nel caso del gioco del 15, per quanto visto, il grafo non può essere connesso. Si dimostra in effetti che tale grafo ha due componenti connesse [3]

2. Giochi a tasselli mobili semplici

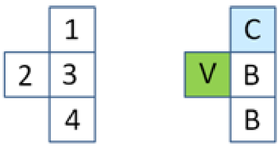
Prima di affrontare l'analisi del gioco iniziale, ci occuperemo di alcune varianti più semplici

2.1 Il gioco della T (T)

- Scatola : 4 caselle collegate tra loro a forma di T
- Tasselli: 2 (verde e celeste)

2.2 Numero delle istanze

Numerate le caselle della scatola, ogni istanza del gioco corrisponde ad una permutazione con ripetizione dei blocchetti C, V, e delle due caselle vuote indicate con B e B.

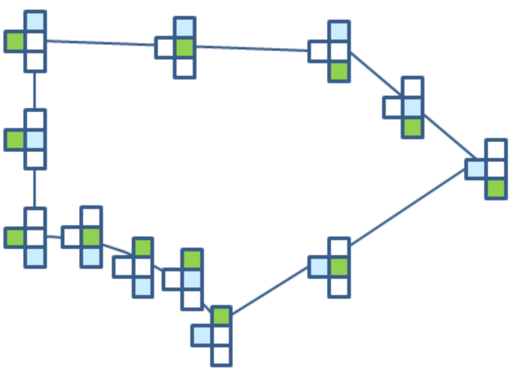


Per quanto visto in 1.5 il numero delle istanze vale:

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

2.3 Grafo del gioco

Nel caso del gioco T il grafo del gioco è il seguente:

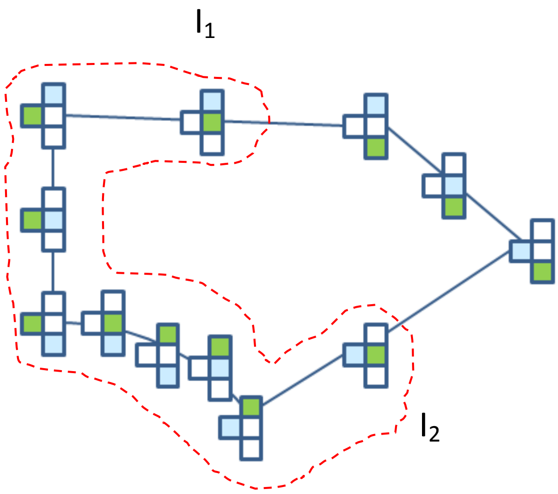


Come si vede si tratta di un grafo ciclico.

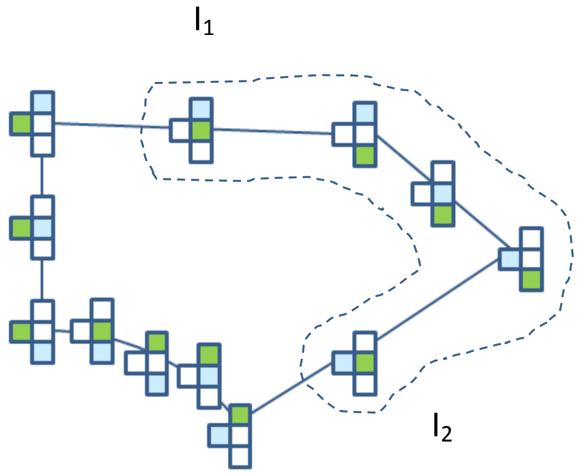
2.4 Risolubilità e ottimizzazione

L'analisi del grafo del gioco ci permette di risolvere il problema della <u>risolubilità</u>. Infatti è sufficiente constatare che il grafo essendo ciclico è un grafo connesso, e quindi (vedi 1.8) il gioco è totalmente risolubile

Per quanto riguarda l'<u>ottimizzazione</u> si osservi che scelte due istanze I_1 e I_2 i nodi corrispondenti individuano nel grafo ciclico due soli cammini aventi questi come estremi. La sequenza ottimale di mosse è dunque quella che corrisponde al più corto di questi due cammini.



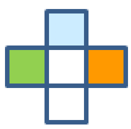
CAMMINO DI LUNGHEZZA 8



CAMMINO DI LUNGHEZZA 4

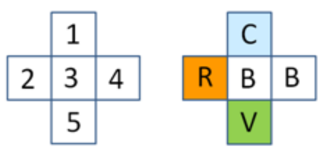
2.5. La croce greca (CG)

- <u>Scatola</u> : 5 caselle collegate tra loro a forma di croce greca
- <u>Tasselli</u>: 3 (verde , celeste e arancione)



2.6 Numero delle istanze

Numerate le caselle della scatola, ogni istanza del gioco corrisponde ad una permutazione con ripetizione dei blocchetti R, C, V, e delle due caselle vuote indicate con B e B.

