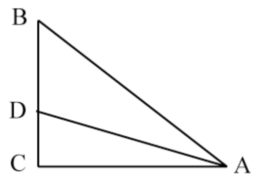
Alcune idee matematiche antiche

seminario tenuto da Walter Febo
7 Maggio 2010

Problema di Aristarco:
Stimare con una certa precisione la corda sottesa da un angolo piccolo.

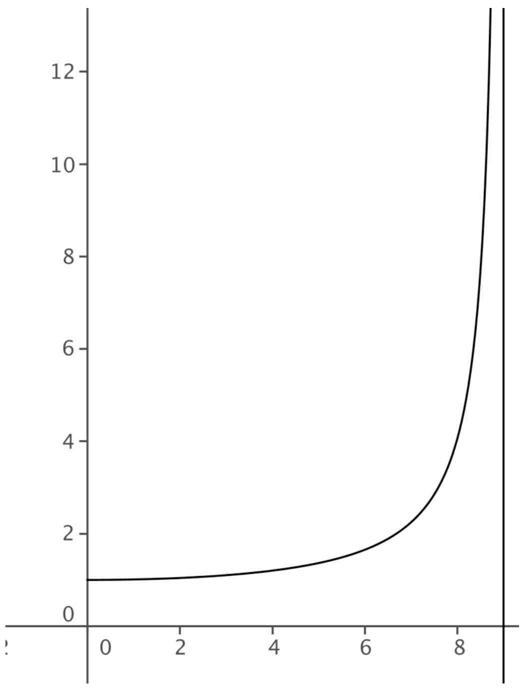
Aristarco utilizza una proposizione piuttosto diffusa nell'antichità: essa si trova nell'Ottica di Euclide (teorema 8) in Archimede (Arenario) e nella Sferica di Teodosio. Essa afferma che in un triangolo rettangolo

$$\frac{C\widehat{A}B}{C\widehat{A}D} < \frac{CB}{CD}$$



il rapporto tra gli angoli CAB e CAD è più piccolo del rapporto tra CB e CD.
Nel linguaggio attuale la proposizione equivale a dire che

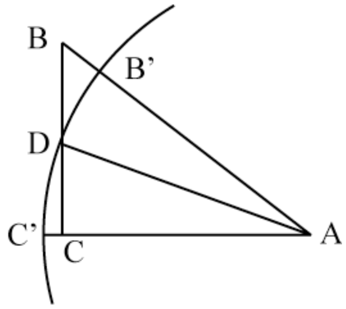
se $\beta < \alpha < \pi/2$ allora $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta)}$



Un modo equivalente per dire la stessa cosa è dire che la funzione tan(x)/x è crescente per $0<x<\pi/2$.
Il grafico della funzione, disegnato con geogebra, è accanto: in ascissa abbiamo l'angolo in gradi di 10 in 10.

Calcolando la derivata della funzione tan(x)/x si vede che questa è positiva nell'intervallo considerato e quindi la funzione è crescente. La positività della derivata deriva dalla disuguaglianza, geometricamente evidente, che 2x > sen(2x).

Nell'Ottica di Euclide è riportata una dimostrazione completa di questa proposizione (che non usa le derivate!) che ora brevemente richiamiamo. Consideriamo una circonferenza di centro A e raggio AD e siano B' e C' i punti in cui tale circonferenza incontra le retta AB e AC



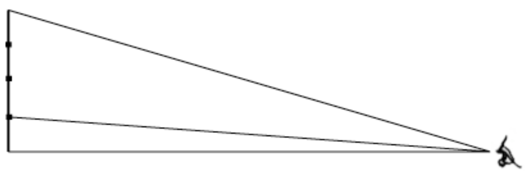
Il rapporto tra gli angoli coincide col rapporto tra le aree dei settori circolari B'AC' e DAC' quindi BAC:DAC=Sett(B'AC'):Sett(DAC')

- L'area del settore B'AD è minore dell'area del triangolo BAD cioè
  Sett(B'AD) < Area(BAD)
- L'area del settore DAC' è maggiore dell'area del triangolo DAC cioè
  Sett(DAC') > Area(DAC)

Sett(B'AD):Sett(DAC') < Sett(B'AD):Area(DAC)
Sett(B'AD):Area(DAC) < Area(BAD):Area(DAC)

- a maggior ragione
  Sett(B'AD):Sett(DAC') < Area(BAD):Area(DAC)=BD:DC
- e quindi componendo si ha la tesi.

