CONVESSITÀ NELLA GEOMETRIA DEL TAXI DI MINKOWSKI

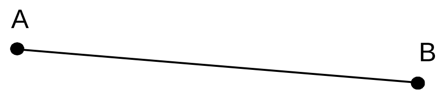
ELISABETTA AVIZZANO
NICOLETTA CAPOTORTO
CHIARA CEROCCHI
GIORGIO CICCARELLA
IVAN COLAVITA
EMANUELE DI CARO
SERENA NUNZIATA
AMANDA PISELLI
ANDREA PIEPOLI

ABSTRACT. In questo articolo si è affrontato il problema di estendere la nozione di convessità in un ambiente non euclideo, proponendo alcune possibili soluzioni nel contesto della geometria del taxi di Minkowski (Taxicab geometry).

1.INTRODUZIONE

La nozione di convessità classica è strettamente legata a quella di segmento euclideo e alla sua esistenza e unicità:

dati due punti A e B, esiste un unico segmento di estremi A e B



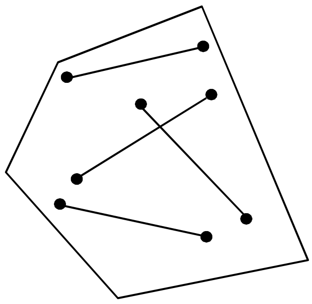
Questa proprietà è conseguenza degli assiomi di esistenza e unicità della retta per due punti (e degli assiomi di ordinamento).

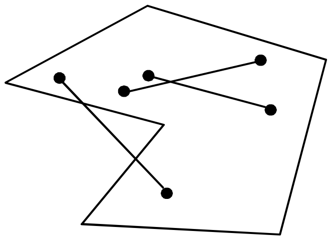
Nelle geometrie (non euclidee) che non accettano l'assioma di unicità, come accade nella "geometria del taxi" di Minkowski, tra due punti, come vedremo, possono esistere più segmenti.
Questo fatto permette differenti e "sfumate" nozioni di convessità.

In questo articolo definiremo appunto per la geometria di Minkowski varie forme di convessità per poi studiare in che rapporto siano tra di loro e con la nozione di convessità classica.

2. CONVESSITÀ CLASSICA

Una figura (un insieme di punti delimita da una curva semplice chiusa) si definisce convessa se presi comunque due suoi punti il segmento che li congiunge è contenuto nella figura. Una figura non convessa si dice concava.





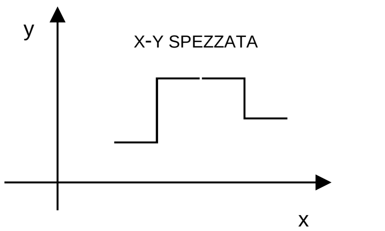
3. LA GEOMETRIA DEL TAXI

La geometria del taxi è una geometria non euclidea proposta dal matematico russo Hermann Minkowski (1864-1909). In inglese viene definita Taxicab geometry. Il suo nome è dovuto al fatto che ben si adatta a descrivere i percorsi che i taxi compiono nei loro spostamenti in città.

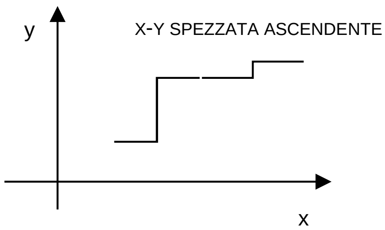
Uno dei modi di introdurla è il seguente.

Consideriamo un piano cartesiano x-y.

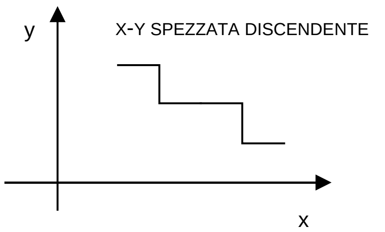
Chiamiamo x-y spezzata una spezzata formata da segmenti alternativamente paralleli all'asse x (x-segmenti) e all'asse y (y-segmenti)



Chiamiamo x-y spezzata ascendente una x-y spezzata tale che al crescere dell'ascissa dei suoi punti l'ordinata non diminuisca mai.