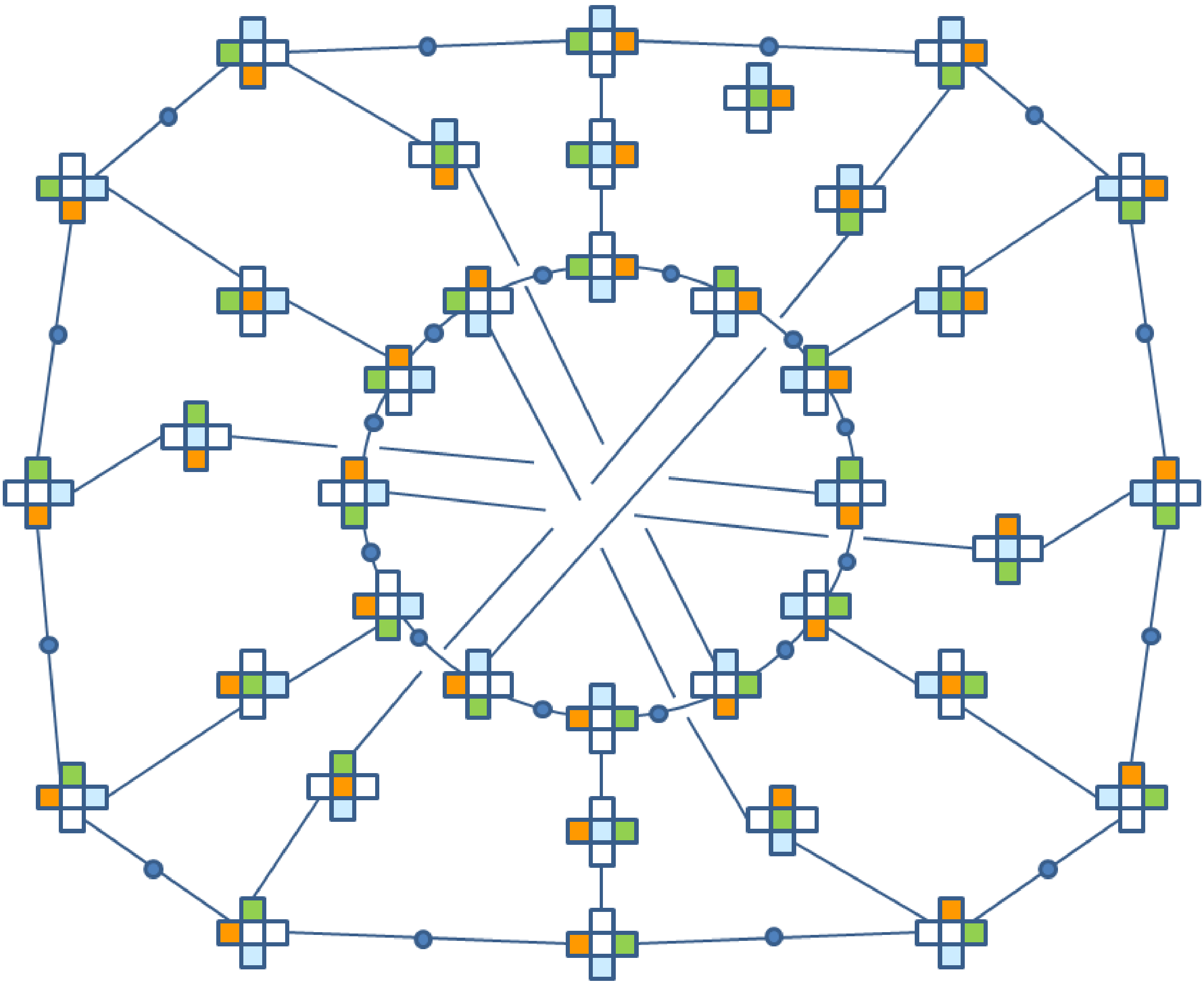


Per quanto visto in 1.5 il numero delle istanze vale:

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

2.7 Grafo del gioco

Nel caso del gioco CG il grafo del gioco è il seguente:

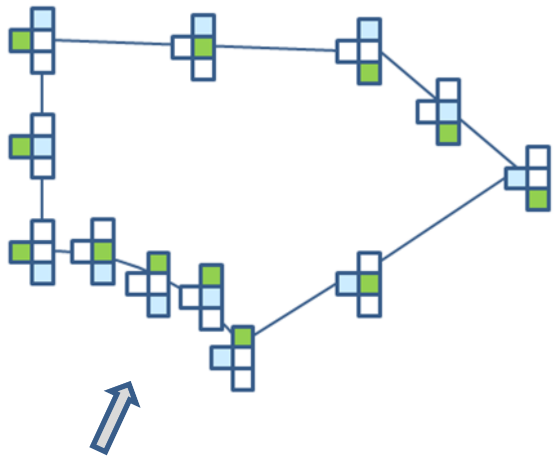


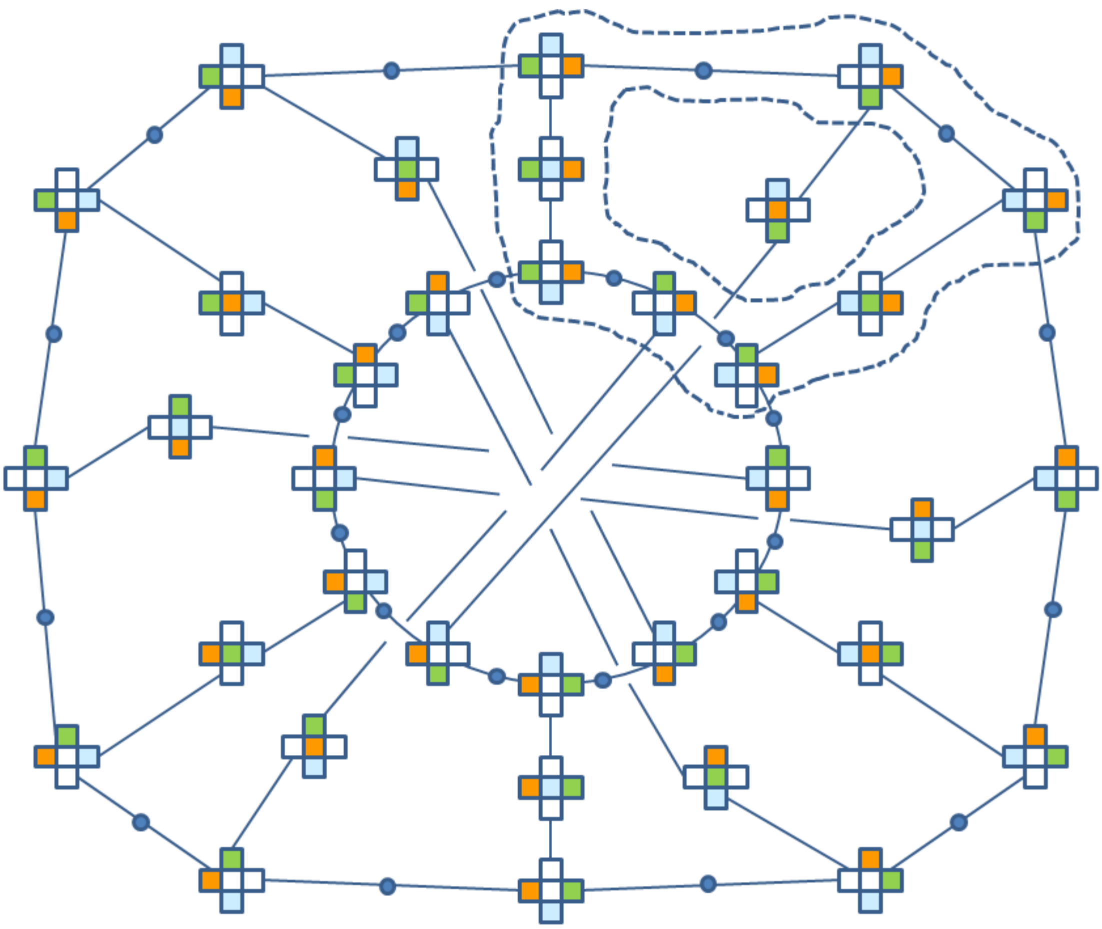
Per semplificare la rappresentazione del grafo abbiamo sostituito con dei pallini blu alcune delle istanze: si tratta delle istante in cui i tre tasselli formano una L.