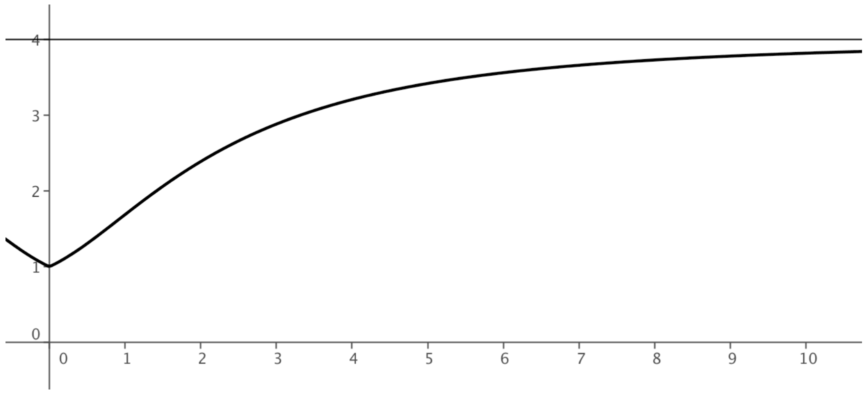
Questa proposizione ha una interessante interpretazione nella geometria della visione: la grandezza apparente di un segmento è data dall'ampiezza dell'angolo che lo traguarda. Se l'occhio è posto il A e BC e BD sono i due segmenti visti (BC>BD), il rapporto tra gli angoli visivi è più piccolo del rapporto tra i segmenti reali, la visione, dunque, diminuisce i rapporti (maggiori di 1). Possiamo quindi dire che il rapporto tra l'essere di due segmenti (il primo maggiore del secondo) appare più piccolo di quello che realmente è.



Se ad esempio una torre è alta 4 volte il suo portone, l'occhio valuterà questo rapporto più piccolo. Infatti, se d è la distanza dell'occhio dalla torre, possiamo esplicitare in funzione della distanza il rapporto tra i due angoli visivi : $4= d\tan(\alpha)$, $1=d\tan(\beta)$ da cui

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\operatorname{ar}\tan(\frac{4}{d})}{\operatorname{ar}\tan(\frac{1}{d})}$$

Il limite di questo rapporto quando *d* tende a più infinito è 4 e quindi, secondo la geometria della visione più ci allontaniamo dalla torre e più la torre e la porta ci appariranno nelle reali proporzioni. Possiamo disegnare il grafico della funzione precedente con geogebra per vedere esattamente come la distanza modifichi il rapporto tra i due angoli



$$y = \frac{\arctan(\frac{4}{x})}{\arctan(\frac{1}{x})}$$

Una analoga disuguaglianza vale per la funzione sen(x)/x. Questa funzione è decrescente da 0 a $\pi/2$. La cosa è facile vedere con le derivate e disegnando il suo grafico. Può essere interessante cercare una dimostrazione sintetica come nel caso delle tangenti[1].

La disuguaglianza fondamentale, ben nota anticamente, e usata da Aristarco per le sue stime, è la seguente

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\beta)} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta)} \qquad \text{se} \quad 0 < \alpha < \beta < \pi$$

Alcune applicazioni di questa disuguaglianza seguendo le idee di Aristarco.