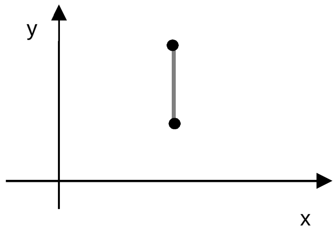
Chiamiamo x-y spezzata discendente una x-y spezzata tale che al crescere dell'ascissa dei suoi punti l'ordinata non cresca mai.



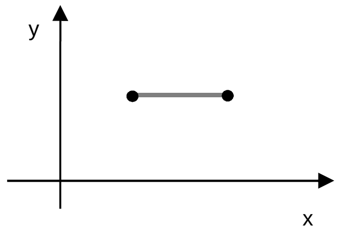
La geometria del taxi è la geometria che ha come *punti* i punti del piano e come *segmenti* le x-y spezzate ascendenti e le x-y spezzate discendenti (chiameremo i segmenti della geometria del taxi: "taxi-segmenti")

4. PROPRIETÀ

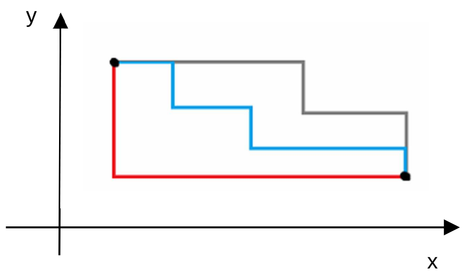
- Due punti che appartengono ad una stessa retta verticale sono estremi di <u>un solo</u> taxi-segmento



- Due punti che appartengono ad una stessa retta orizzontale sono estremi di <u>un solo</u> taxi-segmento



- Due punti che appartengono ad una stessa retta obliqua sono estremi di <u>più</u> taxi-segmenti

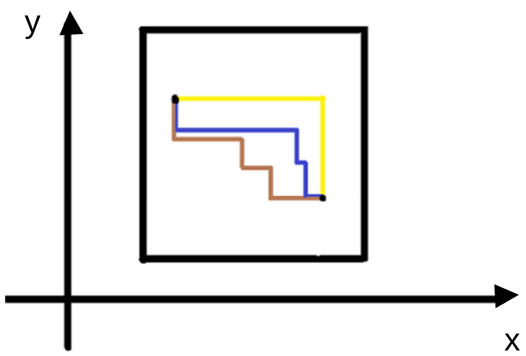


5. TAXI- CONVESSITÀ

Definiamo ora diverse nozioni di convessità nella geometria del taxi

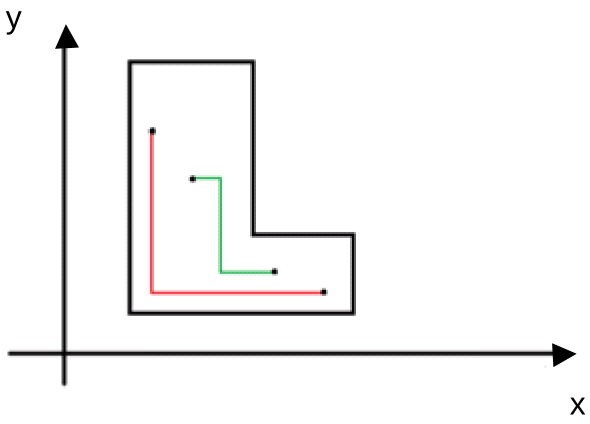
<u>CONVESSITA' FORTE</u>

Una figura $\mathfrak{F}$ si definisce <u>convessa fortemente</u> quando presi comunque due punti A e B di $\mathfrak{F}$ <u>tutti</u> i taxi-segmenti di estremi A e B sono contenuti nella figura.