2.8 Sottografi del gioco

Osservando il grafo della croce greca si possono ritrovare al suo interno tre copie del grafo del gioco T precedentemente studiato. Tali sottografi sono quelli costituiti dalle istanze di gioco in cui non viene mosso uno dei tre tasselli.

Esempio:





2.9 Risolubilità

L'analisi del grafo del gioco ci permette di risolvere il problema della risolubilità. Infatti basta notare che il grafo è connesso, dunque Il gioco CG è totalmente risolubile (vedi 1.8)

2.10 Ottimizzazione

Il problema dell'ottimizzazione è più delicato, non possiamo infatti giovarci direttamente della struttura del grafo come è avvenuto per il gioco T.

Per risolvere il problema si può utilizzare un *algoritmo di ricerca dei cammini di minima lunghezza* [2].

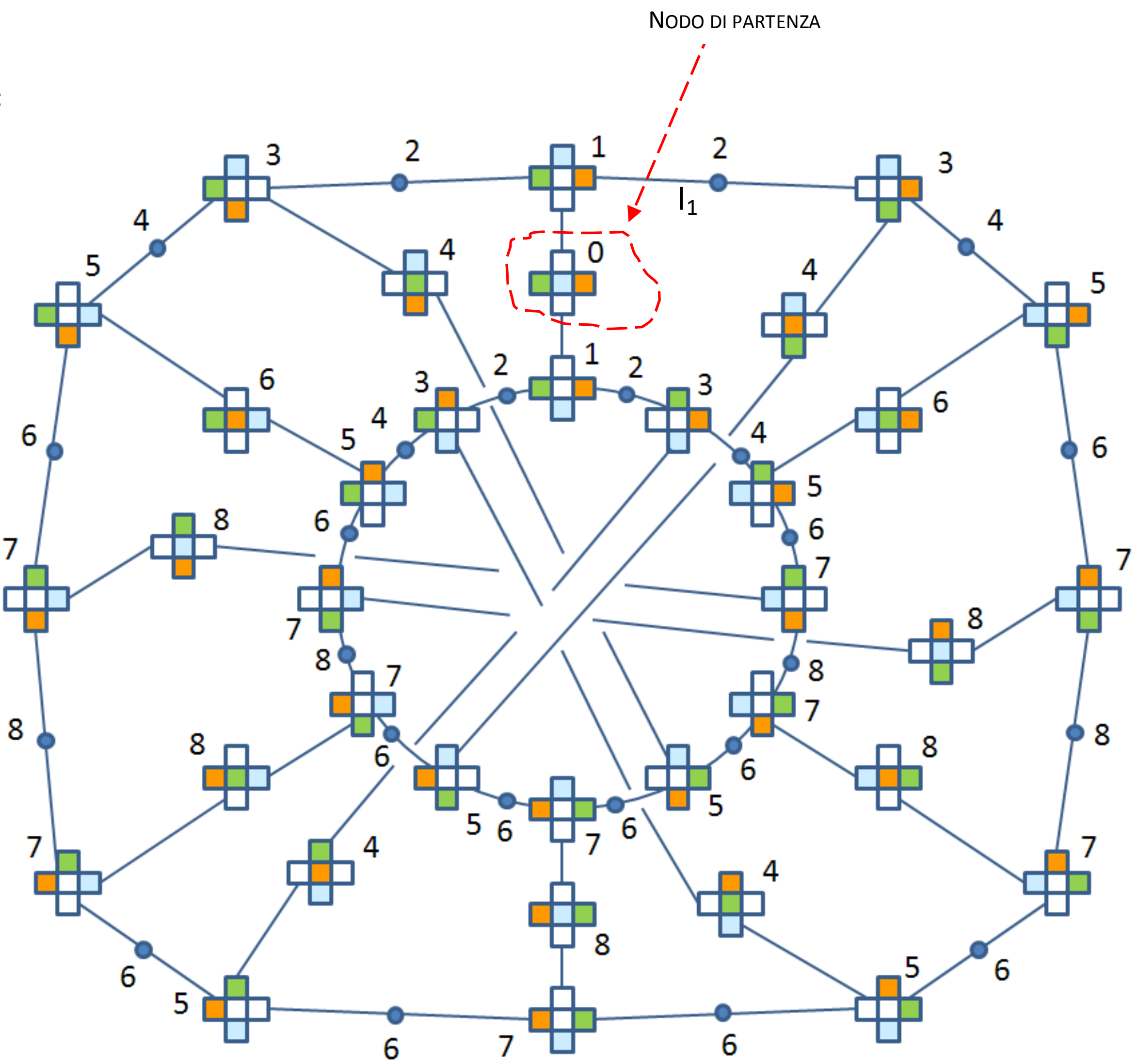
Tale algoritmo permette di associare, a partire da un nodo, un numero naturale n mediante la seguente procedura ricorsiva:

ALGORITMO DI RICERCA DEI CAMMINI DI MINIMA LUNGHEZZA

I) Si assegna 0 al nodo di partenza P_0.

