

Geometria e teoria dei numeri.

Esplorazioni intorno al teorema di Pick

*Alessia Vastola
Davide Canepa
Eleonora Guerra
Federico Corallo
Fiamma Flavia Paolucci
Giovanni Maria Pasquarelli
Luca Argirò
Gabriella Caputi
Luigi Marchese
Raffaella Iuliano
Caterina Carradori
Virginia Giulianelli
Sara Matricardi*

*Elisabetta Avizzano
Nicoletta Capotorto
Chiara Cerocchi
Giorgio Ciccarella
Arianna De Blasis
Emanuele Di Caro
Serena Nunziata
Amanda Piselli
Simone Castellan
Federico Morodei
Martino Wong
Alessandro Casini
Ivan Colavita*

Abstract

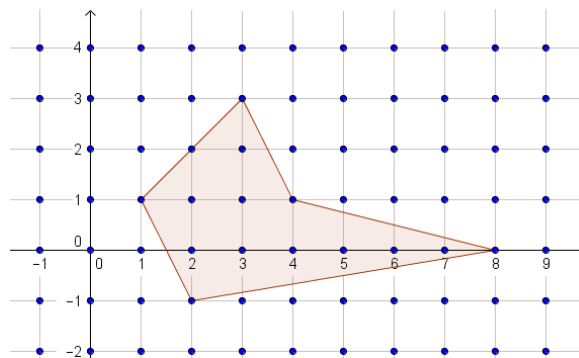
Come è noto, grazie alla formula di Pick , è possibile calcolare l'area di un poligono \mathcal{P} con vertici a coordinate intere "contando" i punti a coordinate intere interni a \mathcal{P} e quelli sulla sua frontiera. A partire da questo risultato vengono condotte varie esplorazioni che hanno in comune l'uso dell'aritmetica nello studio delle geometria.

Parole chiave: *geometria, teoria dei numeri, reticolo, teorema di Pick*

1. Introduzione

Chiameremo *reticolo* (e indicheremo con \mathbb{Z}^2) l'insieme dei punti del piano cartesiano a coordinate intere (analogamente \mathbb{Z}^3 indicherà l'insieme dei punti dello spazio a coordinate intere)

Diremo inoltre *punto reticolare*, ogni punto del reticolo, e *poligono reticolare (poliedro reticolare)* ogni poligono (poliedro) con i vertici reticolari.



Nel suo lavoro del 1899 *Geometriches zur Zahlenlehre* (La geometria per la teoria dei numeri) il matematico austriaco Georg Alexander Pick (1859, 1942) nel “.. tentativo di porre le basi della teoria dei numeri in modo nuovo e, fin dal principio, su basi geometriche...” dimostra un elegante e sorprendente teorema [1] [2].

Teorema di Pick

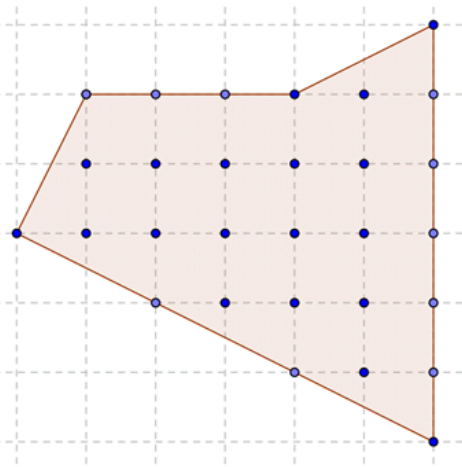
Dato un poligono \mathcal{P} reticolare, indicati con:

- **I**: il numero di punti reticolari interni al poligono \mathcal{P}
- **F**: il numero di punti reticolari appartenenti alla frontiera di \mathcal{P}

l'area di \mathcal{P} vale:

$$\text{Area}(\mathcal{P}) = I + \frac{F}{2} - 1$$

Esempio:



$$I = 15 \quad F = 14$$

$$\text{Area}(\mathcal{P}) = 15 + \frac{14}{2} - 1 = 21$$

Per una semplice dimostrazione del teorema si può ad esempio consultare [3]

A partire dal risultato di Pick abbiamo dato avvio ad una serie di esplorazioni che hanno alla base l'uso dell'aritmetica nella geometria.

In particolare dato un poligono reticolare \mathcal{P}

- abbiamo determinato, nota l'area e le coordinate dei vertici, il numero dei punti reticolari interni; successivamente, grazie alla formula dell'area di Gauss [5], abbiamo individuato un'espressione che fornisce il numero di punti reticolari interni a partire dalle sole coordinate dei vertici;
- abbiamo trovato una formulazione del teorema di Pick che utilizza i punti centrali dei quadrati elementari del reticolo.

Si è poi affrontato il problema di una formulazione del teorema di Pick nello spazio.

Come è noto la risposta è negativa (Reeve 1957): non può esistere una formula che tramite il conteggio dei punti reticolari, sia in grado di calcolare il volume di un poliedro reticolare [4].

La nostra ricerca si è quindi mossa verso una formula che contemplasse, oltre a quelli a coordinate intere, anche altri punti particolari a coordinate non intere. Come proveremo, fornendo opportune controesempi, anche in questi casi la risposta è negativa.

Chiude questo lavoro lo studio dei punti reticolari di una circonferenza con le coordinate del centro e il raggio interi. L'obiettivo era in questo caso, grazie al teorema di Pick e ad un risultato di Gauss (problema del cerchio di Gauss), di studiare due insiemi di particolari poligoni reticolari, in grado di approssimare, con le loro aree, quella del cerchio, fornendo così una stima di π .

2. Calcolo dei punti reticolari interni

La formula di Pick ci permette di trovare il numero dei punti reticolari interni di un poligono reticolare \mathcal{P} . Considerando già nota l'area del poligono e il numero di punti reticolari sulla sua frontiera, si ha infatti:

$$I = \text{Area}(\mathcal{P}) - \frac{F}{2} + 1$$

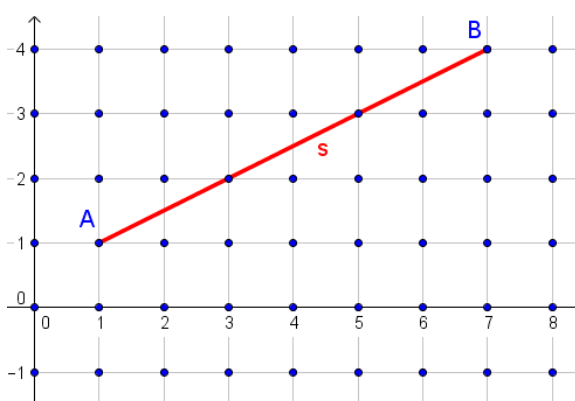
Considerando acquisite le formule dell'area della geometria elementare, ci concentreremo sul calcolo del numero di punti reticolari della frontiera di \mathcal{P} .

Iniziamo col determinare il numero dei punti reticolari interni di un segmento reticolare

2.1 Punti reticolari interni di un segmento reticolare

Dato un segmento AB con $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dove $x_A, y_A, x_B, y_B \in \mathbf{Z}$ chiamiamo *proiezioni di s* e indichiamo con S_x e S_y le due quantità:

$$s_x = |x_B - x_A| \quad s_y = |y_B - y_A|$$



Nell'esempio: $s_x = 6$ $s_y = 3$

2.1.1 Proposizione

Indicato con $I(s)$ il numero di punti interni del segmento reticolare AB si ha:

$$I(s) = \text{MCD}(s_x, s_y) - 1.$$

Dimostrazione

Considerate le equazioni parametriche del segmento:

$$\begin{cases} x(t) = x_A + (x_B - x_A)t \\ y(t) = y_A + (y_B - y_A)t \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

per dimostrare l'enunciato è sufficiente mostrare che

$$P \text{ è un punto reticolare interno di AB} \quad \underline{\text{se e soltanto se}} \quad \begin{cases} P(x(t), y(t)) \text{ dove } t = \frac{k}{\text{MCD}(s_x, s_y)} \\ \text{con } k = 1, 2, 3, \dots, \text{MCD}(s_x, s_y) - 1 \end{cases}$$

Per ipotesi sia P un punto reticolare interno di AB.

Sarà quindi determinato da un certo $t \in (0, 1)$ razionale (se t fosse irrazionale anche x_p e y_p sarebbero irrazionali), rappresentabile con una frazione ridotta ai minimi termini $\frac{p}{q}$ con $0 < p < q$

Inoltre i prodotti:

$$(x_B - x_A) \frac{p}{q} \quad (y_B - y_A) \frac{p}{q}$$

dovranno essere interi, quindi (essendo q e p primi tra loro):

$$q \mid s_x \quad \text{e} \quad q \mid s_y \quad \Rightarrow \quad q \mid \text{MCD}(s_x, s_y)$$

dunque $\text{MCD}(s_x, s_y) = qr$ per qualche r naturale.

Quindi:

$$t = \frac{p}{q} = \frac{pr}{qr} = \frac{k}{\text{MCD}(s_x, s_y)} \quad \text{per qualche } k = 1, 2, 3, \dots, \text{MCD}(s_x, s_y) - 1$$

Viceversa, se $P(x(t), y(t))$ è un punto che si ottiene dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = x_A + (x_B - x_A)t \\ y(t) = y_A + (y_B - y_A)t \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

dando a t i valori $t = \frac{k}{\text{MCD}(s_x, s_y)}$ con $k = 1, 2, 3, \dots, \text{MCD}(s_x, s_y) - 1$ si vede subito che si tratta di un punto del segmento (diverso da A e da B) a coordinate intere.

2.2 Punti reticolari interni della frontiera di \mathcal{P}

Dalla prop 2.1.1 appena dimostrata, si ottiene come corollario la formula per i punti interni della frontiera di un poligono reticolare \mathcal{P}

2.2.1 Proposizione

Il numero $F(\mathcal{P})$ di punti reticolari della frontiera di un poligono reticolare \mathcal{P} di lati $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ è uguale alla sommatoria:

$$F(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n \text{MCD}(l_{k,x}, l_{k,y})$$

Dimostrazione

Per ottenere i punti reticolari della frontiera occorre aggiungere ai punti interni ai lati, anche i vertici di \mathcal{P}

$$F(\mathcal{P}) = n + \sum_{k=1}^n I(l_k)$$

e per la prop. 2.1.1

$$F(\mathcal{P}) = n + \sum_{k=1}^n I(l_k) = n + \sum_{k=1}^n (\text{MCD}(l_{k,x}, l_{k,y}) - 1) = n + \left(\sum_{k=1}^n \text{MCD}(l_{k,x}, l_{k,y}) \right) - n = \sum_{k=1}^n \text{MCD}(l_{k,x}, l_{k,y})$$

2.3 Punti reticolari interni di \mathcal{P}

Siamo ora in grado di calcolare il numero dei punti reticolari interni di un poligono reticolare \mathcal{P}

2.3.1 Proposizione

Indicato con $I(\mathcal{P})$ il numero di punti reticolari interni di un poligono reticolare \mathcal{P} si ha:

$$I(\mathcal{P}) = \text{Area}(\mathcal{P}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{MCD}(\ell_{k,x}, \ell_{k,y}) + 1$$

Dimostrazione

Segue immediatamente dal teorema di Pick e dalla prop. 2.2.1.

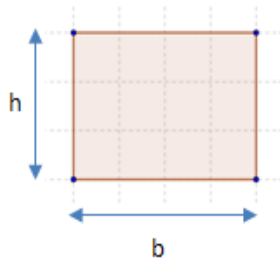
2.4 Applicazioni

Applichiamo ora la formula dei punti reticolari interni

$$I(\mathcal{P}) = \text{Area}(\mathcal{P}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{MCD}(\ell_{k,x}, \ell_{k,y}) + 1$$

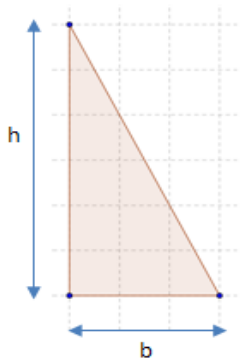
a vari poligoni reticolari, utilizzando per le aree le formule della geometria elementare.