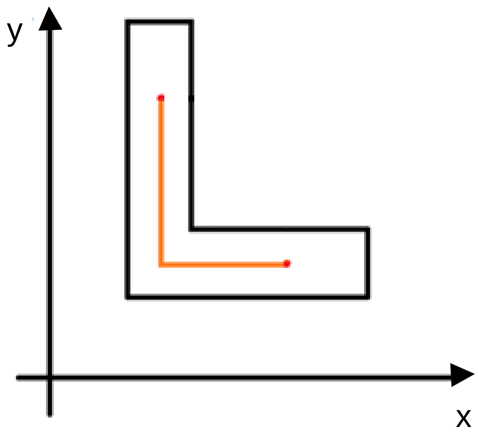
CONVESSITA' DEBOLE

Una figura $\mathcal{F}$ si definisce debolmente convessa quando presi comunque due punti A e B di $\mathcal{F}$ esiste almeno un taxi-segmento di estremi A e B contenuto nella figura..



ORTO-CONVESSITA'

Una figura $\mathcal{F}$ si definisce orto-convessa quando presi comunque due punti A e B di $\mathcal{F}$ esiste almeno un taxi-segmento di estremi A e B, formato da 1 o 2 segmenti, contenuto nella figura (chiameremo tali segmenti "orto-segmenti").



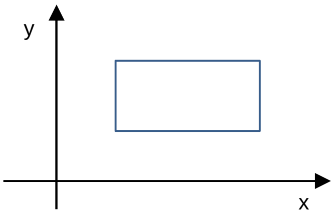
6. RELAZIONI TRA LE DIVERSE NOZIONI DI CONVESSITÀ

Studiamo ora le relazioni che valgono tra le diverse nozioni di convessità definite, e come esse si relazionano con la nozione "classica" di convessità.

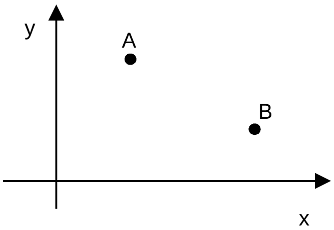
CONVESSITÀ FORTE V/S CONVESSITÀ

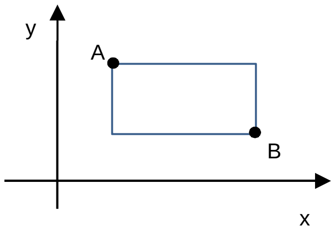
Per trovare la relazione tra convessità "classica" e convessità forte, occorre prima caratterizzare le figure fortemente convesse. Definiamo alcuni elementi che ci serviranno per la caratterizzazione.

x – y rettangoli: si definiscono x-y rettangoli, quei rettangoli che hanno i lati paralleli alle assi x e y.

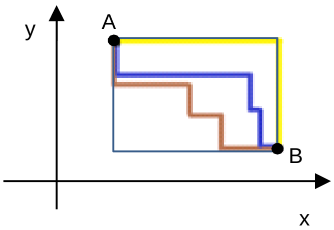


rettangolo di ingombro di due punti A e B: Si definisce rettangolo d'ingombro di due punti A e B, il più piccolo x-y rettangolo che contiene A e B.

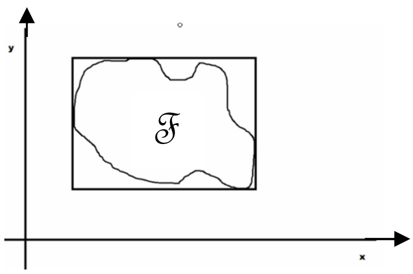




(osserviamo che ogni taxi-segmento con estremi A e B è contenuto nel rettangolo di ingombro di A e B, inoltre se A e B appartengono ad una stessa retta orizzontale o verticale, il rettangolo di ingombro si riduce ad un x-segmento o ad un y-segmento).



rettangolo di ingombro di una figura $\mathscr{F}$: Si definisce rettangolo d'ingombro di una figura $\mathscr{F}$, il più piccolo x-y rettangolo che include $\mathscr{F}$.