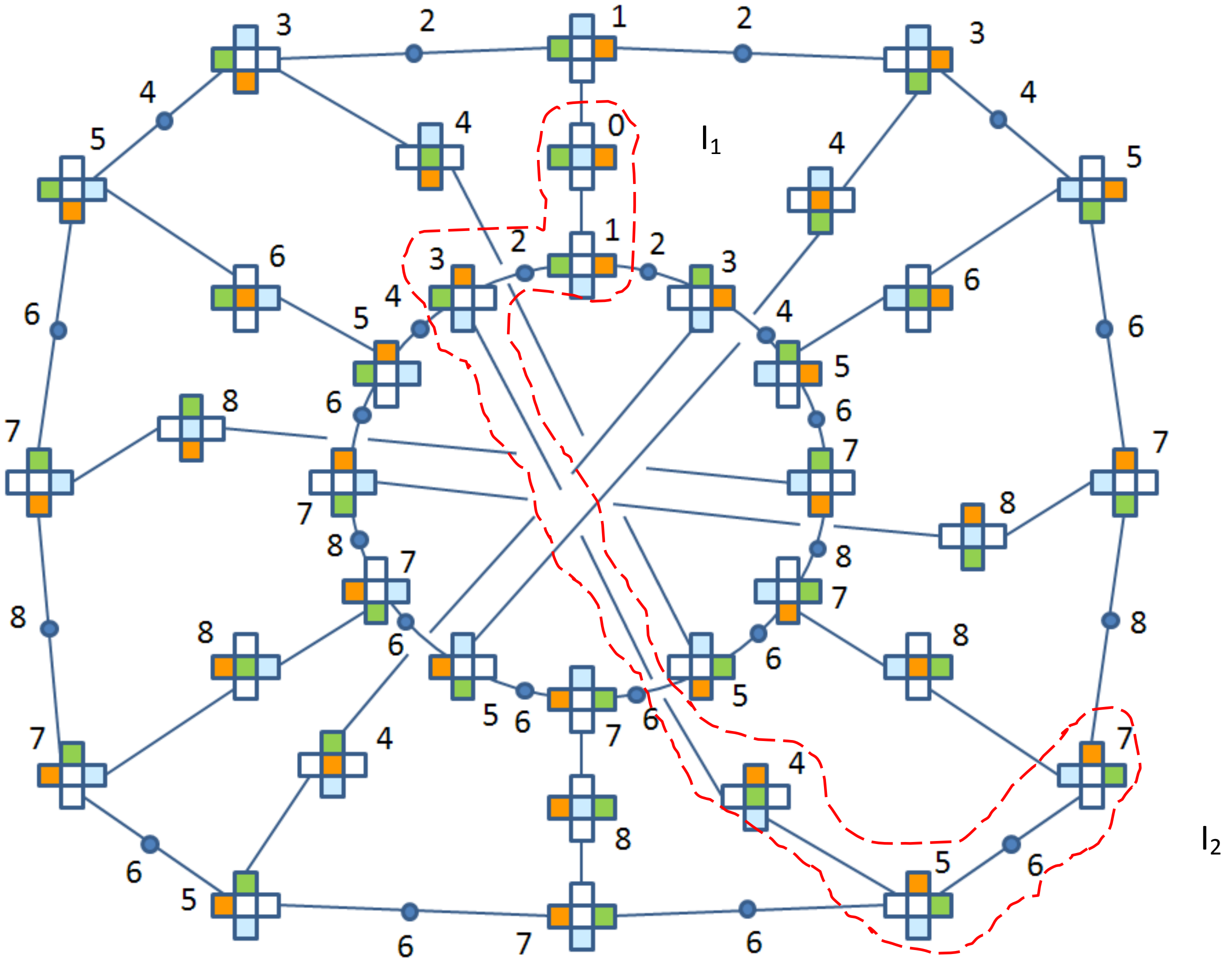
II) Si assegna n+1 a tutti nodi che sono collegati tramite un arco ad un nodo con valore assegnato n, a meno che non abbia già un numero assegnato.

Es:



E’ facile osservare che il numero associato ad un nodo P tramite l’algoritmo è la minima lunghezza dei cammini che lo collegano a quello di partenza P_0. Dunque prese due istanze I_1 e I_2 per determinare il numero minimo di mosse per passare da I_1 a I_2 è sufficiente applicare l’algoritmo al nodo iniziale corrispondente a I_1 e leggere il numero associato al nodo corrispondente a I_2. Per individuare una sequenza di minimo numero di mosse si può a partire dal nodo finale I_2 scegliere le istanze con valore via via decrescente, fino ad arrivare all’istanza iniziale con valore 0.

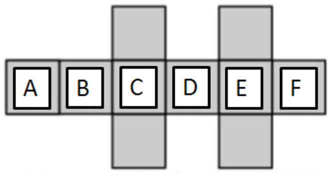
Es:



IL NUMERO MINIMO DI MOSSE PER PASSARE DA I_1 A I_2 È 7

3 La doppia croce (DC)

Torniamo ora al problema iniziale nel quale si considera il seguente gioco a tasselli mobili:

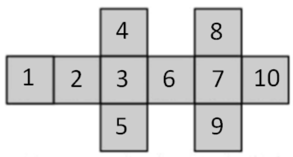


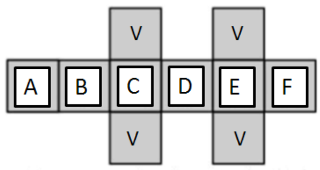
Le caratteristiche del gioco sono:

- <u>Scatola</u> : 10 caselle collegate tra loro a forma di doppia croce
- <u>Tasselli</u>: 6 (A, B, C, D, E, F)

3.1 Numero delle istanze: esplosione esponenziale.

Numerate le caselle della scatola, ogni istanza del gioco corrisponde ad una permutazione con ripetizione dei blocchetti A, B, C, D, E, F, e delle quattro caselle vuote indicate con V, V, V, V.