2.4.1 Rettangolo standard (lati paralleli agli assi cartesiani)



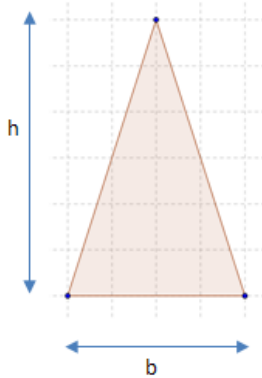
$$I(\mathcal{P}) = bh - \frac{1}{2}(b+h+b+h) + 1 = bh - b - h + 1 = (b-1)(h-1)$$

2.4.2 Triangolo rettangolo standard (cateti paralleli agli assi cartesiani)



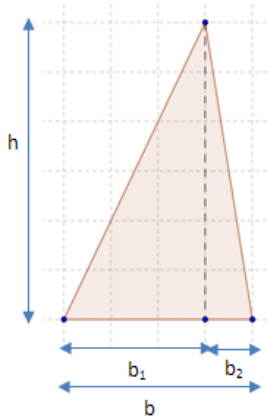
$$\begin{aligned} I(\mathcal{P}) &= \frac{1}{2}bh - \frac{1}{2}(b+h+\text{MCD}(b,h)) + 1 = \\ &= \frac{1}{2}(bh - b - h - \text{MCD}(b,h)) + 1 \end{aligned}$$

2.4.3 Triangolo isoscele standard (base parallela agli assi cartesiani)



$$I(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}bh - \frac{1}{2}\left(b + 2\text{MCD}\left(\frac{b}{2}, h\right)\right) + 1 = \frac{1}{2}\left(bh - b - 2\text{MCD}\left(\frac{b}{2}, h\right)\right) + 1$$

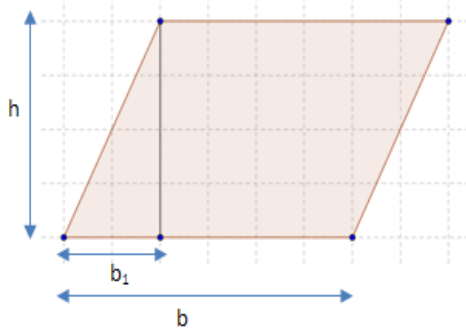
2.4.4 Triangolo scaleno standard (base parallela agli assi cartesiani)



$$I(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}bh - \frac{1}{2}(b + \text{MCD}(b_1, h) + \text{MCD}(b_2, h)) + 1 =$$

$$= \frac{1}{2}(bh - b - \text{MCD}(b_1, h) - \text{MCD}(b_2, h)) + 1$$

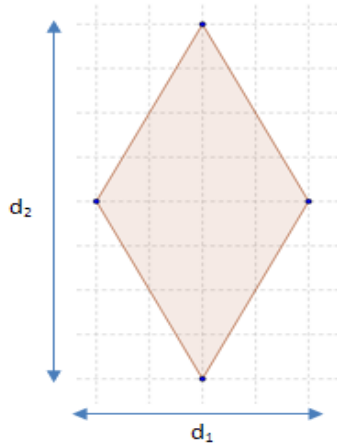
2.4.5 Parallelogramma standard (basi parallele agli assi cartesiani)



$$I(\mathcal{P}) = bh - \frac{1}{2}(2b + 2\text{MCD}(b_1, h)) + 1 =$$

$$= bh - b - \text{MCD}(b_1, h) + 1$$

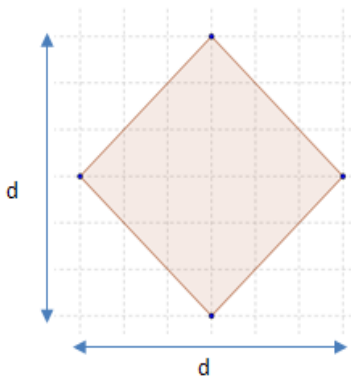
2.4.6 Rombo standard (diagonali parallele agli assi cartesiani)



$$I(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}d_1d_2 - \frac{1}{2}\left(4\text{MCD}\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)\right) + 1 =$$

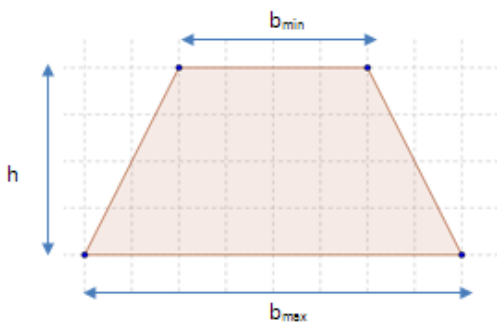
$$= \frac{1}{2}d_1d_2 - \text{MCD}(d_1, d_2) + 1$$

2.4.7 Quadrato a diagonali standard (diagonali parallele agli assi cartesiani)



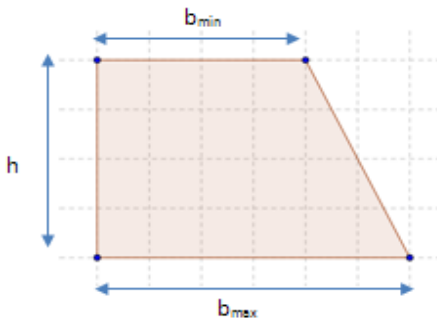
$$I(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}d^2 - \frac{1}{2}\left(4\text{MCD}\left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right)\right) + 1 = \frac{1}{2}d^2 - d + 1$$

2.4.8 Trapezio isoscele standard (basi parallele agli assi cartesiani)



$$I(\mathcal{P}) = \frac{(b_{\max} + b_{\min})h}{2} - \frac{1}{2}\left(b_{\max} + b_{\min} + 2\text{MCD}\left(\frac{b_{\max} - b_{\min}}{2}, h\right)\right) + 1$$

2.4.9 Trapezio rettangolo standard (basi parallele agli assi cartesiani)



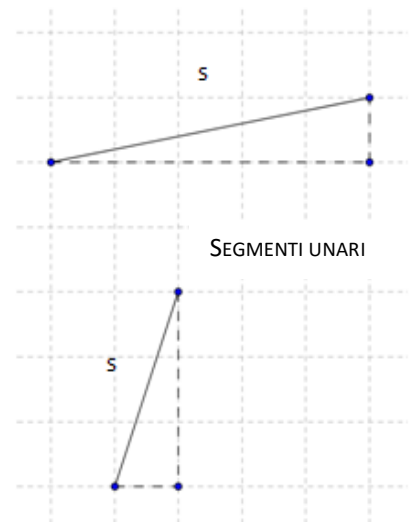
$$I(\mathcal{P}) = \frac{(b_{\max} + b_{\min})h}{2} - \frac{1}{2}(b_{\max} + b_{\min} + h + \text{MCD}(b_{\max} - b_{\min}, h)) + 1$$

2.5 Poligoni unari e binari

Introduciamo ora alcuni particolari poligoni reticolari per i quali la formula dei punti interni assume una forma molto semplice.

2.5.1 Definizioni

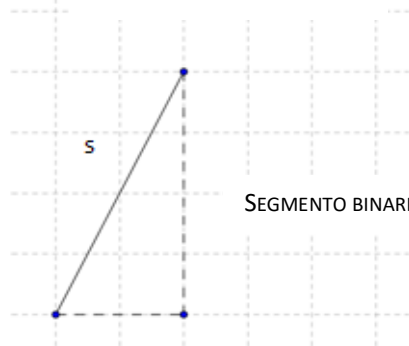
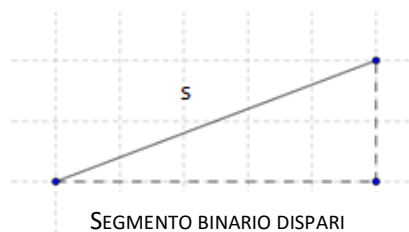
- Si definisce segmento *unario*, un segmento reticolare s tale che $s_x = 1$ oppure $s_y = 1$



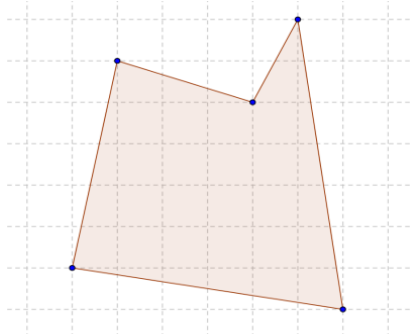
- Si definisce segmento *binario*, un segmento reticolare s tale che $s_x = 2$ oppure $s_y = 2$

Un segmento binario si dice

- *dispari* se s_x oppure s_y è dispari.
- *pari* se s_x oppure s_y è pari.



- Si definisce poligono *unario*, un poligono reticolare che ha tutti i lati unari

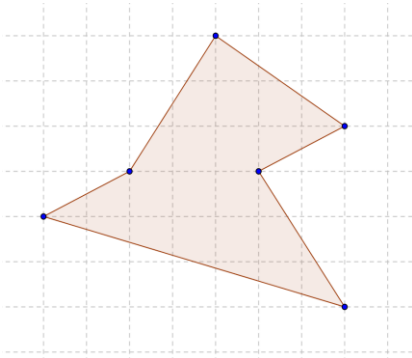


POLIGONO UNARIO

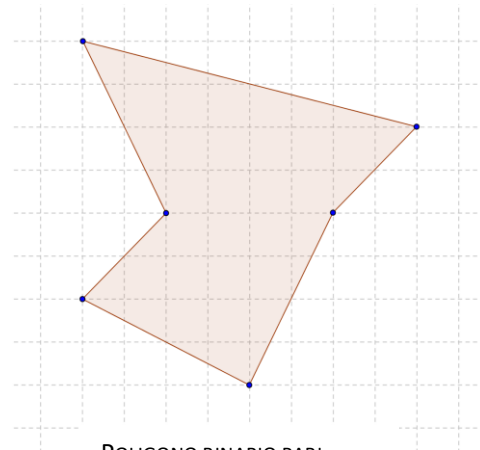
- Si definisce poligono *binario*, un poligono che ha tutti i lati binari

Un poligono binario si dice

- *dispari* se ha tutti i lati binari dispari
- *pari* se ha tutti i lati binari pari



POLIGONO BINARIO DISPARI



POLIGONO BINARIO PARI

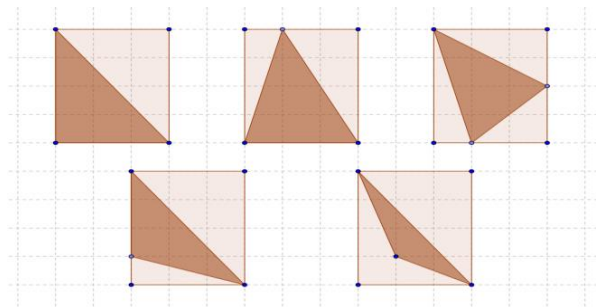
Le proprietà che definiscono i poligoni unari e binari non sono sufficienti per garantirne l'esistenza, come si mostra ad esempio nella seguente proposizione.

2.5.2 Proposizione

Non esistono triangoli binari dispari

Dimostrazione

Da un'analisi di tutte le configurazioni di triangoli reticolari (a meno di simmetrie e ribaltamenti) qui sotto riportate



si vede che ogni triangolo reticolare di lati l_1, l_2, l_3 risulta inscritto in un rettangolo standard \mathcal{R} (*rettangolo di ingombro*) il cui perimetro è pari alla somma delle proiezioni di ciascun lato del triangolo:

$$\sum_{k=1}^3 l_{k,x} + \sum_{k=1}^3 l_{k,y} = \text{Perimetro}(\mathcal{R})$$

Si giunge quindi alla conclusione che non esistono triangoli binari dispari, poiché in quel caso la somma delle proiezioni dei lati l_1, l_2, l_3 sarebbe un numero dispari, mentre il perimetro di \mathcal{R} è sempre un numero pari.