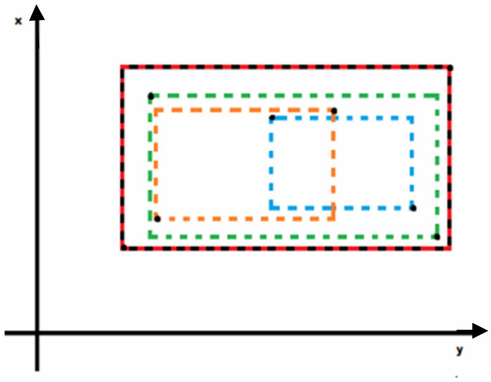


TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DELLE FIGURE FORTEMENTE CONVESSE

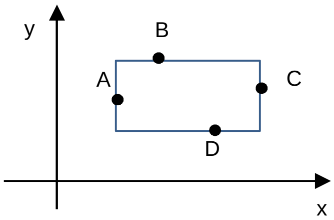
Una figura è fortemente convessa se e soltanto se è un x-y rettangolo.

Dimostrazione

- **Se una figura è un x-y rettangolo allora è fortemente convesso**. Infatti presi comunque due punti A e B in un x-y rettangolo, il rettangolo di ingombro sarà contenuto nell'x-y rettangolo, ma allora tutti i taxi-segmenti di estremi A e B saranno contenuti nell'x-y rettangolo.

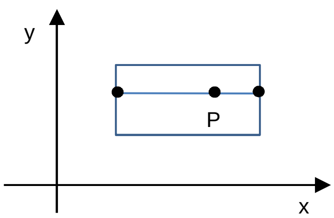


- **Se una figura è fortemente convessa allora è un x-y rettangolo**. Disegniamo una figura $\mathcal{F}$ e prendiamo il rettangolo di ingombro.
  I quattro lati contengono 4 punti della figura; A, B, C e D:



Essendo $\mathcal{F}$ fortemente convessa, si ha che i taxi-segmenti che si sviluppano sul bordo dell' x-y-rettangolo e che collegano i punti A,B,C e D appartengono a $\mathcal{F}$**.** Ne segue che tutto il bordo del rettangolo appartiene a $\mathcal{F}$**.**

Osserviamo ora che per ogni punto interno al rettangolo passa un x-segmento (o un y-segmento) con gli estremi sul bordo del rettangolo (che per quanto appena detto è contenuto in $\mathcal{F}$),



e questo segmento (compreso il punto P) deve appartenere a $\mathcal{F}$
Ne segue che la figura $\mathcal{F}$ coincide con il suo rettangolo di ingombro che è un x-y-rettangolo.

Possiamo ora provare il seguente teorema.

TEOREMA (Convessità forte v/s Convessità)

Se una figura $\mathfrak{F}$ è fortemente convessa allora è convessa.

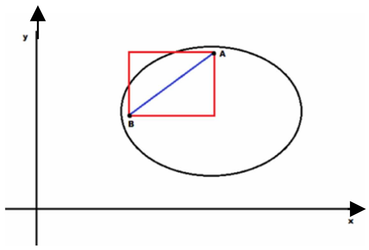
Dimostrazione:

$\mathfrak{F}$ è fortemente convessa $\Rightarrow$ $\mathfrak{F}$ è un x-y rettangolo $\Rightarrow$ $\mathfrak{F}$ è convessa (il rettangolo è convesso)

Non vale però il teorema inverso.

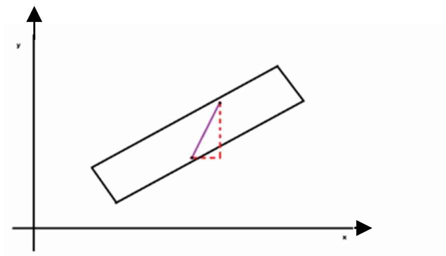
CONVESSITÀ V/S CONVESSITÀ FORTE

Se una figura $\mathfrak{F}$ è convessa non è detto che sia fortemente convessa. Basta prendere una figura convessa che non sia un x-y rettangolo (ad esempio un'ellisse).