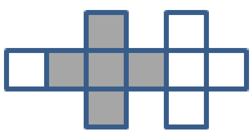
Per quanto visto in 1.5 il numero delle istanze vale:

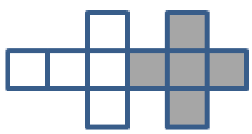
$$\frac{10!}{4!} = 151200$$

3.2 Il grafo del gioco e i suoi sottografi.

Il grafo del gioco con i suoi 151200 nodi è enorme . Tuttavia si possono fare su di esso alcune considerazioni

Partiamo da una delle due croci greche evidenziate nella figura seguente





e consideriamo un’ istanza nella quale siano presenti, nella croce evidenziata, solo 3 tasselli. Se a partire da questa istanza i tre tasselli si spostano all’interno della croce e gli altri restano fissi, il gioco della doppia croce si riduce al gioco della croce greca. Il grafo della croce doppia ha dunque come sottografi diverse copie del grafo della croce greca.

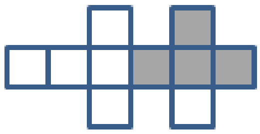
Se due istanze I_1 e I_2 hanno all'interno della stessa croce tre tasselli uguali e coincidono al di fuori della croce, indichiamo con:

$$I_1 \overset{CG}{\Rightarrow\Rightarrow \ldots \Rightarrow} I_2$$

la sequenza di mosse che fa uso del sottografo della croce greca

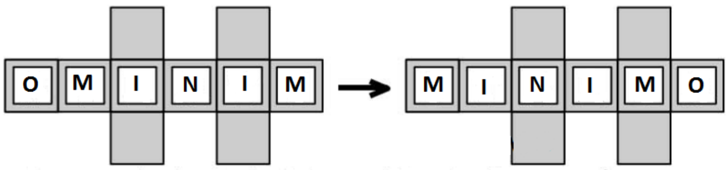
Analogo fatto vale anche per la varie T contenute nella croce doppia.

Es:



3.3 Problema iniziale.

Nel problema iniziale



i tasselli "M" e "I" sono ripetuti due volte, quindi in tale caso le istanze si riducono a:

$$\frac{10!}{2!2!4!} = 37800$$

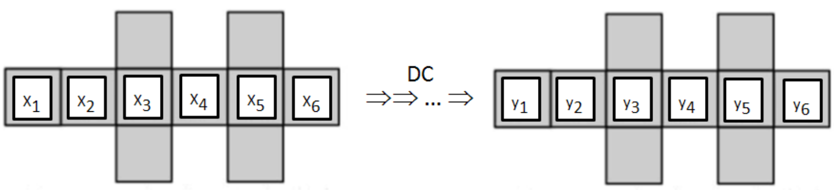
Tale numero tuttavia non ci permette una semplice analisi del grafo del gioco al fine di determinare il numero minimo di mosse, come si è fatto per le versioni più semplici (vedi 2.4, 2.9 e 2.10).

3.4 Il problema della risolubilità della "doppia croce"

Rinunciando ad un'analisi del grafo, a favore di uno studio diretto del gioco, mostreremo che:

se $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ e $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ sono due permutazioni di (A,B,C,D,E,F)

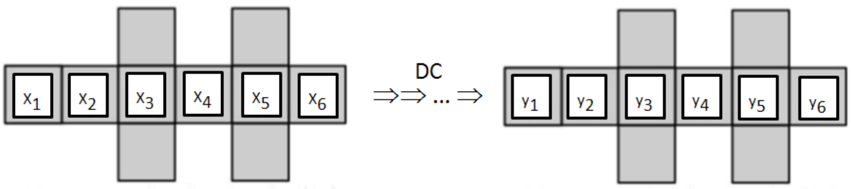
le due istanze seguenti sono collegabili:



3.5 Lemma: risolubilità delle trasposizioni

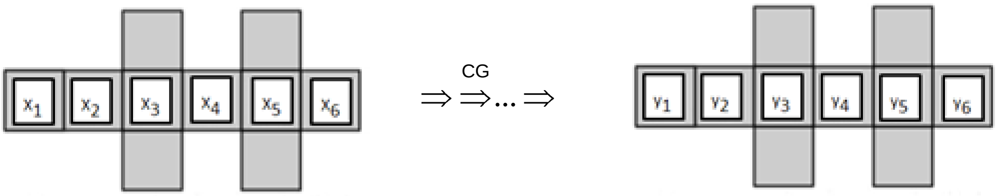
Sia $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ una 6-pla di (A,B,C,D,E,F) e $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ la 6-pla ottenuta tramite la trasposizione $x_j \leftrightarrow x_k$.