Vediamo ora le formule dei punti reticolari interni per i poligoni unari e binari

2.5.3 Proposizione

In un poligono unario o binario dispari \mathcal{P} il numero dei punti reticolari interni vale:

$$I(\mathcal{P}) = \text{Area}(\mathcal{P}) - \frac{n}{2} + 1$$

Dimostrazione

Essendo per ogni k

$$\text{MCD}(l_{k,x}, l_{k,y}) = \text{MCD}(1, p) = 1 \quad (p \text{ naturale})(\text{poligono unario})$$

oppure

$$\text{MCD}(l_{k,x}, l_{k,y}) = \text{MCD}(2, p) = 1 \quad (p \text{ naturale dispari})(\text{poligono binario dispari})$$

si ha:

$$I(\mathcal{P}) = \text{Area}(\mathcal{P}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{MCD}(\ell_{k,x}, \ell_{k,y}) + 1 = \text{Area}(\mathcal{P}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 1 + 1 = \text{Area}(\mathcal{P}) - \frac{n}{2} + 1$$

2.5.4 Proposizione

In un poligono binario pari \mathcal{P} il numero dei punti reticolari interni vale:

$$I(\mathcal{P}) = \text{Area}(\mathcal{P}) - n + 1$$

Dimostrazione

Essendo per ogni k

$$\text{MCD}(\ell_{k,x}, \ell_{k,y}) = \text{MCD}(2, p) = 2 \quad (p \text{ naturale pari}) \text{ (poligono binario pari)}$$

si ha:

$$I(\mathcal{P}) = \text{Area}(\mathcal{P}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{MCD}(\ell_{k,x}, \ell_{k,y}) + 1 = \text{Area}(\mathcal{P}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 2 + 1 = \text{Area}(\mathcal{P}) - \frac{2n}{2} + 1 = \text{Area}(\mathcal{P}) - n + 1$$

2.6 Formula dei punti reticolari interni note le coordinate dei vertici di \mathcal{P}

In questo paragrafo si determinerà una formula per calcolare il numero dei punti reticolari interni ad un poligono reticolare \mathcal{P} che utilizzerà esclusivamente le coordinate dei vertici del poligono. Nella formula

$$I(\mathcal{P}) = \text{Area}(\mathcal{P}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{MCD}(\ell_{k,x}, \ell_{k,y}) + 1$$

la sommatoria $\sum_{k=1}^n \text{MCD}(\ell_{k,x}, \ell_{k,y})$ può essere già espressa in funzione delle coordinate dei vertici del poligono reticolare \mathcal{P} tramite le relazioni:

$$\ell_{k,x} = |x_{k+1} - x_k| \quad \ell_{k,y} = |y_{k+1} - y_k|$$

dove $P_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$ e $P_k(x_k, y_k)$ sono gli estremi del lato ℓ_k con $k=1,2,3,\dots,n$

(occorre porre $P_{n+1} \equiv P_1$ e quindi $x_{n+1}=x_1, y_{n+1}=y_1$)

Ora grazie alla formula di Gauss nota come *shoelace formula (formula dei lacci di scarpe)* [5] vedremo come sarà possibile esprimere in funzione delle coordinate dei vertici di \mathcal{P} anche la sua area.

2.6.1 Formula dell'area di Gauss ("shoelace formula")

Preso un poligono \mathcal{P} (anche non reticolare) di vertici $P_1(x_1; y_2)$, $P_2(x_1; y_2)$, ..., $P_n(x_n; y_n)$, si ha:

$$\text{Area}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) \right| \quad \text{con } x_{n+1} = x_1 \quad \text{e} \quad y_{n+1} = y_1$$

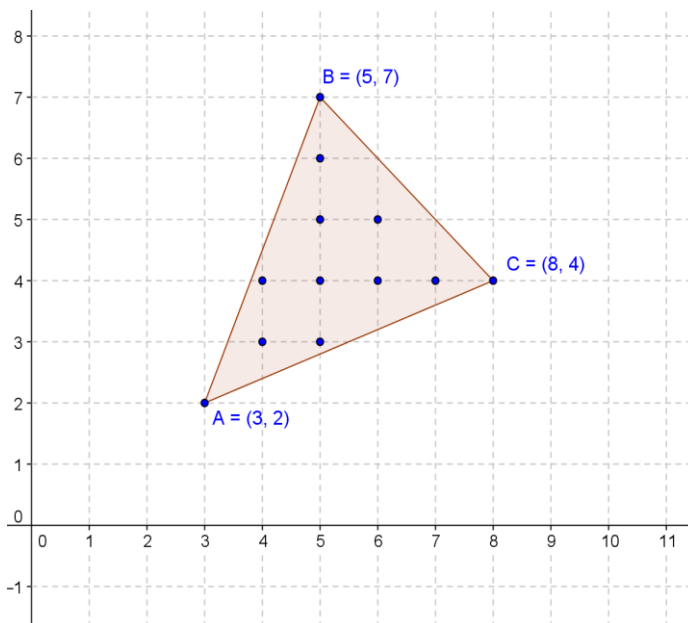
Possiamo dunque scrivere la formula completa.

2.6.2 Proposizione

Preso un poligono \mathcal{P} di vertici $P_1(x_1; y_2)$, $P_2(x_1; y_2)$, ..., $P_n(x_n; y_n)$, si ha:

$$I(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) \right| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{MCD}(|x_{k+1} - x_k|, |y_{k+1} - y_k|) + 1$$

Eccone un'applicazione:



$$\begin{array}{r} 3 \times 2 \\ 5 \times 7 \\ 8 \times 4 \\ 3 \times 2 \end{array}$$

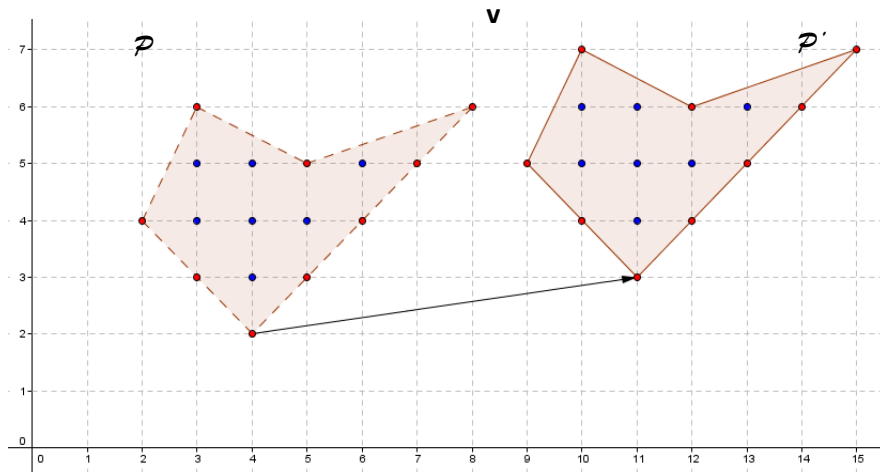
$$\begin{aligned} 3 \cdot 7 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 2 &= 57 \\ 2 \cdot 5 + 7 \cdot 8 + 4 \cdot 3 &= 78 \\ 57 - 78 &= -21 \quad \text{Area} = 10,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{MCD}(2,5) &= 1 \\ \text{MCD}(3,3) &= 3 \\ \text{MCD}(5,2) &= 1 \end{aligned}$$

$$I(\mathcal{P}) = 10,5 - 2,5 + 1 = 9$$

2.6.3 Invarianza per traslazione

Come è noto ogni traslazione di vettore \mathbf{v} lascia invariata l'area. Se il vettore \mathbf{v} ha componenti intere, la traslazione trasforma tutti e soli i punti reticolari in punti reticolari. Ne segue che ogni poligono reticolare \mathcal{P} viene trasformato in un poligono reticolare \mathcal{P}' , e ogni punto reticolare interno di \mathcal{P} si trasforma in un punto reticolare interno di \mathcal{P}' , e quindi si avrà: $I(\mathcal{P}) = I(\mathcal{P}')$.



Verifichiamo analiticamente come la formula

$$I(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) \right| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{MCD}(|x_{k+1} - x_k|, |y_{k+1} - y_k|) + 1 \quad \text{con } x_{n+1} = x_1 \quad \text{e} \quad y_{n+1} = y_1$$

sia invariante per traslazione di un vettore $\mathbf{v}(a,b)$ con a e b interi.

Tramite la traslazione ad ogni punto $P(x,y)$ ne corrisponderà uno P' di coordinate $(x+a, y+b)$. Procediamo a questo punto con la sostituzione di coordinate $(x,y) \rightarrow (x+a, y+b)$ all'interno della formula ottenendo:

$$\begin{aligned} I(\mathcal{P}') &= \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^n (x_k + a)(y_{k+1} + b) - (x_{k+1} + a)(y_k + b) \right| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{MCD}(|(x_{k+1} + a) - (x_k + a)|, |(y_{k+1} + b) - (y_k + b)|) + 1 = \\ &= \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+1} + b x_k + a y_{k+1} + ab) - (x_{k+1} y_k + b x_{k+1} + a y_k + ab) \right| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{MCD}(|x_{k+1} - x_k|, |y_{k+1} - y_k|) + 1 = \\ &= \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) + b(x_k - x_{k+1}) + a(y_{k+1} - y_k) \right| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{MCD}(|x_{k+1} - x_k|, |y_{k+1} - y_k|) + 1 = \end{aligned}$$

e per le proprietà delle sommatorie

$$= \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) + b \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k+1}) + a \sum_{k=1}^n (y_{k+1} - y_k) \right| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{MCD}(|x_{k+1} - x_k|, |y_{k+1} - y_k|) + 1 =$$

da cui grazie alla proprietà delle somme telescopiche

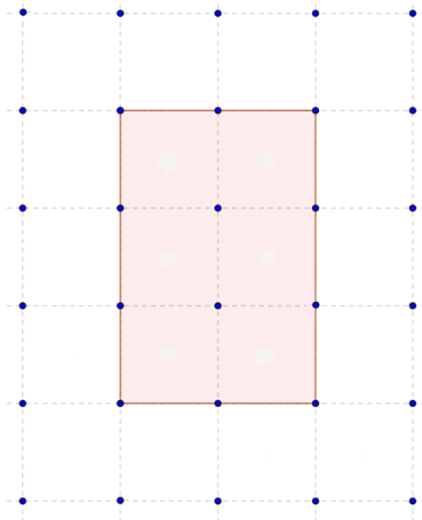
$$= \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) + b(x_1 - x_{n+1}) + a(y_{n+1} - y_1) \right| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{MCD}(|x_{k+1} - x_k|, |y_{k+1} - y_k|) + 1 =$$

Infine essendo $x_{n+1} = x_1$ e $y_{n+1} = y_1$

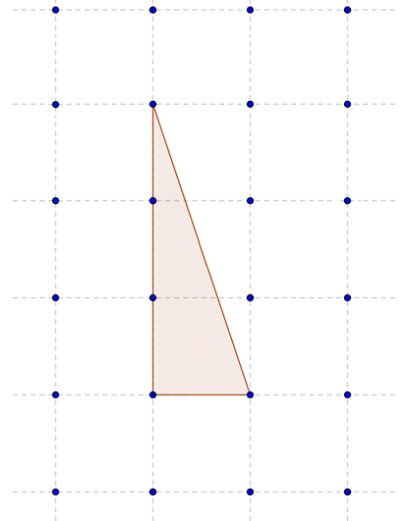
$$= \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) \right| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{MCD}(|x_{k+1} - x_k|, |y_{k+1} - y_k|) + 1 = I(\mathcal{P})$$

3. Central Pick

Nel calcolo delle aree delle figure, l'approccio classico prevede il conteggio dei quadrati unitari (unità di misura) che compongono la figura, come si vede negli esempi .