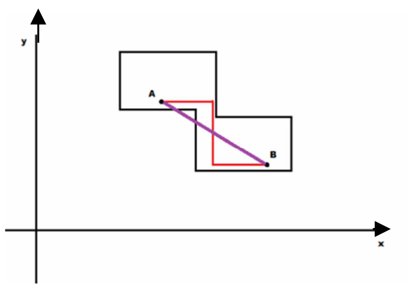
CONVESSITÀ V/S ORTO-CONVESSITÀ

Una figura convessa non sempre è orto-convessa.
Esempio:



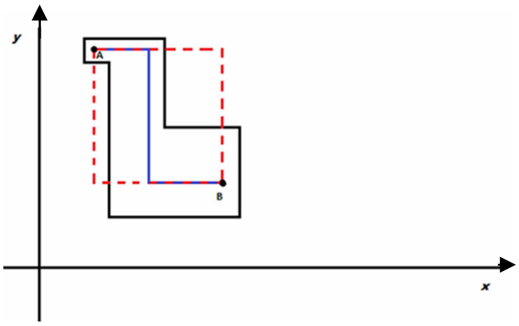
CONVESSITÀ DEBOLE V/S CONVESSITÀ

Una figura debolmente convessa non sempre è convessa.
Esempio:



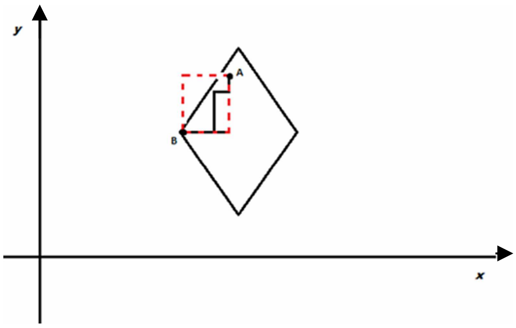
CONVESSITÀ DEBOLE V/S ORTO-CONVESSITÀ

Una figura debolmente convessa non sempre è orto-convessa.
Esempio:



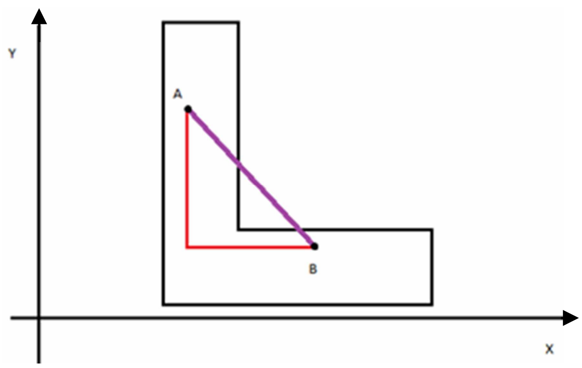
CONVESSITÀ DEBOLE V/S CONVESSITÀ FORTE

Una figura debolmente convessa non sempre è fortemente convessa.
Esempio:



ORTO-CONVESSITÀ V/S CONVESSITÀ FORTE

Una figura orto-convessa non sempre è fortemente convessa.
Esempio:



ORTO-CONVESSITÀ V/S CONVESSITÀ DEBOLE

TEOREMA (Orto-Convessità v/s Convessità debole)

Se una figura $\mathscr{F}$ è orto-convessa allora è debolmente convessa.