Allora esiste una sequenza di mosse tale che:



<u>Dimostrazione</u>

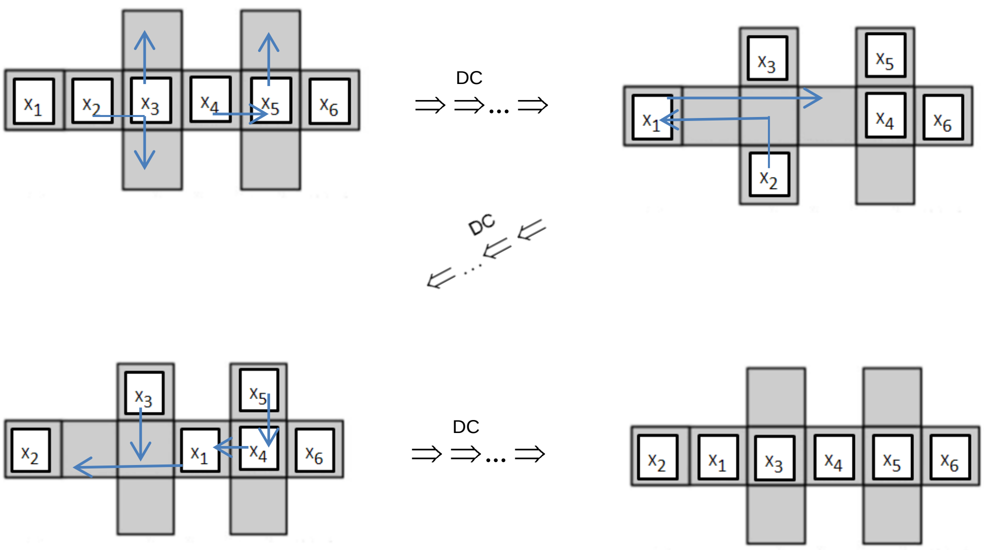
1° caso: $\{x_j, x_k\} \subseteq \{x_2, x_3, x_4\}$ (oppure $\{x_j, x_k\} \subseteq \{x_4, x_5, x_6\}$) . Si ha:



dove la sequenza di mosse utilizza il sottografo della croce greca relativa (vedi 3.2). Si ricordi che il gioco CG è totalmente risolubile.

2° caso: $x_j \in \{x_2, x_3\}$ e $x_k \in \{x_5, x_6\}$. Si applica la sequenza del caso 1 alla trasposizione $x_j \leftrightarrow x_4$ (croce di sinistra), ancora la sequenza del caso 1 alla trasposizione $x_j \leftrightarrow x_k$ (croce di destra). Si applica infine la sequenza del caso 1 alla trasposizione $x_k \leftrightarrow x_4$ (croce di sinistra).

3° caso: $x_j = x_1$ e $x_k = x_2$. Si ha:

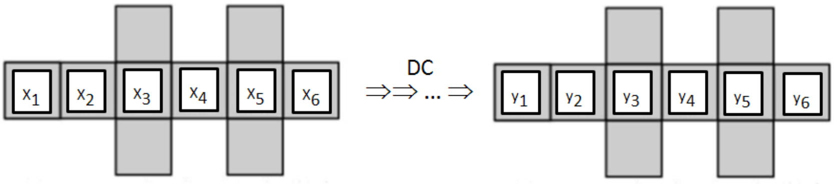


4° caso: $x_j = x_1$ e $x_k \in \{ x_3 , x_4 , x_5, x_6 \}$. Si applica la sequenza del caso 3 relativo alla trasposizione $x_1 \leftrightarrow x_2$ e poi si procede come nel caso 1 se $x_k \in \{ x_3 , x_4 \}$ oppure come nel caso 2 se $x_k \in \{ x_5, x_6 \}$

3.6 Proposizione: risolubilità delle permutazioni

Se $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ e $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ sono due permutazioni di (A,B,C,D,E,F)

le due istanze seguenti sono collegabili:

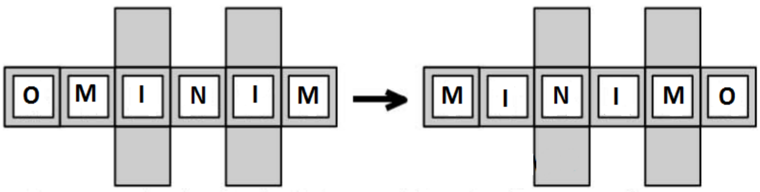


<u>Dimostrazione</u>

Per il teorema fondamentale delle permutazioni (vedi 1.5) ogni trasposizione si può ottenere componendo un numero finito di trasposizioni. Consideriamo le istanze relative a tali trasposizioni, e costruiamo grazie al lemma 3.5 le sequenze di mosse che le collegano, ottenendo così una sequenza di mosse che collega le due istanze dell’enunciato.

3.7 Osservazione

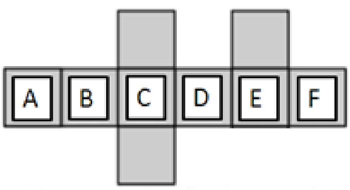
Il problema della gara



è un caso particolare della prop. 3.6. Ne segue che il problema proposto era risolubile.

4 Una variante: la doppia croce mutilata (DCM)

Studiamo ora una variante della doppia croce.



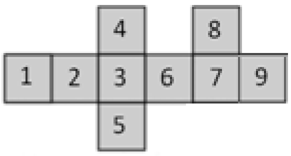
Le caratteristiche del gioco sono:

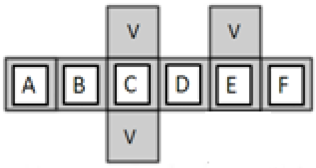
- Scatola : 9 caselle collegate tra loro a forma di doppia croce mutilata
- Tasselli: 6 (A, B, C, D, E, F)

Vedremo come l'eliminazione di una sola casella inciderà significativamente sulla risolubilità del gioco.

4.1 Numero delle istanze

Numerate le caselle della scatola, ogni istanza del gioco corrisponde ad una permutazione con ripetizione dei blocchetti A, B, C, D, E, F, e delle tre caselle vuote indicate con   V, V, V.





Per quanto visto in 1.5 il numero delle istanze vale:

$$\frac{9!}{3!} = 60480$$

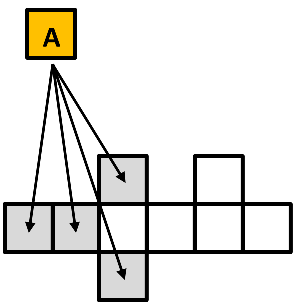
4.2 Grafo del gioco e sottografi

Anche in questo caso valgono le questioni già viste in 3.2. Osserviamo inoltre che il grafo del gioco DCM è un sottografo del grafo di DC.