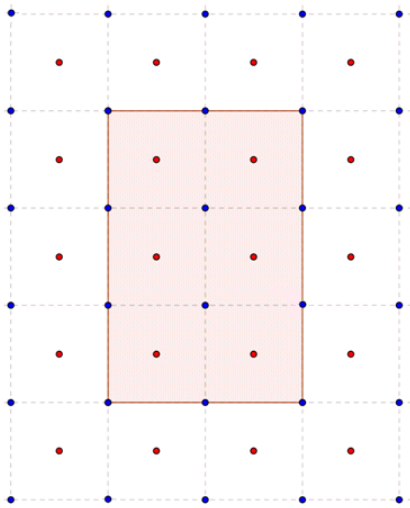


IL RETTANGOLO È COMPOSTO DA 6 QUADRATI \leftrightarrow AREA = 6

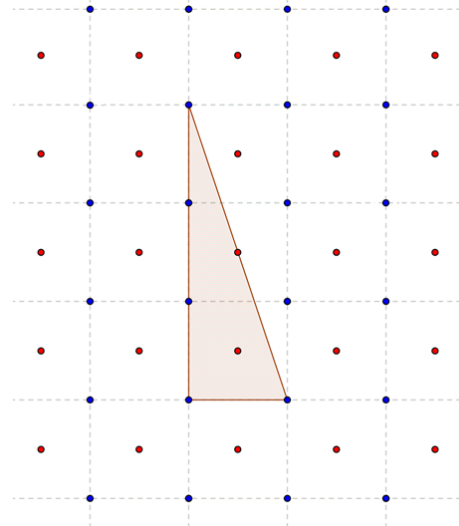


IL TRIANGOLO È COMPOSTO DA 1 QUADRATO E MEZZO \leftrightarrow AREA = 1,5

Tali quadrati possono essere identificati con il loro punto centrale



IL RETTANGOLO HA 6 PUNTI CENTRALI INTERNI \leftrightarrow AREA = 6



IL TRIANGOLO HA 1 PUNTO CENTRALE INTERNO E 1 SULLA FRONTIERA \leftrightarrow AREA = 1,5

da qui l'idea di trovare una nuova formulazione della formula di Pick che si basi sul conteggio dei punti *centrali* del reticolo, cioè i punti di coordinate razionali

$$\left(p + \frac{1}{2}; q + \frac{1}{2} \right) \text{ con } p, q \in \mathbf{Z}$$

3.1 Formula del *Central Pick*

Dato un poligono reticolare \mathcal{P} , indicati con:

- I_c : il numero di punti centrali interni al poligono \mathcal{P}
- F_c : il numero di punti centrali appartenenti alla frontiera di \mathcal{P}

chiamiamo central Pick del poligono \mathcal{P} la quantità:

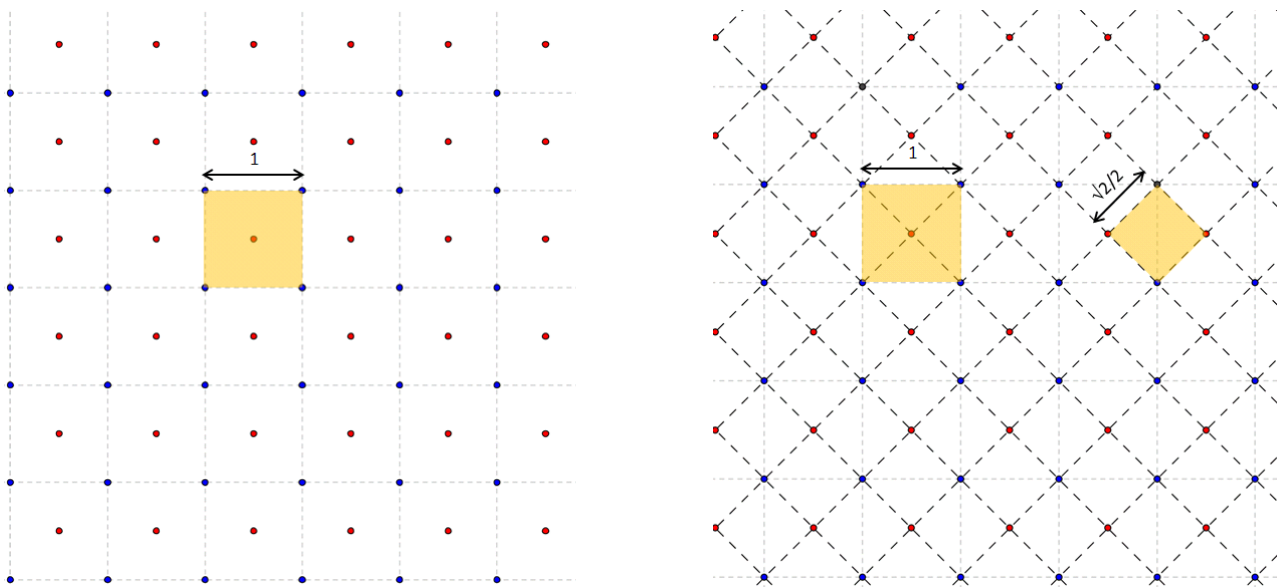
$$I_c + \frac{F_c}{2}$$

Dimostriamo che come avviene con la formula di Pick, anche quella del central Pick fornisce l'area del poligono reticolare \mathcal{P} .

3.2 Idea chiave: una rotazione di 45°

A tale scopo utilizzeremo una semplice argomentazione geometrica.

Ogni reticolo "arricchito" dei punti centrali può essere anche visto come un nuovo reticolo ruotato di 45° rispetto a quello di partenza e di unità di misura $\sqrt{2}/2$



ne segue che l'unità di misura delle aree nel nuovo reticolo è la metà di quella del reticolo di partenza; indicato con $Area(\mathcal{P})$ il numero che esprime l'area nell'unità di misura del primo reticolo e $Area'(\mathcal{P})$ quello relativo all'unità di misura del nuovo reticolo si ha quindi: $Area'(\mathcal{P}) = 2 Area(\mathcal{P})$.

3.3 Proposizione (Central Pick theorem)

Dato un poligono \mathcal{P} reticolare, indicati con:

- I_c : il numero di punti centrali interni al poligono \mathcal{P}
- F_c : il numero di punti centrali appartenenti alla frontiera di \mathcal{P}

si ha:

$$\text{Area}(\mathcal{P}) = I_c + \frac{F_c}{2}$$

Dimostrazione

Indichiamo con:

- I : il numero di punti reticolari del reticolo grande interni al poligono \mathcal{P}
- F : il numero di punti reticolari del reticolo grande appartenenti alla frontiera di \mathcal{P}
- I_c : il numero di punti centrali del reticolo grande interni al poligono \mathcal{P}
- F_c : il numero di punti centrali del reticolo grande appartenenti alla frontiera di \mathcal{P}
- I' : il numero di punti reticolari del reticolo piccolo interni al poligono \mathcal{P}
- F' : il numero di punti reticolari del reticolo piccolo appartenenti alla frontiera di \mathcal{P}

Si noti che: $I' = I + I_c$ e $F' = F + F_c$

Calcoliamo con la formula di Pick l'area di \mathcal{P} nel reticolo "piccolo":

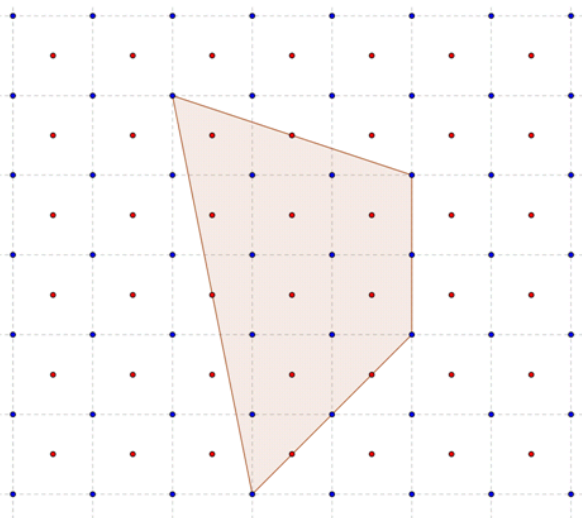
$$\text{Area}'(\mathcal{P}) = I' + \frac{F'}{2} - 1 = I + I_c + \frac{F}{2} + \frac{F_c}{2} - 1 = I + \frac{F}{2} - 1 + I_c + \frac{F_c}{2} = \text{Area}(\mathcal{P}) + I_c + \frac{F_c}{2}$$

ma come abbiamo visto: $\text{Area}'(\mathcal{P}) = 2 \text{Area}(\mathcal{P})$

dunque

$$2\text{Area}(\mathcal{P}) = \text{Area}(\mathcal{P}) + I_c + \frac{F_c}{2} \Rightarrow \text{Area}(\mathcal{P}) = I_c + \frac{F_c}{2}$$

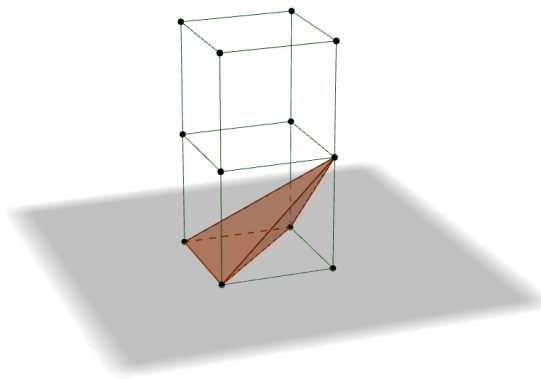
Esempio



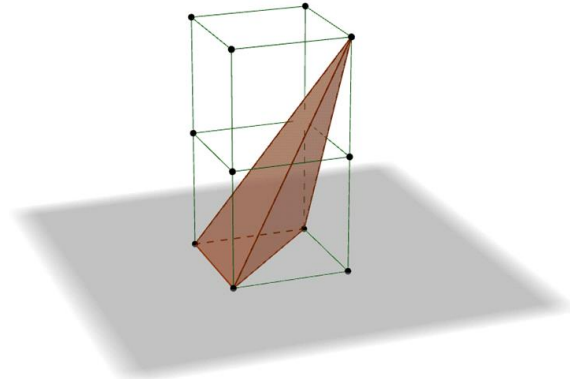
$$\text{Area}(\mathcal{P}) = I_c + \frac{F_c}{2} = 6 + \frac{4}{2} = 8$$

4. Teorema di Pick nello spazio

Il tentativo di estendere il teorema di Pick ad un reticolo spaziale (\mathbb{Z}^3), come è noto, non ha avuto un esito positivo. Reeve [4] nel 1957 mostra che non può esistere una formula “semplice” la quale, a partire dal conteggio di punti reticolari dello spazio, sia in grado di fornire il volume di un poliedro reticolare. L’argomentazione di Reeve si basa sul seguente controesempio nel quale si utilizzano le due piramidi reticolari qui sotto rappresentate:



PIRAMIDE **A**



PIRAMIDE **B**

I punti reticolari che appartengono ai due solidi sono solo 4, posizionati nei vertici delle piramidi: una eventuale formula di Pick nello spazio avrebbe fornito quindi uno stesso risultato!

Tuttavia calcolando i volumi delle due piramidi si ha:

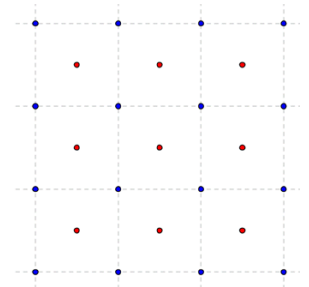
$$\text{Volume (A)} = \frac{1}{3} \text{Area}(\text{base})h = \frac{1}{3} \frac{1}{2} 1 = \frac{1}{6}$$

$$\text{Volume (B)} = \frac{1}{3} \text{Area}(\text{base})h = \frac{1}{3} \frac{1}{2} 2 = \frac{1}{3}$$

4.1 Punti centrali di \mathbb{Z}^3

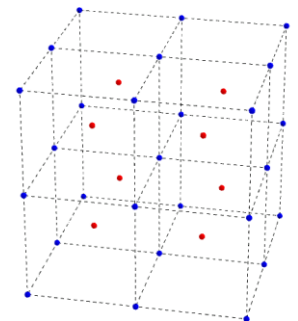
Nella formulazione del Central Pick abbiamo arricchito il reticolo \mathbb{Z}^2 con i punti *centrali* ovvero quelli di coordinate

$$\left(p + \frac{1}{2}; q + \frac{1}{2} \right) \text{ con } p, q \in \mathbb{Z}$$

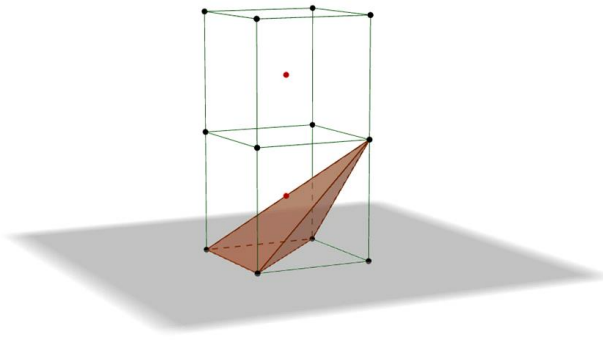


Analogamente possiamo considerare in punti *centrali* di \mathbb{Z}^3 , cioè quelli di coordinate

$$\left(p + \frac{1}{2}; q + \frac{1}{2}; r + \frac{1}{2} \right) \text{ con } p, q, r \in \mathbb{Z}$$



Osserviamo ora come l'argomentazione di Reeve non valga se, si considerano i punti *centrali*.

