24 febbraio 2010
Liceo Classico “Orazio” -- Roma

PROGETTO LAUREE SCIENTIFICHE

UNIVERSITA’ DI TOR VERGATA

CRF -- CENTRO RICERCA E FORMAZIONE INSEGNANTI

RICERCA MATEMATICA ATTIVA

- “Ricerca”: la matematica ha una storia, fatta di problemi risolti o da risolvere.

- La risoluzione di un problema ne apre altri.

  Nella scuola giunge poco della storia della matematica. All’università non va meglio.

Immagine abituale della matematica:

- legata al calcolo;
- autoreferenziale;
- sapere statico, privo di genesi e di reale evoluzione, povero di legami con altri saperi;
- un sapere concluso.

Ne deriva:

- diffusa estraneità alla cultura matematica e scientifica;
- subalternità culturale (usiamo telefonini e videogiochi, vediamo film con effetti speciali… ma chi li fa e dove nascono?);
- inattingibilità del sapere matematico e scientifico (delegato ad esperti “stregoni”).

Alcuni esempi.

La corruzione della parola “teorema”.

G.B. Vico (e con lui Benedetto Croce): la matematica come “studio proprio degli ingegni minuti”, inadatta alle menti “già rese universali dalla Metafisica“.

Eppure…

- Molti matematici sono stati importanti filosofi (Talete, Pitagora, Democrito, Galilei, Cartesio, Leibniz, Russell, Husserl, Poincaré,…)
- La matematica ha avuto (ha) un ruolo importante nella riflessione filosofica (Platone, Kant, Wittgenstein, Popper, Godel,…)

E peraltro:

- La matematica è quasi onnipresente nella realtà contemporanea:
- discipline scientifiche e tecniche (fisica, chimica, ingegneria)
- statistica, finanza, informatica, medicina e diagnostica, crittografia, trasmissione e sicurezza dei dati, elaborazione dei segnali (cd, dvd, mp3, etc.)

Nella civiltà greca:

- Molte delle pagine più alte furono proprio nella matematica (Euclide, Apollonio, Archimede, …).

- E’ falso che lo spirito greco fosse contemplativo e inadatto alle applicazioni della scienza (vedi Lucio Russo).

- I romani non seppero accogliere l’eredità della scienza greca. Anzi la dispersero.

I progressi matematici dei romani furono nulli. Perché?

- Pretesero di acquisirne taluni risultati e applicazioni pratiche senza coltivarne o ricrearne la scuola. La quale anzi venne annientata.

- Pretesero di utilizzare il sapere scientifico greco in chiave strumentale. Senza ricostruirlo.

- Il risultato fu la progressiva distruzione e la perdita di quel sapere. Un lungo oblio (un esempio lampante è la prospettiva).

Rinascimento.

- La civiltà araba.
- La caduta di Costantinopoli (1453) e i manoscritti bizantini.
- Gli europei ritrovano Archimede.
- Una faticosa riappropriazione (Commandino, Maurolico, Galilei, Torricelli, Cavalieri, Fermat, …).

- Nei primi decenni del 1500 la matematica conosce i suoi primi progressi importanti dai tempi dei greci!

- Fu in Italia. I protagonisti si chiamarono Scipione Dal Ferro, Nicolò Tartaglia, Girolamo Cardano, Ludovico Ferrari, Rafael Bombelli.

“Ricerca”

- La matematica contiene molti problemi irrisolti. Anche semplici da formulare. I più semplici da formulare e ancora irrisolti tendono ovviamente a essere i più difficili.

- Molti sono gli esempi famosi.

Quanti sono i numeri primi gemelli?

Esempi:

3,5

5,7

11,13

17,19

29,31

41,43

59,61

71,73

101,103

107,109

…

La congettura di Goldbach.

- Ogni numero pari è somma di due numeri primi.

- 6=3+3
- 10=7+3
- 18=11+7
- 30=13+17
- 40=29+11
- 76=73+3

… Sarà sempre vero?

Quanti numeri n^2+1 sono primi?

- 2^2+1 è primo
- 4^2+1 è primo
- 6^2+1 è primo
- 8^2+1 non è primo
- 10^2+1 è primo
- 12^2+1 non è primo
- 14^2+1 è primo
- ….

Quanti ce ne sono primi?

- Per quanti primi *p* il numero *2p+1* è primo?

- Accade per *p=2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53*
- Non accade per *p=7, 13, 17, 11, 19, 31, 37, 43*

Rispondere a queste o altre domande sarebbe non solo interessante di per sé. Ma perché dovrebbe far emergere legami che ancora non si sono compresi.

Ma prima ancora….

Quanti sono i numeri primi?