<u>Dimostrazione</u>

$\mathscr{F}$ è orto-convessa $\Rightarrow$ per ogni coppia di punti A e B della figura F esiste un orto-segmento di estremi A e B contenuto in $\mathscr{F}$ $\Rightarrow$ per ogni coppia di punti A e B della figura $\mathscr{F}$ esiste un taxi-segmento di estremi A e B contenuto in $\mathscr{F}$ $\Rightarrow$ $\mathscr{F}$ è convessa debolmente

CONVESSITÀ FORTE V/S CONVESSITÀ DEBOLE

TEOREMA (Convessità forte v/s Convessità debole)

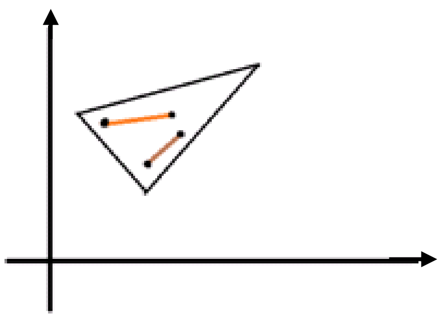
Se una figura $\mathscr{F}$ è fortemente convessa allora è debolmente convessa

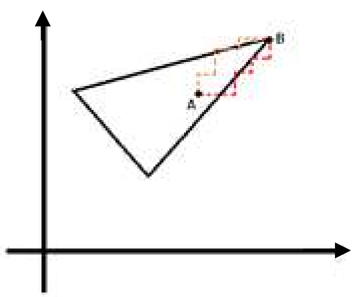
<u>Dimostrazione</u>

Se $\mathscr{F}$ è fortemente convessa allora, per ogni coppia di punti A e B, ogni taxi-segmento di estremi A e B è contenuto in $\mathscr{F}$, e siccome presi due punti A e B esistono sempre taxi-segmenti di con estremi A e B si ha che $\mathscr{F}$ è debolmente convessa

CONVESSITÀ V/S CONVESSITÀ DEBOLE

Una figura convessa non sempre è debolmente convessa.
Esempio:



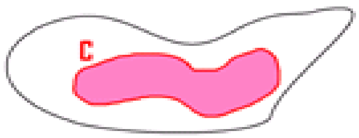


Proviamo ora a caratterizzare le figure convesse che sono debolmente convesse.

Abbiamo però bisogno di alcuni prerequisiti.

ALCUNE PROPRIETÀ TOPOLOGICHE

(1) Se una figura $\mathfrak{F}$ contiene una linea $\mathcal{C}$ chiusa (semplice) allora $\mathfrak{F}$ contiene anche la figura racchiusa da $\mathcal{C}$.



(2) Ogni punto interno di una figura è estremo di infiniti segmenti contenuti in $\mathfrak{F}$.

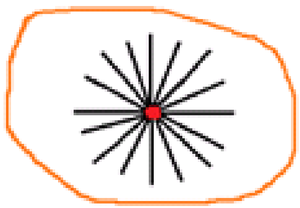
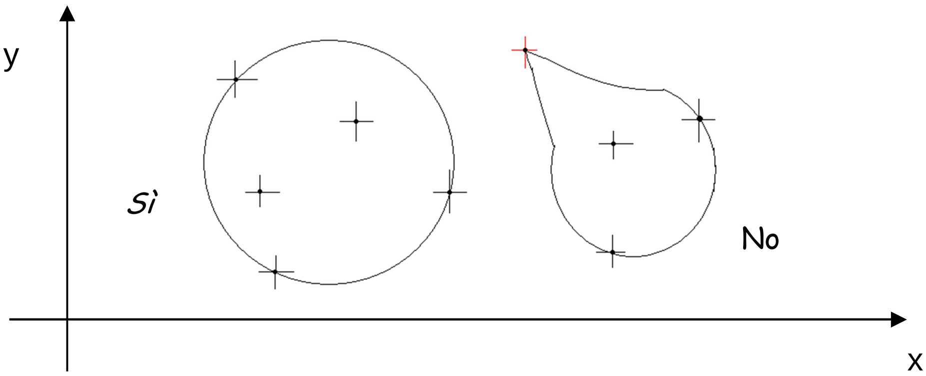


FIGURE CRUCIO–COMPATIBILI

Una figura $\mathfrak{F}$ si definisce crucio-compatibile se ogni suo punto A è estremo di un x-segmento o di un y-segmento x contenuto in $\mathfrak{F}$.