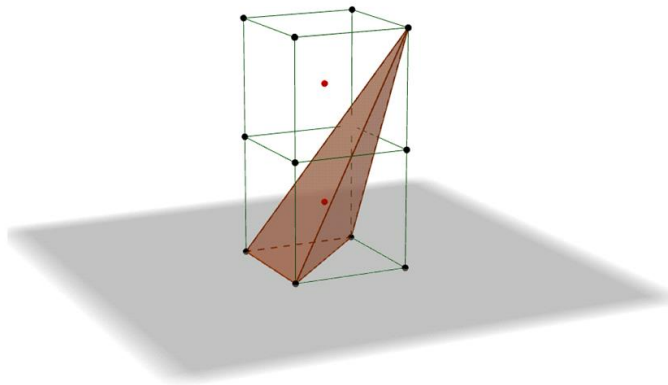


PIRAMIDE \mathcal{A}

Appartiene alla piramide \mathcal{A} :

- un solo punto *centrale* (posizionato sulla frontiera, più precisamente su un suo spigolo)

$$\text{Volume } (\mathcal{A}) = \frac{1}{6}$$



PIRAMIDE \mathcal{B}

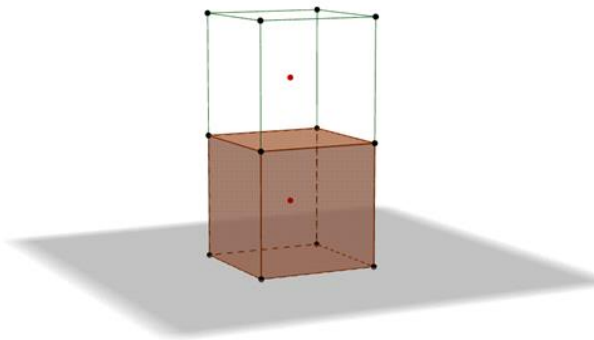
Appartiene alla piramide \mathcal{B} :

- un solo punto *centrale* (posizionato all'interno)

$$\text{Volume } (\mathcal{B}) = \frac{1}{3}$$

Grazie alla presenza dei punti centrali siamo ora in grado di evidenziare la differenza tra i volumi a patto di distinguere (come già avviene nella formula di Pick nel piano) tra punti interni e punti sulla frontiera.

Sfortunatamente l'uso dei soli punti interni non è sufficiente per differenziare la piramide \mathcal{B} e il cubo \mathcal{C} :



CUBO \mathcal{C}

Appartiene al cubo \mathcal{C} :

- 1 punto *centrale* (posizionato all'interno)

$$\text{Volume } (\mathcal{C}) = 1$$

Se vogliamo trovare una formula di Pick nello spazio, siamo quindi costretti a considerare anche altri punti. Proviamo allora ad usare, oltre ai punti centrali, anche quelli reticolari. Vedremo tuttavia che anche questa scelta non sia risolutiva.

4.2 Definizione.

Data la quintupla a, b, c, d, e di numeri reali, chiamiamo $3D-Pick_C$ la funzione che assegna ad ogni poliedro reticolare \mathcal{P} il numero:

$$3D-Pick_C(\mathcal{P}) = aI + bF + cI_C + dF_C + e$$

dove

- I = numero di punti reticolari interni al poliedro \mathcal{P}
- F = numero di punti reticolari appartenenti alla frontiera del poliedro \mathcal{P}
- I_C = numero di punti centrali interni al poliedro \mathcal{P}
- F_C = numero di punti centrali appartenenti alla frontiera del poliedro \mathcal{P}

4.3 Proposizione

Non esiste nessuna quintupla a, b, c, d, e di numeri reali, tale che per ogni poliedro reticolare \mathcal{P}

$$3D-Pick_C(\mathcal{P}) = \text{Volume}(\mathcal{P})$$

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che esistano a, b, c, d, e tali che per ogni poliedro reticolare \mathcal{P} :

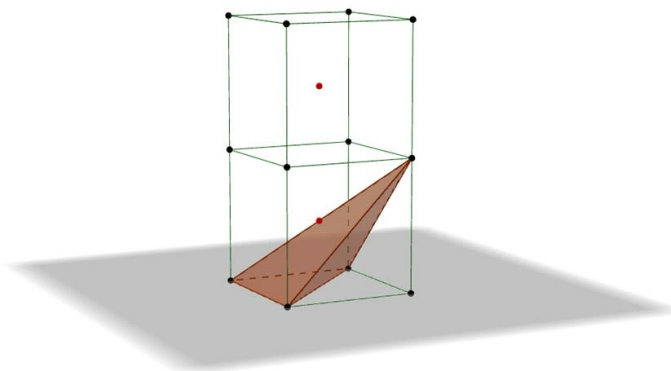
$$3D-Pick_C(\mathcal{P}) = \text{Volume}(\mathcal{P})$$

Applicando la formula $3D-Pick_C$

$$3D-Pick_C(\mathcal{P}) = aI + bF + cI_C + dF_C + e$$

a 6 diversi poliedri reticolari, otteniamo, per le costanti a, b, c, d, e altrettante relazioni.

1)



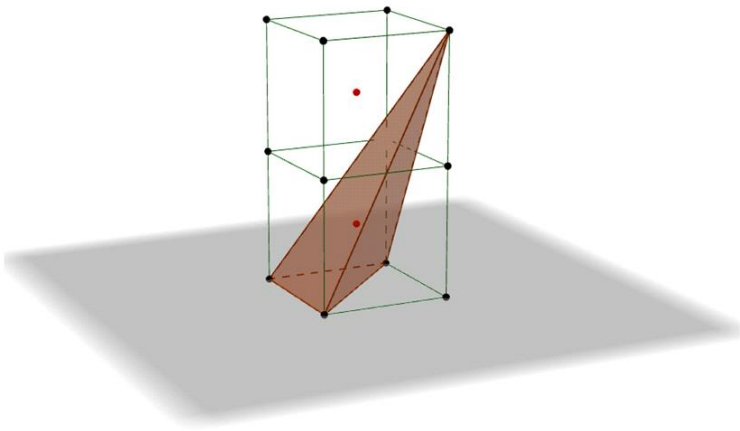
- $I = 0$
- $F = 4$
- $I_C = 0$
- $F_C = 1$

$$3D-Pick_C(\mathcal{P}) = 4b + d + e$$

$$\text{Volume}(\mathcal{P}) = \frac{1}{6}$$

$$4b + d + e = \frac{1}{6}$$

2)



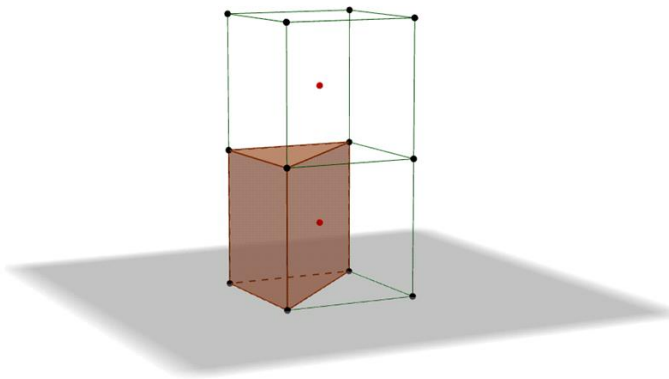
- $I = 0$
- $F = 4$
- $I_c = 1$
- $F_c = 0$

$$3D\text{-Pick}_c(\mathcal{P}) = 4b + c + e$$

$$\text{Volume}(\mathcal{P}) = \frac{1}{3}$$

$$4b + c + e = \frac{1}{3}$$

3)



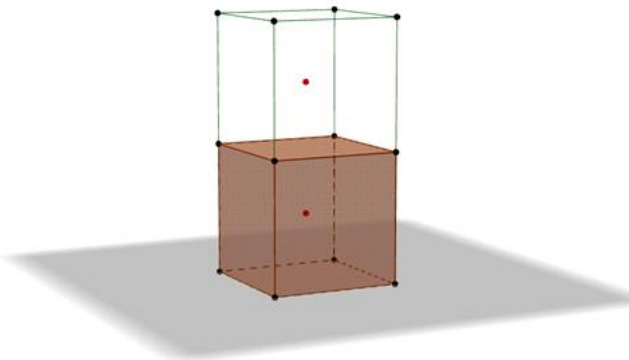
- $I = 0$
- $F = 6$
- $I_c = 0$
- $F_c = 1$

$$3D\text{-Pick}_c(\mathcal{P}) = 6b + d + e$$

$$\text{Volume}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}$$

$$6b + d + e = \frac{1}{2}$$

4)



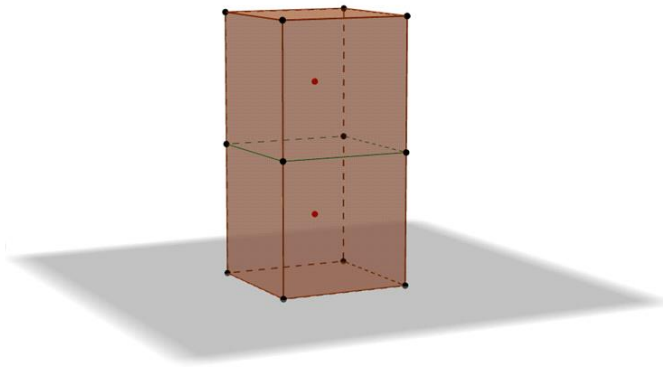
- $I = 0$
- $F = 8$
- $I_c = 1$
- $F_c = 0$

$$3D\text{-Pick}_c(\mathcal{P}) = 8b + c + e$$

$$\text{Volume}(\mathcal{P}) = 1$$

$$8b + c + e = 1$$

5)



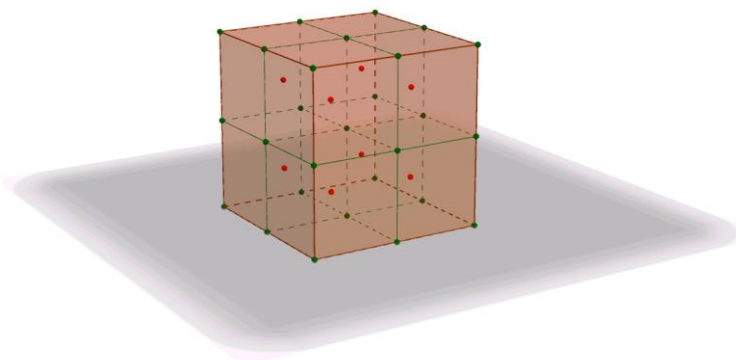
- $I = 0$
- $F = 12$
- $I_c = 2$
- $F_c = 0$

$$3D-Pick_c(\mathcal{P}) = 12b + 2c + e$$

$$\text{Volume}(\mathcal{P}) = 2$$

$$12b + 2c + e = 2$$

6)



- $I = 1$
- $F = 26$
- $I_c = 8$
- $F_c = 0$

$$3D-Pick_c(\mathcal{P}) = a + 26b + 8c + e$$

$$\text{Volume}(\mathcal{P}) = 8$$

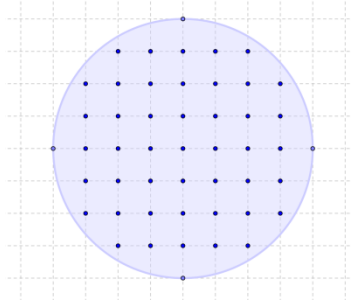
$$a + 26b + 8c + e = 8$$

ma le sei relazioni sono tra loro incompatibili, cioè esiste alcuna quintupla a, b, c, d, e che risolva il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4b + d + e = \frac{1}{6} \\ 4b + c + e = \frac{1}{3} \\ 6b + d + e = \frac{1}{2} \\ 8b + c + e = 1 \\ 12b + 2c + e = 2 \\ a + 26b + 8c + e = 8 \end{array} \right.$$

5. Proprietà reticolari del cerchio

Dedichiamo questa ultima sezione allo studio delle proprietà dei punti reticolari del cerchio, mostrando anche in questo caso l'utilità del teorema di Pick.