4.3 Classificazione delle istanze

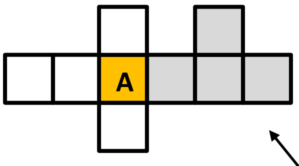
Al fine di studiare la risolubilità del gioco, utilizziamo la seguente classificazione delle istanze:

Tipo I

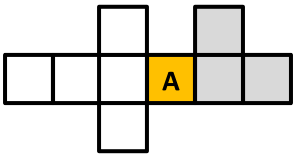


IL TASSELLO A SI TROVA IN UNA DELLE CASELLE GRIGIE

Tipo II

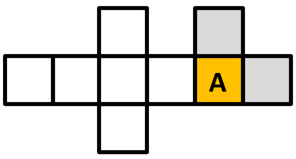


Tipo III



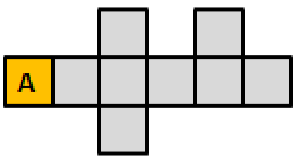
NELLA ZONA GRIGIA SONO PRESENTI ALMENO 2 TASSELLI

Tipo IV



4.4 Lemma

Le istanze con il tassello A a sinistra

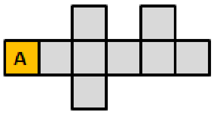


sono collegabili solo ad istanze di tipo I, II, III e IV.

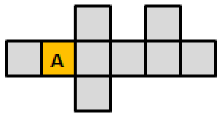
Dim (per induzione sul numero di mosse)

- Passo base: n=1

SI MUOVE IL TASSELLO A

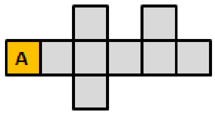


⇗



TIPO I

⇘

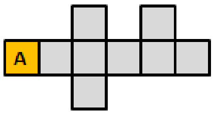


TIPO I

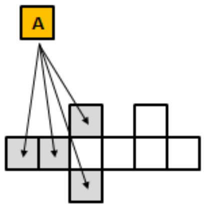
SI MUOVE UN TASSELLO
DELLA ZONA GRIGIA

- Passo induttivo: n → n+1

Caso (a) (tipo I)



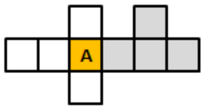
⇒⇒…⇒



DOPO N MOSSE SI OTTIENE
UN' ISTANZA DI TIPO I

IL TASSELLO A SI MUOVE
LASCIANDO UNA CASELLA
VUOTA, NELLA ZONA BIANCA
CI SONO AL MASSIMO 3
TASSELLI, E ALMENO 2
NELLA ZONA GRIGIA

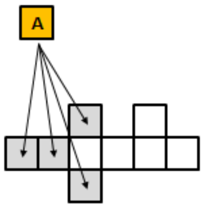
⇗



TIPO II

⇘

IL TASSELLO A SI MUOVE
ALL'INTERNO DELLA ZONA
GRIGIA OPPURE SI
MUOVONO GLI ALTRI
TASSELLI

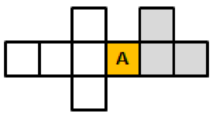


TIPO I

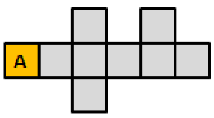
Caso (b) (tipo II)