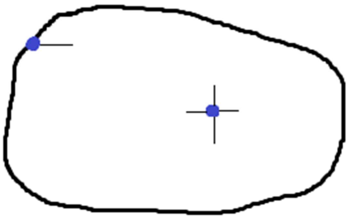


PROPRIETÀ

Ogni punto di una figura $\mathfrak{F}$ crucio-compatibile è estremo di un x o y segmento contenuto nella figura.

Dimostrazione

Segue banalmente dalla seconda proprietà topologica (2) e dalla definizione di figura crucio compatibile.



CARATTERIZZAZIONE DELLE FIGURE CONVESSE DEBOLMENTE CONVESSE

TEOREMA 1

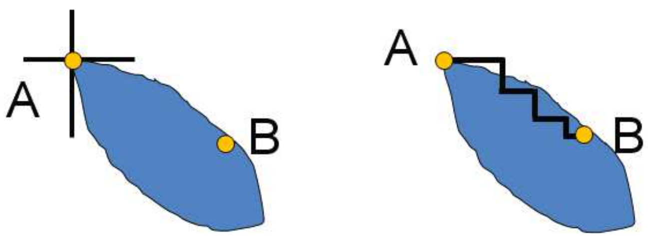
Data una figura $\mathfrak{F}$ convessa:

Se $\mathfrak{F}$ è debolmente convessa allora è crucio-compatibile.

Dimostrazione

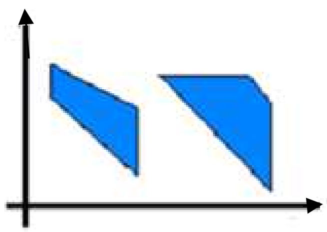
Se $\mathfrak{F}$ debolmente convessa allora è crucio-compatibile (per assurdo).

Supponiamo che esista almeno un punto A che non sia estremo di un x o y segmento contenuto in $\mathfrak{F}$. Considerato un altro punto B di $\mathfrak{F}$ non è allora possibile far partire da A un taxi-segmento che finisca in B tutto contenuto in $\mathfrak{F}$, quindi $\mathfrak{F}$ non è debolmente convessa contro l'ipotesi.



X- Y-QUADRILATERI

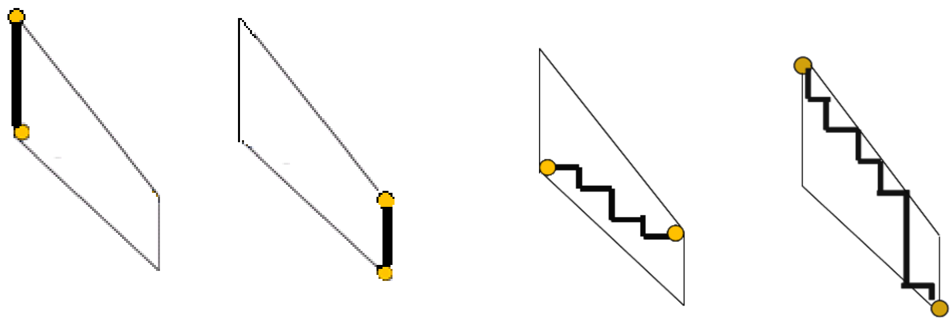
Sono i quadrilateri che hanno due lati non consecutivi paralleli all'asse x o y.



PROPRIETÀ

Presi comunque due vertici di un x-y quadrilatero, questi sono estremi di un taxi-segmento contenuto nel x-y quadrilatero.