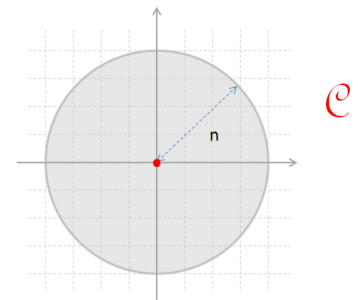


5.1 Problema del cerchio di Gauss

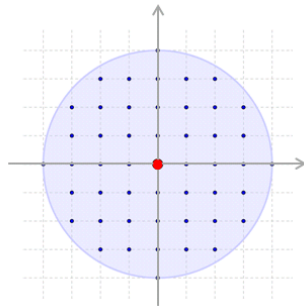
Il problema del calcolo dei punti a coordinate intere di un cerchio (noto come “problema del cerchio di Gauss”) è stato affrontato inizialmente da Gauss nel 1834 e poi successivamente da altri matematici (Sierpinski 1906, Van der Corput 1923, Dirichlet 1849, Voronoi 1903, Hardy, Landau 1915, Erdos-Fuchs 1956) [6][7]

Chiamiamo *cerchio reticolare* ogni cerchio \mathcal{C} di raggio n intero positivo, con centro nell'origine degli assi cartesiani.

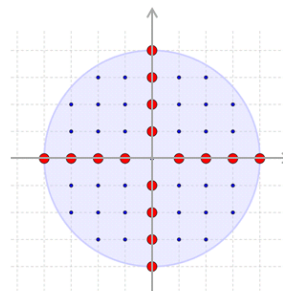
Al fine di contarli, possiamo dividere i punti reticolari di \mathcal{C} in tre sottoinsiemi:



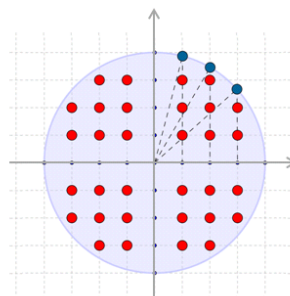
- $A = \{ \text{l'origine} \}$



- $B = \{ \text{i punti reticolari sugli assi, esclusa l'origine} \}$



- $C = \{ \text{i punti reticolari restanti} \}$



Il numero dei punti reticolari contenuti nel cerchio \mathcal{C} vale allora:

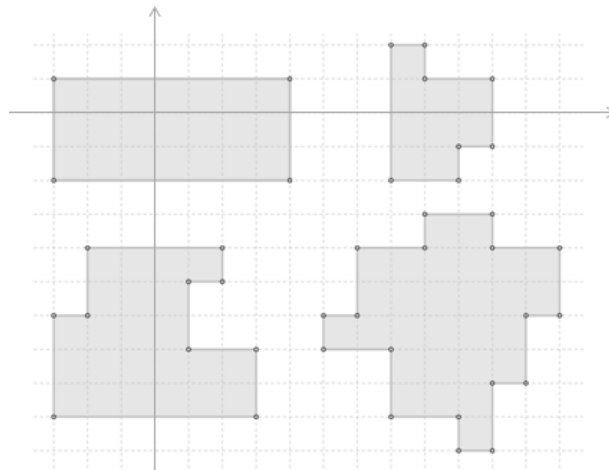
$$1 + 4n + 4 \sum_{k=1}^{n-1} \lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor$$

(nota: nella sommatoria compare l'operazione parte intera)

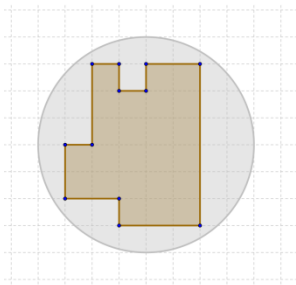
Ci proponiamo ora di valutare l'area del cerchio attraverso particolari insiemi di poligoni reticolari.

5.2 Poligoni standard

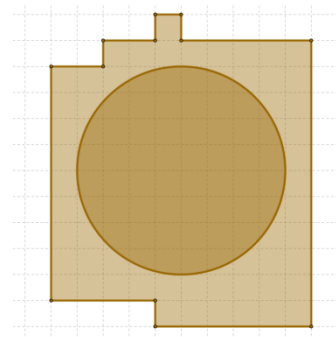
Chiameremo *poligoni standard* tutti poligoni reticolari con i lati paralleli agli assi cartesiani



Ci occuperemo in particolare dei poligoni standard contenuti nel cerchio e di quelli che contengono il cerchio:



$$\mathcal{P}_s \subseteq \mathcal{C}$$

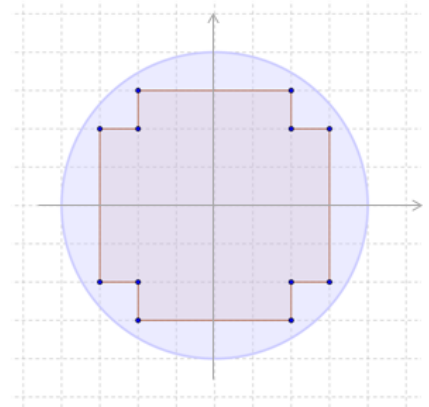


$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}_s$$

5.3 Interiore

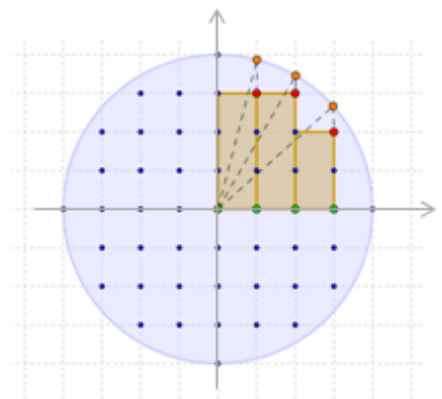
Chiameremo *interiore* del cerchio \mathcal{C} , e indicheremo con $\text{Int}(\mathcal{C})$, il più grande poligono standard contenuto in \mathcal{C}

Vediamo ora come può essere costruito.

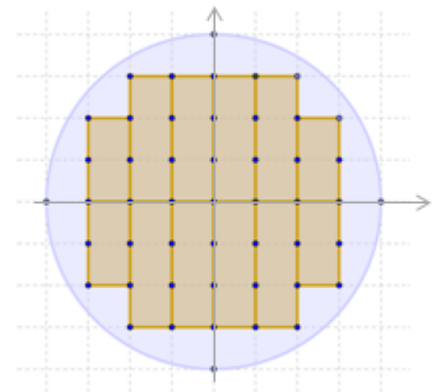


5.4 Costruzione dell'interiore

(i) Si costruiscono sul segmento $(0,0) (n-1, 0)$, rettangoli di base 1 e altezze pari a: $\lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor$



(ii) Si completa la figura per simmetria rispetto agli assi cartesiani



Grazie al teorema di Pick e alla formula di Gauss proveremo ora a calcolare l'area dell'interiore. Per prima cosa dobbiamo contare i punti reticolari sulla frontiera.

5.5 Proposizione.

Dato un cerchio reticolare \mathcal{C} di raggio n , i punti reticolari della frontiera di $\text{Int}(\mathcal{C})$ sono:

$$F(\text{Int}(\mathcal{C})) = 8n - 8$$

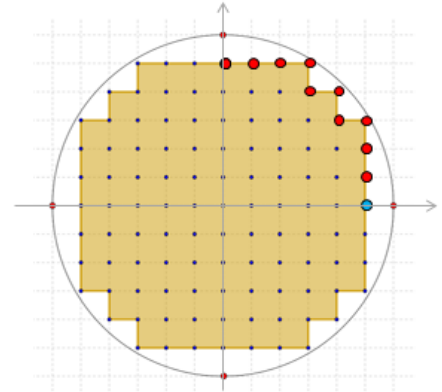
Dimostrazione

I punti reticolari che si incontrano lungo la frontiera nel primo quadrante a partire dal punto $(n - 1, 0)$ sono tanti quanto la distanza di Minkowski tra i punti $(n - 1, 0)$ e $(0, n - 1)$, e cioè:

$$|0 - n + 1| + |n - 1 - 0| = 2n - 2$$

(ricordiamo che la distanza di Minkowski tra due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ è la lunghezza della più corta spezzata con lati paralleli agli assi che li collega, e vale: $\text{Dist}_M(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$)

Quindi i punti reticolari lungo tutta la frontiera sono: $4(2n - 2) = 8n - 8$.



Troviamo ora il numero dei punti reticolari interni dell'interno

5.6 Proposizione.

Dato un cerchio reticolare \mathcal{C} di raggio n , i punti reticolari interni di $\text{Int}(\mathcal{C})$ sono:

$$I(\text{Int}(\mathcal{C})) = 1 - 4n + 4 \sum_{k=1}^{n-1} \lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor$$

Dimostrazione

Osserviamo che:

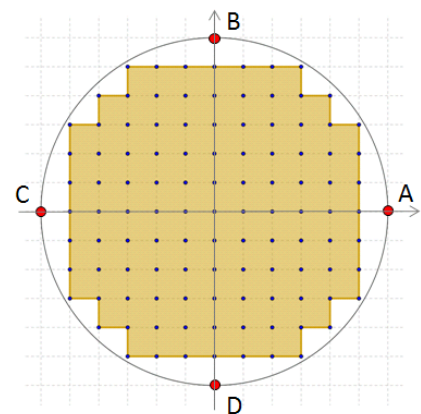
$$\text{Punti reticolari in } \mathcal{C} = I(\text{Int}(\mathcal{C})) \dot{\cup} F(\text{Int}(\mathcal{C})) \dot{\cup} \{A, B, C, D\}$$

(dove A, B, C e D sono le intersezioni di \mathcal{C} con gli assi)

Abbiamo visto in 5.1 che grazie alla formula di Gauss:

$$\text{Punti reticolari in } \mathcal{C} = 1 + 4n + 4 \sum_{k=1}^{n-1} \lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor$$

Ne segue che:



$$I(\text{Int}(\mathcal{C})) = \text{Punti reticolari in } \mathcal{C} - F(\text{Int}(\mathcal{C})) - \{A, B, C, D\} = \left(1 + 4n + 4 \sum_{k=1}^{n-1} \lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor \right) - (8n - 8) - 4 =$$

$$= 5 - 4n + 4 \sum_{k=1}^{n-1} \lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor$$

Siamo ora in grado di calcolare l'area dell'interno.

5.7 Area dell'interno.

Dato un cerchio reticolare \mathcal{C} di raggio n si ha:

$$\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C})) = 4 \sum_{k=1}^{n-1} \lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor$$

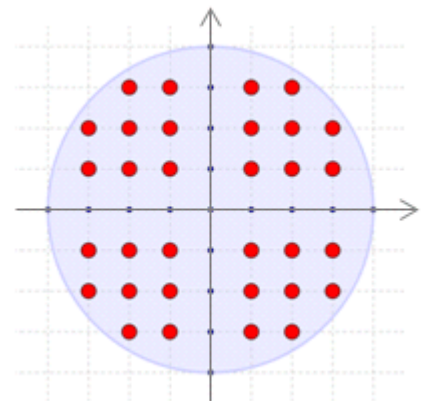
Dimostrazione

Per il teorema di Pick, e per le proposizioni 5.5 e 5.6 si ha:

$$\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C})) = I(\text{Int}(\mathcal{C})) + \frac{F(\text{Int}(\mathcal{C}))}{2} - 1 = 5 - 4n + 4 \sum_{k=1}^{n-1} \lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor + \frac{8n - 8}{2} - 1 = 4 \sum_{k=1}^{n-1} \lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor$$

5.8 Osservazione.

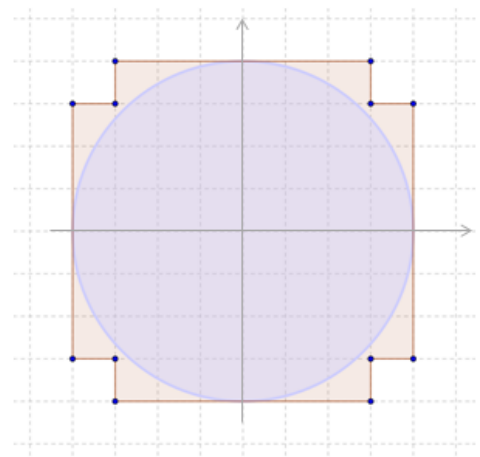
Osserviamo che l'area di $\text{Int}(\mathcal{C})$ corrisponde al numero di punti reticolari contenuti nel cerchio \mathcal{C} non appartenenti agli assi.