- Euclide, libro IX, proposizione 20

"I numeri primi sono più di qualsiasi assegnata moltitudine di numeri primi"

Infatti: se a,b,c,d sono numeri primi, allora nessuno di essi divide $abcd+1$.

→ Deve esistere un quinto numero primo e, il quale divida $abcd+1$.

- E quanti numeri primi finiscono per 1 o per 3 o per 7 o per 9?

- Tra un numero e il suo doppio ci sarà sempre almeno un primo?

- Quanto può essere lunga una progressione aritmetica formata da numeri primi (per esempio: 7, 37, 67, 97, 127, 157)?

- Un gioco: prendiamo un numero *n*. Se *n* è pari lo dimezziamo, se è dispari passiamo a $n'=3n+1$, e continuiamo da n'. Si genera una successione.
- Es.: 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1 ...
- Come vanno le cose in generale, partendo da altri *n*? Si trova prima o poi sempre 1?

L’aritmetica è una sorgente inesauribile di problemi semplici da formulare e difficili da affrontare.

Anche in anni recenti si sono dimostrati teoremi importanti di carattere aritmetico.

Sono costati molta fatica, sono giunti solo grazie alla comprensione di relazioni molto profonde tra diversi oggetti matematici (anche in apparenza assai lontani).

“matematica”

- La grande conquista dei greci è il metodo dimostrativo.

- La matematica non consiste semplicemente nel “descrivere” o anche “osservare” una serie di “verità”.

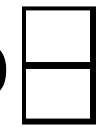
- L’attività matematica è la dimostrazione di proposizioni a partire da precise assunzioni.

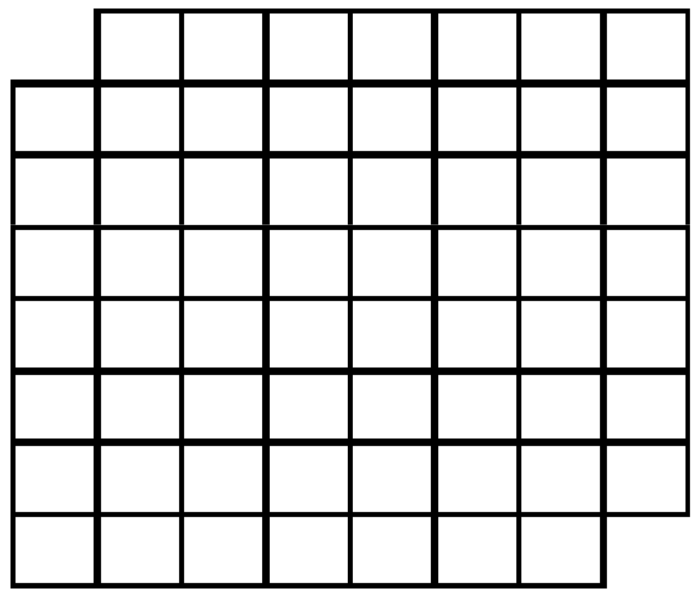
L’organizzazione dell’esposizione matematica: i sistemi assiomatici.

- Il problema del regresso all’infinito.
- Oggetti primitivi e postulati.
- Teoremi.
- Dimostrazione e “verità”.
- Davvero si “parte” dai postulati?

Valori della dimostrazione.

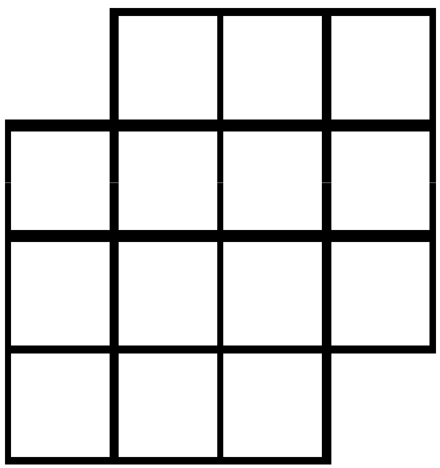
- Un valore conoscitivo. Dirimere questioni, rispondere a domane.
- Un valore esplicativo. Spiegare *perché*.
- Un valore relazionale. Stabilire connessioni tra i fatti o manifestazioni.
- Un valore etico. Autonomia del pensiero.

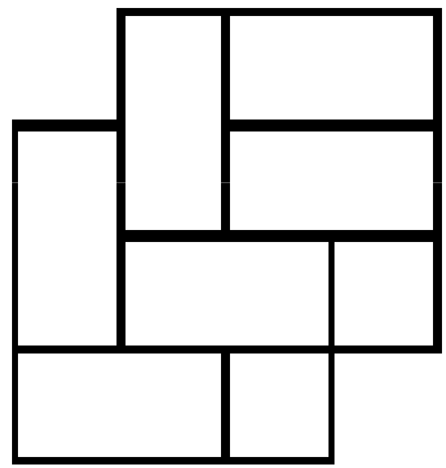
Possiamo ricoprire questa tabella con tessere di questo tipo ?