Esempio



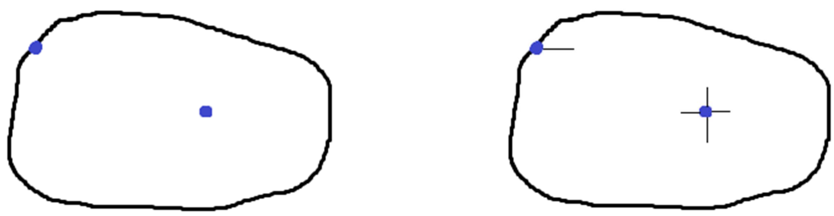
TEOREMA 2

Data una figura $\mathfrak{F}$ convessa:

Se $\mathfrak{F}$ è crucio-compatibile allora è debolmente convessa.

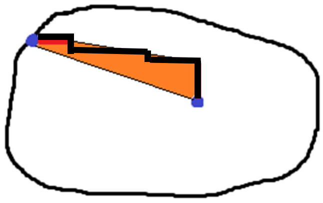
<u>Dimostrazione</u>

Consideriamo una generica coppia di punti di $\mathfrak{F}$. Per la proprietà delle figure crucio-compatibili i due punti sono estremi di x o y segmenti contenuti in $\mathfrak{F}$.



Per l’ipotesi di convessità (classica) è possibile trovare altri due segmenti contenuti nella figura che con quelli di estremi A e B formano un x-y quadrilatero.
Per la proprietà topologica (1) il x-y quadrilatero ottenuto è contenuto in $\mathfrak{F}$.

Infine per la proprietà degli x-y quadrilateri i due punti di partenza sono collegabili con un taxi-segmento contenuto nel x-y quadrilatero a sua volta contenuto in $\mathfrak{F}$. Ne segue che $\mathfrak{F}$ è debolmente convesso.



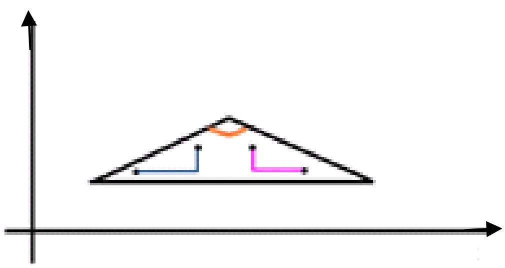
Tramite i teoremi 1 e 2 abbiamo quindi stabilito che una figura convessa è debolmente convessa sse è crucio-compatibile.

7. Conclusioni

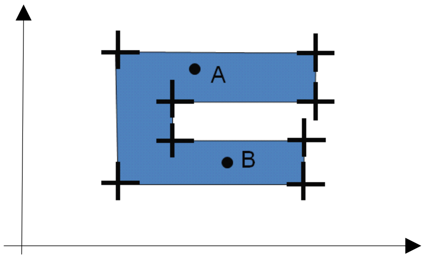
Nel nostro percorso abbiamo constatato come nelle geometrie nelle quali si perde “l’unicità del segmento per due punti” nasce un panorama vario di possibili nozioni di convessità che si rapportano uno all’altra in diversi modi.

Rimangono aperti i seguenti problemi:

- Caratterizzare tutti i poligoni convessi debolmente convessi, che per quanto stabilito consiste nell’individuare tutti i poligoni convessi crucio-compatibili. Nel caso dei triangoli si può ad esempio provare facilmente che quelli ottusangoli con il lato maggiore parallelo all’asse x (o all’asse y), sono crucio-compatibili e quindi debolmente convessi



- Caratterizzare tutti le figure (convesse e non convesse) debolmente convesse
  Osserviamo infatti che nel nostro teorema di caratterizzazione delle figure debolmente convesse, l'ipotesi di convessità era essenziale come è testimoniato dal seguente esempio



di figura crucicompatibile concava e non debolmente convessa (non esistono taxi-segmenti di estremi A e B contenuti nella figura):

8. Bibliografia e sitografia

- Andreana Zucco,   *Intersezione di insiemi convessi: il Teorema di Helly* , in Matematicamente.it • numero 16 – dicembre 2011

- http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Set_07/GeometriaTaxi.pdf

- www.mat.uab.cat/matmat/PDFv2007/v2007n04.pdf