5.9 Copertura

Chiameremo *copertura* del cerchio \mathcal{C} , e indicheremo con $\text{Cop}(\mathcal{C})$, il più piccolo poligono standard contenuto in \mathcal{C}

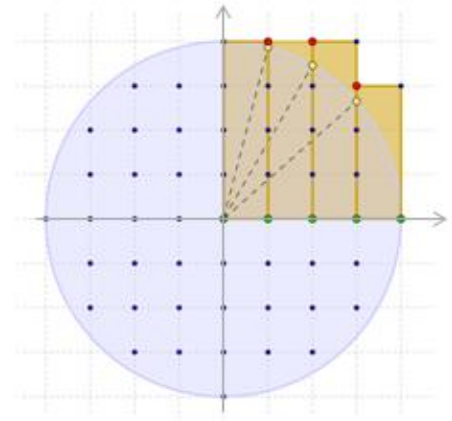
Vediamo anche in questo caso come può essere costruito



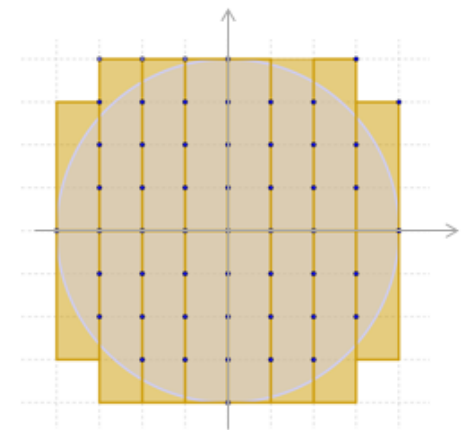
5.10 Costruzione della copertura

(i) Si costruiscono sul segmento $(0,0) (n, 0)$, rettangoli di

base 1 e altezze pari a: $\lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor + 1$



(ii) Si completa la figura per simmetria rispetto agli assi cartesiani

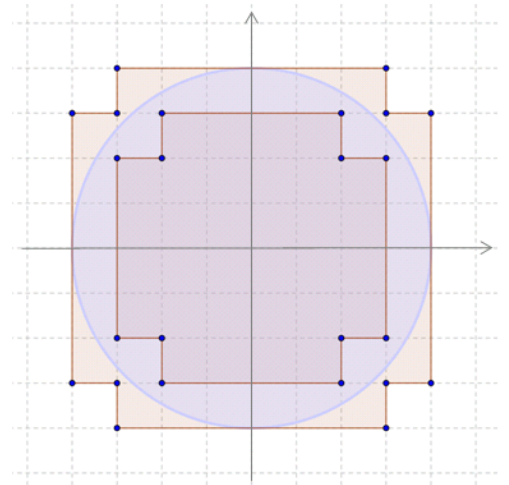


Come già fatto per l'interiore, cerchiamo una formula per il calcolo dell'area della copertura di \mathcal{e} .

5.11 Cornice

Chiamiamo cornice di \mathcal{e} e indichiamo con $\text{Corn}(\mathcal{e})$, l'insieme di punti:

$$\text{Corn}(\mathcal{e}) = \text{Cop}(\mathcal{e}) - \text{Int}(\mathcal{e})$$



5.12 Area della cornice

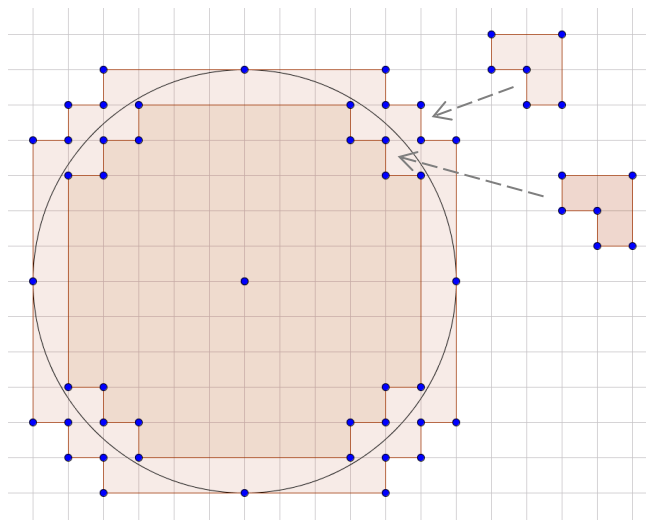
Dato un cerchio reticolare \mathcal{C} di raggio n si ha: $\text{Area}(\text{Corn}(\mathcal{C})) = 8n - 4$

Dimostrazione

Aggiungendo $\text{Cop}(\mathcal{C})$ e $\text{Int}(\mathcal{C})$ opportune figure congruenti, si ottengono due quadrati, uno di lato $2n$ e l'altro di $2n - 2$ la cui differenza ha la stessa area della cornice.

Quindi:

$$\text{Area}(\text{Corn}(\mathcal{C})) = (2n)^2 - (2n - 2)^2 = 8n - 4$$



Siamo ora in grado di calcolare l'area della copertura.

5.13 Area della copertura

Dato un cerchio reticolare \mathcal{C} di raggio n si ha: $\text{Area}(\text{Cop}(\mathcal{C})) = 8n - 4 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} \lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor$

Dimostrazione

Essendo $\text{Cop}(\mathcal{C}) = \text{Corn}(\mathcal{C}) \cup \text{Int}(\mathcal{C})$ ne segue (per le prop. 5.7 e 5.12):

$$\text{Area}(\text{Cop}(\mathcal{C})) = \text{Area}(\text{Corn}(\mathcal{C})) + \text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C})) = 8n - 4 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} \lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor$$

5.14 Approssimazione del numero π

Per ogni cerchio reticolare \mathcal{C} valgono per le grandezze $\text{Area}(\mathcal{C})$, $\text{Area}(\text{Cop}(\mathcal{C}))$ e $\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))$ le seguenti disuguaglianze:

$$\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C})) \leq \text{Area}(\mathcal{C}) \leq \text{Area}(\text{Cop}(\mathcal{C}))$$

e dividendo per n^2

$$\frac{\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))}{n^2} \leq \frac{\text{Area}(\mathcal{C})}{n^2} \leq \frac{\text{Area}(\text{Cop}(\mathcal{C}))}{n^2}$$

da cui

$$\frac{\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))}{n^2} \leq \pi \leq \frac{\text{Area}(\text{Cop}(\mathcal{C}))}{n^2}$$

In altre parole $\frac{\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))}{n^2}$ e $\frac{\text{Area}(\text{Cop}(\mathcal{C}))}{n^2}$ forniscono rispettivamente un'approssimazione per difetto e una per eccesso di π

Proveremo che al crescere di n tali approssimazioni saranno sempre più buone.

5.15 Proposizione

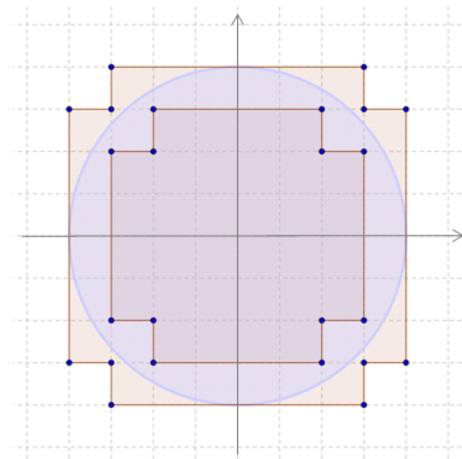
La successione $\frac{\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))}{n^2}$ tende asintoticamente al valore π , cioè:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))}{n^2} = \pi$$

Dimostrazione

Per ogni n si ha:

$$\frac{\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))}{n^2} \leq \pi \leq \frac{\text{Area}(\text{Cop}(\mathcal{C}))}{n^2}$$



$$\frac{\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))}{n^2} - \frac{\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))}{n^2} \leq \pi - \frac{\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))}{n^2} \leq \frac{\text{Area}(\text{Cop}(\mathcal{C}))}{n^2} - \frac{\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))}{n^2}$$

$$0 \leq \pi - \frac{\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))}{n^2} \leq \frac{\text{Area}(\text{Cop}(\mathcal{C})) - \text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))}{n^2} = \frac{\text{Area}(\text{Corn}(\mathcal{C}))}{n^2} = \frac{8n - 4}{n^2}$$

$$0 \leq \pi - \frac{\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))}{n^2} \leq \frac{8n - 4}{n^2}$$

Per il teorema del confronto si ha dunque:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi - \frac{\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))}{n^2} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n - 4}{n^2}$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi - \frac{\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))}{n^2} \right) \leq 0$$

$$\text{dunque: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi - \frac{\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))}{n^2} \right) = 0$$

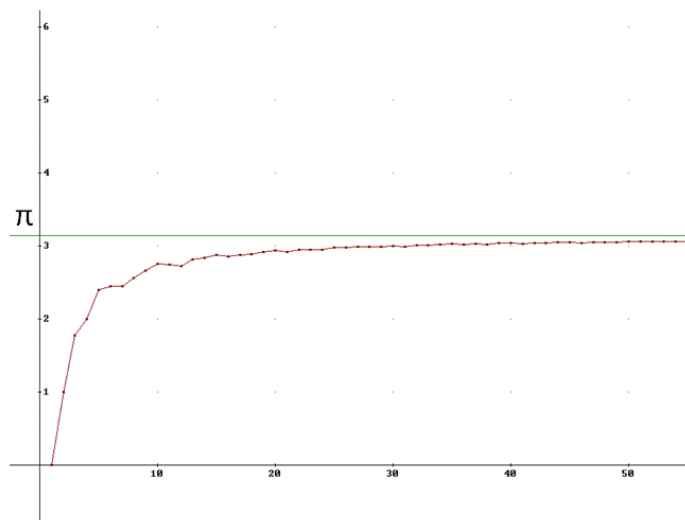
$$\text{e infine: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))}{n^2} = \pi$$

5.16 Osservazione

In maniera analoga si prova che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Area}(\text{Cop}(\mathcal{C}))}{n^2} = \pi$$

Riportiamo nel grafico l'andamento asintotico della successione $\frac{\text{Area}(\text{Int}(\mathcal{C}))}{n^2}$



6. Conclusioni

Alla fine di questo lavoro raccogliamo alcune considerazioni sui risultati ottenuti, indicando, di volta in volta, spunti per ulteriori indagini e problemi aperti.

6.1 Formula dei punti interni: invarianza per simmetrie e rotazioni

Nel par. 2.6.3 abbiamo verificato che la formula dei punti interni di un poligono reticolare

$$I(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) \right| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{MCD}(|x_{k+1} - x_k|, |y_{k+1} - y_k|) + 1 \quad \text{con } x_{n+1} = x_1 \text{ e } y_{n+1} = y_1$$

è invariante per ogni traslazione di vettore $\mathbf{v}(a,b)$ con a e $b \in \mathbf{Z}$.

