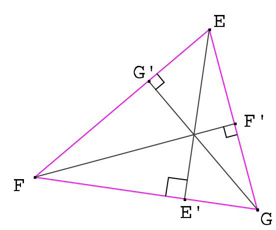
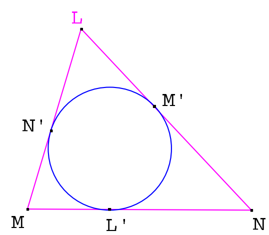
COSTRUZIONI GEOMETRICHE E PROBLEMA DI STEINER

(1) Supponiamo di avere tre punti R', S', T'. Vogliamo trovare tre punti R, S, T in modo che R', S', T' siano i punti medi dei segmenti ST, TR, RS. Possiamo sempre determinare i punti R, S, T? In quanti modi?

(2) Supponiamo di avere tre punti E', F', G'. In quali casi ossiamo determinare un triangolo EFG in modo che essi siano i piedi delle tre altezze? In quanti modi?

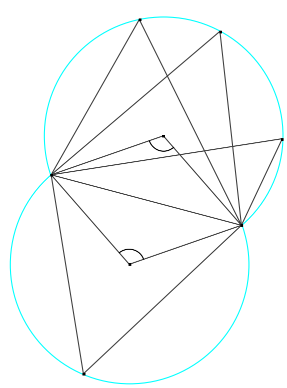
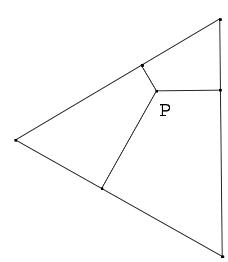
(3) Supponiamo di avere tre punti L', M', N'. In quali casi ossiamo determinare un triangolo LMN in modo che essi siano i punti di tangenza della circonferenza iscritta nel triangolo LMN? In quanti modi?





(4) Supponiamo ora di avere un triangolo qualsiasi ABC. Esisterà un triangolo equilatero $A'B'C'$ i cui lati passano per A, B, C (ossia circoscritto ad ABC)? Come possiamo costruirlo? Quanti ce ne saranno?

(5) Alcune conseguenze del teorema dell'angolo al centro.
Dato un segmento AB e un angolo α, l'insieme dei punti che vedono AB sotto un angolo di ampiezza α è dato, in ciascuno dei due semipiani, da un arco di circonferenza.
Un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza se e solo se le due coppie di angoli opposti hanno la stessa somma (un angolo piatto).

(6) Il teorema di Viviani. Dato un triangolo equilatero $\mathcal{T}$, se prendiamo un qualsiasi punto P interno a $\mathcal{T}$, la somma delle distanze di P dai lati è costante, indipendentemente da come si è scelto P.
Come possiamo esprimere tale somma?
Osservare che questa somma è crescente al crescere del lato di $\mathcal{T}$.

(7) Un primo problema di massimo.
Siano γ e δ due circonferenze secanti, aventi centri C e D, disposti in modo che nessuna delle due cironferenze li contenga entrambi. Detto P uno dei punti di intersezione di γ e δ, tracciamo una retta r per P, che intercetterà due corde in γ e δ. Come va tracciata la retta r affinché la lunghezza totale delle due corde sia massima possibile?

Vogliamo occuparci di alcuni problemi di massimo o minimo in geometria. Iniziamo con alcuni dei più semplici.

(8) Sia P un punto e r una retta nel piano. Come va scelto un punto Q su r in modo che la PQ sia minima?
Siano poi S e T due punti nel piano. Come va scelta una retta t passante per T in modo che la distanza tra S e t sia massima?

(9) Altro problema di minimo. Prendiamo due punti A, B. Ci proponiamo di trovare per quali punti del piano P la somma di segmenti $PA + PB$ assume valore minimo. Esisterà un punto siffatto? Alcune ragioni suggeriscono di sí : infatti allontandosi sempre più da A e B, la somma tende all'infinito.

(10) Per quali punti P la somma $PA + PB$ è minima? Qual è il valore minimo?