Se ε *è un angolo più piccolo di* $\pi/6$ *allora*:

$$\frac{3\varepsilon}{\pi} < \tan(\varepsilon) < \frac{4}{\pi}$$

Queste disuguaglianze si trovano usando la disuguaglianza fondamentale:

- se $\varepsilon < \pi/4$ allora $\tan(\varepsilon)/\varepsilon < \tan(\pi/4)/\pi/4$ cioè $\tan(\varepsilon) < 4\varepsilon/\pi$.
- se $\varepsilon < \pi/6$ allora $\text{sen}(\varepsilon)/\varepsilon > \text{sen}(\pi/6)/\pi/6$ cioè $\tan(\varepsilon) > \text{sen}(\varepsilon) > 3\varepsilon/\pi$.

In particolare se $\varepsilon = \pi/n$ con $n>6$ allora

$$\frac{3}{n} < \tan(\frac{\pi}{n}) < \frac{4}{n} \qquad \text{o anche} \qquad \left|\tan(\frac{\pi}{n}) - \frac{3}{n}\right| < \frac{1}{n}$$

Se ε è un angolo di un grado cioè $\varepsilon = \pi/180$ allora

$$\frac{1}{60} < \tan(1°) < \frac{1}{45}$$

che è la stima di Aristarco. Anche il seno si può limitare osservando che $\text{sen}(\varepsilon) < \tan(\varepsilon) < 4\varepsilon/\pi = 1/45$.

---

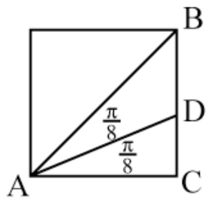
[1] Vedi Tolomeo, Almagest , Libro I, proposizione 10
Se sono date due corde diverse in una circonferenza allora il rapporto che la corda più grande ha con la più piccola è minore del rapporto tra l'arco di circonfeenza sotteso dalla più grande con l'arco di circonferenza sotteso dalla più piccola.

La disuguaglianza precedente può essere ulteriormente migliorata per angoli ancora più piccoli. Ecco il metodo di Aristarco.

Se μ *è un angolo più piccolo di* π/8 *allora*:

$$\frac{3\mu}{\pi} < sen(\mu) < \frac{8\mu}{\pi(\sqrt{2}+1)}$$

- Se $\mu < \pi/8$ allora $\tan(\mu)/\mu < \tan(\pi/8)/\pi/8$ e quindi
- $sen(\mu) < \tan(\mu) < 8\mu \tan(\pi/8) / \pi$
- La tangente di π/8 si può calcolare facilmente osservando che



- se AD è la bisettrice dell'angolo BAC allora AB:AC = BD:DC[2] e da questo si ricava che

$$\tan(\frac{\pi}{8}) = DC:CA = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

- $\mu < \pi/6$ quindi $sen(\mu)/\mu > sen(\pi/6)/\pi/6$ e quindi

$$sen(\mu) > 6\mu\, sen(\pi/6)/\pi = 3\mu/\pi.$$

Approssimando per difetto la radice di 2 con 7/5 abbiamo, se $0 < \mu < \pi/8$, la significativa disuguaglianza

$$\frac{3\mu}{\pi} < sen(\mu) < \frac{10\mu}{3\pi}$$

In particolare per $\mu=\pi/n$, n>8 abbiamo

$$\frac{3}{n} < sen(\frac{\pi}{n}) < \frac{10}{3n} \quad \text{o anche} \quad \left|sen(\frac{\pi}{n}) - \frac{3}{n}\right| < \frac{1}{3n}$$

Se n=180 l'angolo misura 1 grado e la stima precedente ci dice

$$54 < \frac{1}{sen(1°)} < 60$$

Il valore esatto è molto vicino alla media 57 tra i due valori. In particolare se stimiamo con 1/60 il seno di un grado facciamo un errore più piccolo di (1/3n) =1/540 = 0,0018.

---

[2] Si usa il teorema della bisettrice: in un triangolo la bisettrice di un angolo divide il lato opposto nello stesso rapporto nel quale si trovano i due lati che comprendono l'angolo bisecato.