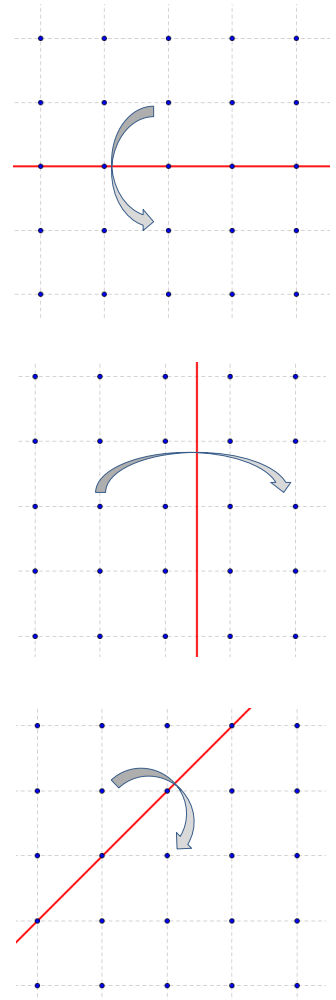
In tali trasformazioni il reticolo viene trasformato in sé stesso: tutti e soli i punti del reticolo vengono trasformati in punti del reticolo. Questo stesso fatto avviene anche per altre trasformazioni geometriche:

- simmetrie rispetto alle rette:

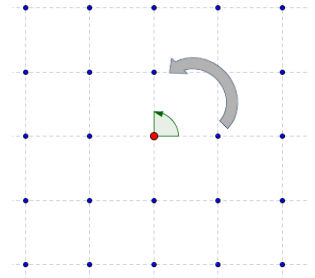
- $x = h$ e $y = k$ con $h, k \in \mathbf{Z}$

- $x = h + \frac{1}{2}$ e $y = k + \frac{1}{2}$ con $h, k \in \mathbf{Z}$

- $y = \pm x + h$ e $y = \pm x + k$ con $h, k \in \mathbf{Z}$



- rotazioni di centro un punto reticolare di $k90^\circ$ con $k \in \mathbb{Z}$

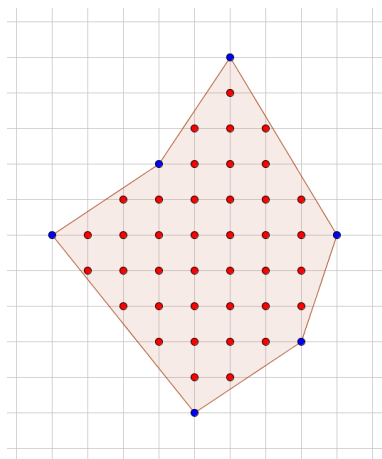


Potrebbe avere interesse, a questo punto, verificare anche per queste trasformazioni l'invarianza della formula.

6.2 Poligoni reticolari coprimi

Abbiamo visto che per alcuni poligoni reticolari la formula dei punti interni assume una forma molto semplice. E' il caso di quelli unari e binari dispari. Tali poligoni sono casi particolari di poligoni coprimi, cioè di poligoni reticolari tali che per ogni lato ℓ :

$$\text{MCD}(\ell_x, \ell_y) = 1$$



$$\text{Area}(\mathcal{P}) = 41 \quad \text{I}(\mathcal{P}) = \text{Area}(\mathcal{P}) - \frac{n}{2} + 1 = \text{Area}(\mathcal{P}) - \frac{6}{2} + 1 = \text{Area}(\mathcal{P}) - 2 = 41 - 2 = 39$$

Potrebbe essere interessante analizzare grazie alla teoria dei numeri le proprietà geometriche di questi poligoni, studiando ad esempio le condizioni per la loro costruibilità come è stato fatto per i triangoli binari dispari (vedi 2.5.2) (si osservi ad esempio come ogni poligono coprimo con un numero pari di lati deve avere necessariamente l'area espressa da un numero intero).

6.3 Middle Pick

Abbiamo visto (vedi 3.2) come l'introduzione dei punti centrali produce un nuovo reticolo ruotato di 45° rispetto al primo e di quadrato reticolare di area $\frac{1}{2}$. Reiterando la procedura si ottiene allora un ulteriore reticolo con le rette reticolari parallele a quello di partenza, e di quadrato reticolare di area $\frac{1}{4}$. I suoi punti reticolari sono:

- i punti reticolari del reticolo di partenza;
- i punti centrali del reticolo di partenza;
- i punti centrali del secondo reticolo cioè i punti di coordinate

$$\left. \begin{array}{l} \left(p + \frac{1}{2}; q \right) \text{ con } p, q \in \mathbf{Z} \\ \left(p; q + \frac{1}{2} \right) \text{ con } p, q \in \mathbf{Z} \end{array} \right\} P_M$$

Si osservi che si tratta dei punti medi dei lati dei quadrati del primo reticolo.

Sia ora \mathcal{P} un poligono reticolare e $\text{Area}(\mathcal{P})$ la sua area nell'unità di misura del reticolo di partenza.

Se applichiamo ad esso la formula del Central Pick del secondo reticolo

$$\text{Area}'(\mathcal{P}) = I_M + \frac{F_M}{2}$$

otteniamo l'area di \mathcal{P} nell'unità di misura $\frac{1}{2}$ (che vale il doppio di quella misurata nel reticolo di partenza).

Quindi:

$$\text{Area}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} \text{Area}'(\mathcal{P}) = \frac{I_M}{2} + \frac{F_M}{4}$$

Abbiamo così trovato una nuova formulazione del teorema di Pick che utilizza "i punti medi": *il Middle Pick*

$$\text{Area}(\mathcal{P}) = \frac{I_M}{2} + \frac{F_M}{4}$$

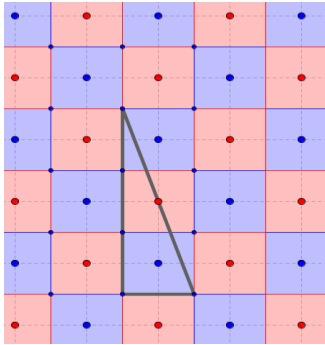
6.4 Central Pick bicolore

Immaginiamo di colorare il reticolo \mathbf{Z}^2 a scacchiera di rosso e di blu. I punti centrali risultano colorati in modo naturale dello stesso colore del quadrato del reticolo. Ci si può chiedere ora di interpretare i risultati che si ottengono dalla formula del Central Pick applicata ad un poligono reticolare \mathcal{P} considerando separatamente i punti centrali rossi e a quelli blu.

La speranza è di trovare il modo, attraverso queste formule, di misurare le porzioni di superficie rossa e di superficie blu che ricoprono il poligono reticolare.

Esempio 1

In questo esempio vengono applicate le formule del Central Pick ai punti centrali colorati nel caso di un triangolo reticolare.



$$\text{Area}_{\text{rossa}}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Area}_{\text{blu}}(\mathcal{P}) = 1$$

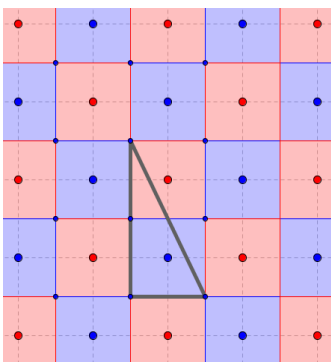
$$I_{C(\text{rossi})} + \frac{F_{C(\text{rossi})}}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$I_{C(\text{blu})} + \frac{F_{C(\text{blu})}}{2} = 1 + \frac{0}{2} = 1$$

In effetti in questo caso si vede che le due formule ci danno rispettivamente le aree della superficie colorata di rosso e di quella colorata di blu

Tuttavia il seguente controesempio ci fa concludere come ciò non valga sempre.

Esempio 2



$$\text{Area}_{\text{rossa}}(\mathcal{P}) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Area}_{\text{blu}}(\mathcal{P}) = \frac{3}{4}$$

$$I_{C(\text{rossi})} + \frac{F_{C(\text{rossi})}}{2} = 0 + \frac{0}{2} = 0$$

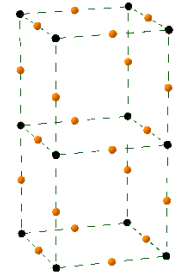
$$I_{C(\text{blu})} + \frac{F_{C(\text{blu})}}{2} = 1 + \frac{0}{2} = 1$$

E' richiesta quindi un'analisi più approfondita del fenomeno.

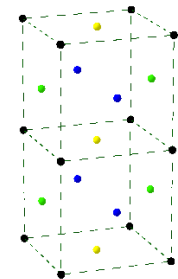
6.5 Teorema di Pick nello spazio.

Nella ricerca di una formula di Pick nello spazio (vedi 4) si è fatto uso dei punti reticolari e di quelli centrali. Abbiamo in seguito vagliato una formulazione che utilizzava anche i punti di coordinate:

$$\left. \begin{array}{l} \left(p + \frac{1}{2}; q; r \right) \text{ con } p, q, r \in \mathbf{Z} \\ \left(p; q + \frac{1}{2}; r \right) \text{ con } p, q, r \in \mathbf{Z} \\ \left(p; q; r + \frac{1}{2} \right) \text{ con } p, q, r \in \mathbf{Z} \end{array} \right\} \text{punti medi degli spigoli dei cubi reticolari (P}_S) \text{}$$

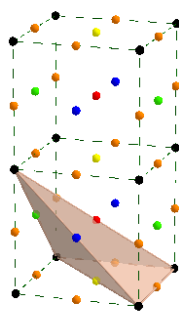


$$\left. \begin{array}{l} \left(p + \frac{1}{2}; q + \frac{1}{2}; r \right) \text{ con } p, q, r \in \mathbf{Z} \\ \left(p + \frac{1}{2}; q; r + \frac{1}{2} \right) \text{ con } p, q, r \in \mathbf{Z} \\ \left(p; q + \frac{1}{2}; r + \frac{1}{2} \right) \text{ con } p, q, r \in \mathbf{Z} \end{array} \right\} \text{centri delle facce dei cubi reticolari (P}_F) \text{}$$



Tramite l'espressione:

$$3D\text{-Pick}_C(\mathcal{P}) = aI + bF + cI_C + dF_C + eI_S + fF_S + gI_F + hF_F + i$$



Anche in questo caso si è provata l'inapplicabilità della formula nel calcolo dei volumi, per l'incompatibilità delle condizioni sui coefficienti, generate da un opportuno insieme di poliedri.

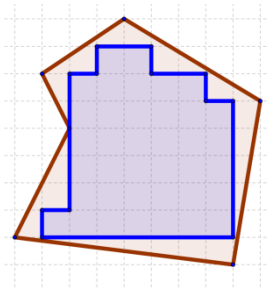
Osserviamo tuttavia che la formula non rappresenta il massimo della generalità. Nell'insieme dei punti della frontiera del poliedro \mathcal{P} reticolare non si distingue tra vertici, punti sugli spigoli e punti interni alla facce del poliedro. Si tratta inoltre di un polinomio di 1° grado nelle variabili $a, b, c, d, e, f, g, h, i$.

Attualmente la migliore risposta al problema resta il lavoro del matematico Ehrhart [9]

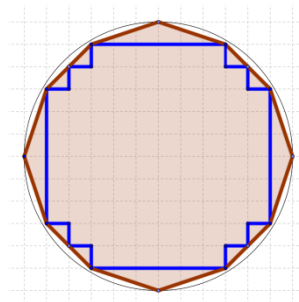
6.6 Poligoni standard

L'uso dei poligoni standard si è rivelato particolarmente utile nello studio delle proprietà reticolari del cerchio. Tale poligoni potrebbero essere utilizzati nell'affrontare altre questioni, ne proponiamo alcune.

- Sviluppare un percorso analogo a quello fatto con il cerchio, con altre curve chiuse (ad esempio ellissi o segmenti parabolici)
- Studiare i poligoni standard contenuti in un poligono reticolare \mathcal{P} , e una volta determinati anche in questi casi $\text{Int}(\mathcal{P})$ e $\text{Cop}(\mathcal{P})$ studiarne le proprietà geometriche e numeriche, e le relazioni con il poligono di partenza \mathcal{P} .



- A partire dall'interno di un cerchio è possibile costruire e studiare il suo involucro convesso [10] (il più piccolo poligono convesso che contiene $\text{Int}(\mathcal{C})$, in figura è bordato di marrone)



Questo poligono deve il suo interesse al fatto di essere il più piccolo poligono convesso che contiene tutti i punti reticolari del cerchio.

7. Bibliografia e sitografia

- [1] <http://cli.sc.unica.it/crsem/images/pdf2/Seminari/seminariopick2012.pdf>
- [2] Pick G., *Geometrisches zur Zahlenlehre*, Sitzungsber Lotus Prag, 1900
- [3] <http://utenti.quipo.it/base5/geopiana/pickteor.htm>
- [4] Reeve, J. E., *On the volume of lattice polyhedra*, Proceedings of the London Mathematical Society, 3 1957
- [5] https://it.wikipedia.org/wiki/Formula_dell'area_di_Gauss
- [6] <http://www.matapp.unimib.it/~leonardo/Area/Area.pdf>
- [7] www.archimedeproject.isisspieve.it/archimede/archivio/articoli_scientifici/file/sul_cerchio_di_gauss.pdf
- [8] <http://www.belloma.it/la-distanza-di-minkowski/>
- [9] <http://mathworld.wolfram.com/EhrhartPolynomial.html>
- [10] https://it.wikipedia.org/wiki/Inviluppo_convesso