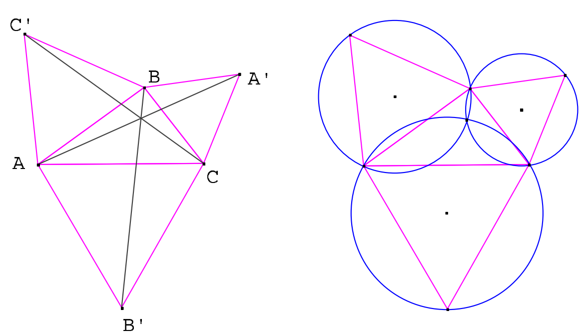
Ora consideriamo il medesimo problema nel caso di tre punti A, B, C. Ci chiediamo quando risulta minima la somma di segmenti $PA + PB + PC$.

(11) Supponiamo che i punti A, B, C siano allineati, con B compreso tra gli altri due. Per quale scelta di P la somma risulta minima?

Se invece supponiamo che i punti A, B, C siano vertici di un triangolo, la ricerca di un punto P che renda minima la somma $PA + PB + PC$ è un problema di non immediata soluzione (detto problema di Steiner). Per affrontarlo occorre esplorare alcune importanti configurazioni.

(12) Ora tracciamo la configurazione che vorremmo studiare più in dettaglio. Preso un triangolo ABC (meglio se è acutangolo...), costruiamo sopra i suoi lati, esternamente, i triangoli equilateri ABC', BCA', CAB'. Tracciamo i segmenti AA', BB', CC'.
Che cosa salta agli occhi?
Dimostriamo per prima cosa che $AA' = BB' = CC'$.

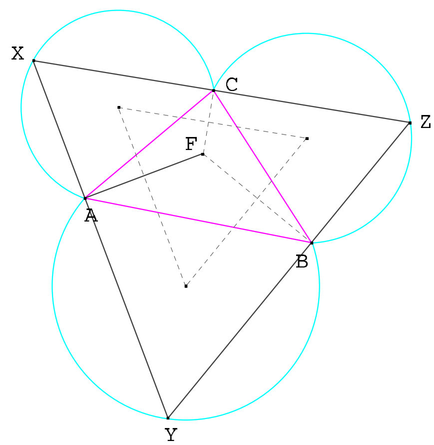
(13) Ora inscriviamo i tre triangoli equilateri in tre circonferenze α, β, γ rispettivamente.
Che cosa osserviamo? Lo sappiamo dimostrare?



(14) Dopo aver tracciato α, β, γ, si chiarisce la risposta alla domanda n°4. In che modo?

(15) Ora possiamo dimostrare anche che i segmenti AA', BB', CC' concorrono in un punto. Di quale punto si tratta?
Indicheremo questo punto con la lettera F. Esso è chiamato *punto di Fermat* del triangolo ABC e gode di notevoli propietà, una delle quali l'abbiamo appena vista.

(16) Dopo aver tracciato il segmento FA, costruiamo il triangolo equilatero XYZ, circoscritto ad ABC, avente un lato perpendicolare a FA.
Come risultano gli altri lati di questo triangolo equilatero, rispetto ai segmenti FB e FC?



(17) Dimostrare che il punto F è quello che risolve il problema di Steiner.

(18) Dimostrare che il triangolo XYZ, fra i triangoli equilateri circoscritti ad ABC, è quello con i lati di lunghezza massima.

(19) Il teorema di Napoleone. Dedurre da ciò che i 3 lati di XYZ debbono essere paralleli ai segmenti che congiungono i centri di α, β, γ. Concludere quindi che il triangolo avente per vertici i centri X', Y', Z' delle circonferenze α, β, γ è equilatero.

(20) Dimostrare che il triangolo di Napoleone $X'Y'Z'$ e il triangolo XYZ sono *omotetici*. Qual è il centro dell'omotetia e quale il rapporto?

Risolto in tutti i casi il problema di rendere minima la somma delle distanze tra un punto variabile P e 3 punti fissati A, B, C, possiamo chiederci cosa accade considerando più di 3 punti fissati.

(21) Siano A_1, A_2,... ,A_n dei punti allineati. Quali scelte di P rendono minima la somma $PA_1 + PA_2 + ... + PA_n$?

Se invece prendiamo n punti qualsiasi non allineati, il problema diventa più complicato. Ma se, invece di un singolo punto, cerchiamo un cammino che metta in collegamento tutti gli n punti, si conservano alcune delle caratteristiche del punto di Fermat.