Non è così facile rispondere…

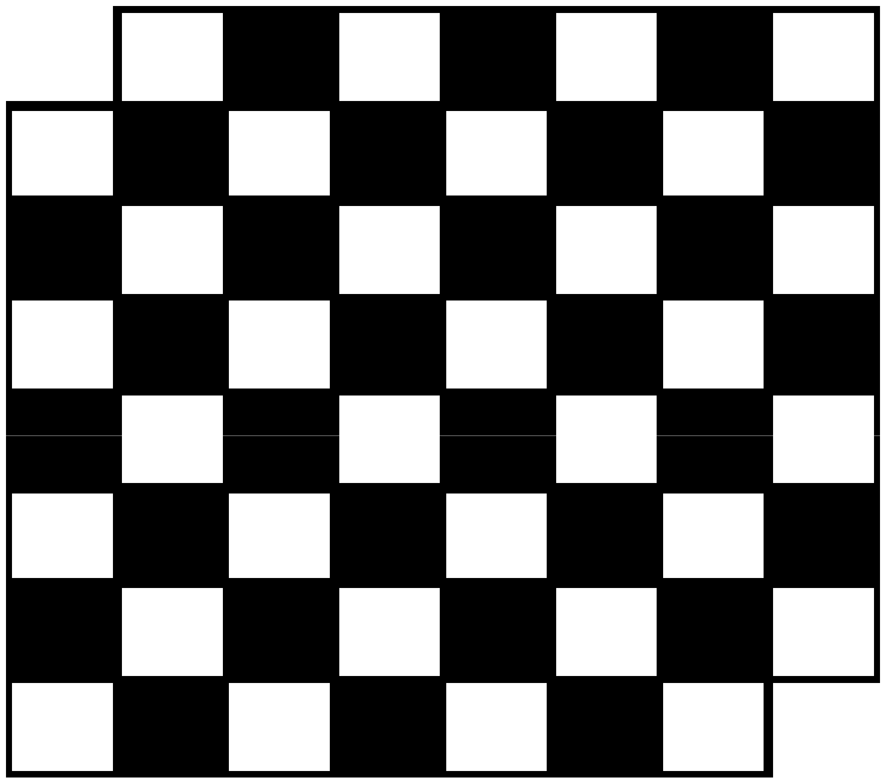
- Proviamo con una tabella più piccola.





Non si può!

Ma se pensiamo a una scacchiera…



Le cose si chiariscono!

- La dimostrazione conduce sempre alla risoluzione di problemi?

- Naturalmente non sempre, ma...
- Ma esplorare i nessi deduttivi ha di per sé un valore, anche quando si finisce da un’altra parte.
- E’ anche così che impariamo a conoscere una città.

- Una buona dimostrazione è fruttuosa. Porta più frutti di quelli che si cercavano.

- Non si limita a risolvere un problema (talvolta non ci riesce o ci riesce solo in parte), ma:
  - ci spiega i motivi sottostanti;
  - permette di formulare o risolvere altri problemi;
  - permette di costruire nuova matematica.

Ci sono molti esempi. Se risolviamo il problema dei tasselli in modo intelligente e non con forza bruta, poi sappiamo affrontare molti altri problemi simili.

“Attiva”:
brani da un celebre scritto di Kant (1784)

<<Imputabile a se stessi è una minorità la cui causa non dipenda da difetto di intelligenza, ma dalla mancanza di decisione e del coraggio di servirsi del proprio intelletto senza esser guidati da un altro. **Sapere aude!**

Abbi il coraggio di servirti della tua propria intelligenza! La pigrizia e la viltà sono le cause per cui tanta parte degli uomini rimangono volentieri minorenni per l’intera vita. **È tanto comodo essere minorenni!**

È difficile per ogni uomo districarsi dalla minorità che per lui è diventata pressoché una seconda natura. E giunto perfino ad amarla, e attualmente è davvero incapace di servirsi del suo proprio intelletto, non essendogli mai stato consentito di metterlo alla prova.

Regole e formule, questi strumenti meccanici di un uso razionale o piuttosto di un abuso delle sue disposizioni naturali, sono **i ceppi di un'eterna minorità.**

Anche chi da essi riuscisse a sciogliersi, non farebbe che un salto malsicuro sia pure sopra i più angusti fossati, poiché non sarebbe allenato a siffatti liberi movimenti. >>