SI MUOVE A DESTRA IL TASSELLO A,
NELLA ZONA GRIGIA RESTANO
CONFINATI ALMENO DUE TASSELLI

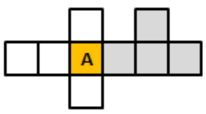
⇗



TIPO III



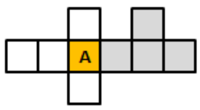
⇒⇒…⇒



DOPO N MOSSE SI OTTIENE
UN' ISTANZA DI TIPO II

SI MUOVONO GLI ALTRI TASSELLI,
NELLA ZONA GRIGIA RESTANO
CONFINATI ALMENO DUE TASSELLI

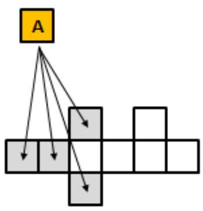
⇒



TIPO II

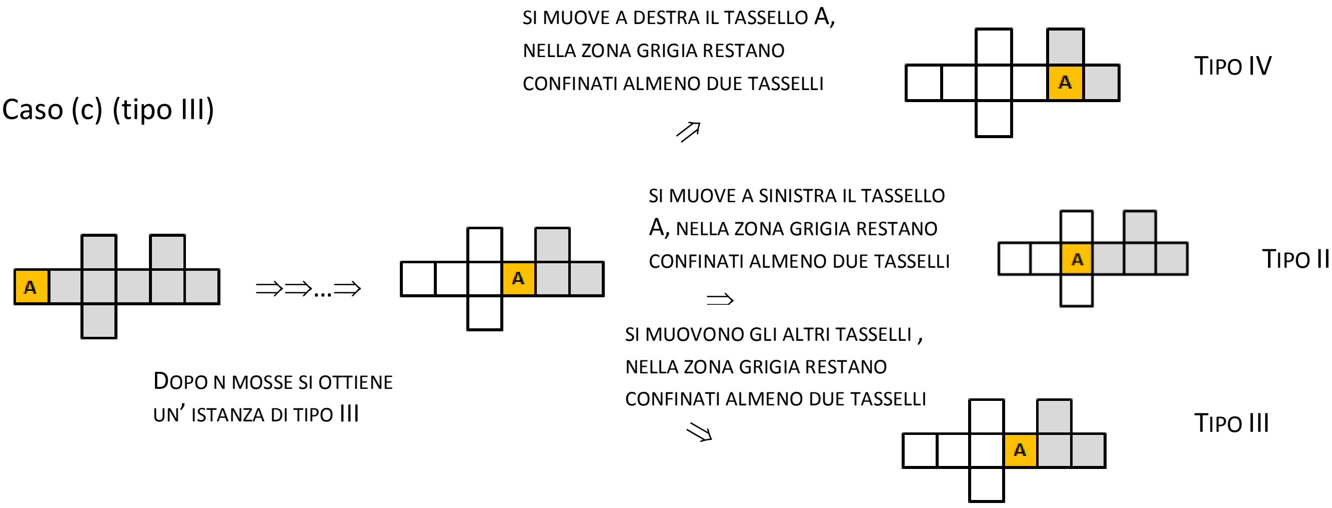
SI MUOVE IL
TASSELLO A SU, GIÙ
O A SINISTRA

⇘

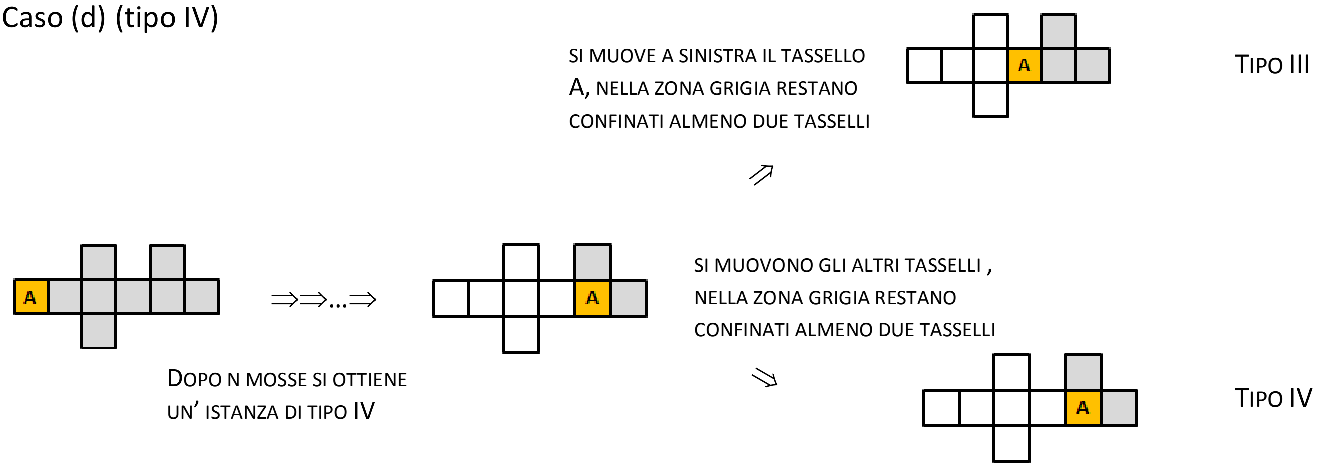


TIPO I

Caso (c) (tipo III)

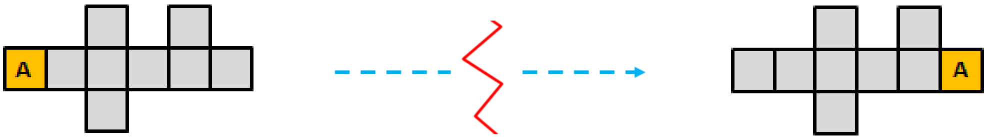


Caso (d) (tipo IV)



4.5 Proposizione

Nessuna istanza con il tassello A a sinistra può essere collegato ad una istanza con il tassello A a destra



Dim.

Per il lemma 4.4 è sufficiente notare che le istanze con il tassello A a destra non sono di tipo I, II, III o IV.

4.6 Risolubilità

Per quanto appena stabilito nella prop. 4.5 il gioco DCM non è totalmente risolubile.

5. Conclusioni

I giochi a tasselli mobili si prestano ad essere studiati con raffinati strumenti matematici, rivelando in molti casi interessanti e curiose proprietà. La formalizzazione attraverso la teoria dei grafi si è rivelata utile perché è in grado di offrire una visione globale dei giochi, ma anche la descrizione della dinamica degli stessi si e dimostrata decisiva per risolvere alcune questioni.

Tuttavia al crescere delle «dimensioni» del gioco (scatola, numero dei tasselli,…) i problemi diventano intrattabili anche in presenza di strategie risolutive.

Rimangono aperti alcuni problemi, soprattutto quelli relativi alla ottimizzazione, alla lunga i più difficili da affrontare.

Per quanto riguarda il problema della risolubilità restano oggetto di studio alcune questioni:

- risolubilità completa del gioco DC (nella prop.3.6 ci si è occupati solo delle istanze con i tasselli nella riga centrale);
- determinare altre coppie di istanze non collegabili nel gioco DCM;
- stabilire il numero delle componenti connesse del grafo del gioco DCM e una descrizione completa dell'irrisolubilità.

Nella dimostrazione dell'irrisolubilità del gioco del quindici [3] si applica uno schema dimostrativo che usa un "invariante strutturale". Potrebbe avere interesse utilizzare un analogo schema per ottenere una dimostrazione alternativa al problema dell'irrisolubilità del gioco DCM.

Chiudiamo infine con la risposta al quesito con il quale si è aperto il lavoro: il numero minimo di mosse è 26.

6. Bibliografia e sitografia

[1] Oystein Ore, *I grafi e le loro applicazioni*, Zanichelli

[2] Peter Gritzmann , René Brandenberg, *Alla ricerca della via più breve*, Springer

[3] Delucchi, Gaiffi, Pernazza, *Giochi e percorsi matematici*, Springer

[4] http://www.mathesistorino.it/wordpress/wp-content/uploads/2012/10/q01.pdf

[5] http://www.mat.unimi.it/users/turrini/present_mate_d_grafi.pdf

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/15_puzzle

[7] http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/probegio/GAMEMATH/Blocchetti/Blocchetti.htm