COEFFICIENTI TRINOMIALI

A.S. 2010 - 2011

SIMONE CASTELLAN (4C)
FEDERICO MORODEI (4C)
MARTINO WONG (4C)

ABSTRACT

In questo articolo vengono studiate alcune proprietà combinatoriche che nascono dallo sviluppo della potenza ennesima di un trinomio.

1. INTRODUZIONE

Abbiamo deciso di occuparci dello sviluppo dello sviluppo della potenza ennesima di un trinomio, cercando di trovare una regola generale, similmente allo sviluppo della potenza ennesima di un binomio.

2. PREREQUISITI

Per risolvere il problema abbiamo bisogno di alcuni prerequisiti.

2.1 FATTORIALE

<u>Definizione</u>

Dato un numero naturale n si dice fattoriale di n e si indica con n! il numero:

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ se $n>0$

mentre si pone

$0!=1$

<u>Esempio</u>: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

2. COEFFICIENTI BINOMIALI

Dati due numeri naturali n, k con $n \geq k$, definiamo coefficiente binomiale la scrittura

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Esempio:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{12} = 10$$

Proprietà 1

Il coefficiente binomiale ha le seguenti proprietà:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Proprietà 2

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

proprietà che permette di costruire i coefficienti binomiali con il triangolo di Tartaglia

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 + 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

. . . .

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

I coefficienti binomiali devono il loro nome all'importante risultato che segue.

3. SVILUPPO DELLA POTENZA ENNESIMA DI UN BINOMIO (TEOREMA BINOMIALE DI NEWTON)

Se a, b rappresentano due monomi allora per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

4. Coefficienti trinomiali

Sulla scorta dei coefficienti binomiali studiamo ora delle scritture che saranno determinanti nello sviluppo delle potenze di un trinomio così come i coefficienti binomiali lo sono per lo sviluppo delle potenze dei binomi.

<u>Definizione</u>

Dati tre numeri naturali n, k e h, con n≥h+k, definiamo coefficiente trinomiale la scrittura

$$\binom{n}{h,k} = \frac{n!}{h!k!(n-h-k)!}$$

<u>Esempio</u>:

$$\binom{7}{2,3} = \frac{7!}{2!\cdot 3!\cdot (7-2-3)!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{2\cdot 2} = 210$$

Vediamo ora alcune proprietà

<u>Proprietà 1</u>

$$\binom{n}{0,0} = 1$$

Dim.

$$\frac{n!}{0!0!(n-0-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

<u>Proprietà 2</u>

$$\binom{n}{0,n} = 1$$

Dim.

$$\frac{n!}{0!n!(n-n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Proprietà 3

$$\binom{n}{n,0}=1$$

Dim.

$$\frac{n!}{n!0!(n-n-0)!}=\frac{n!}{n!}=1$$

Proprietà 4

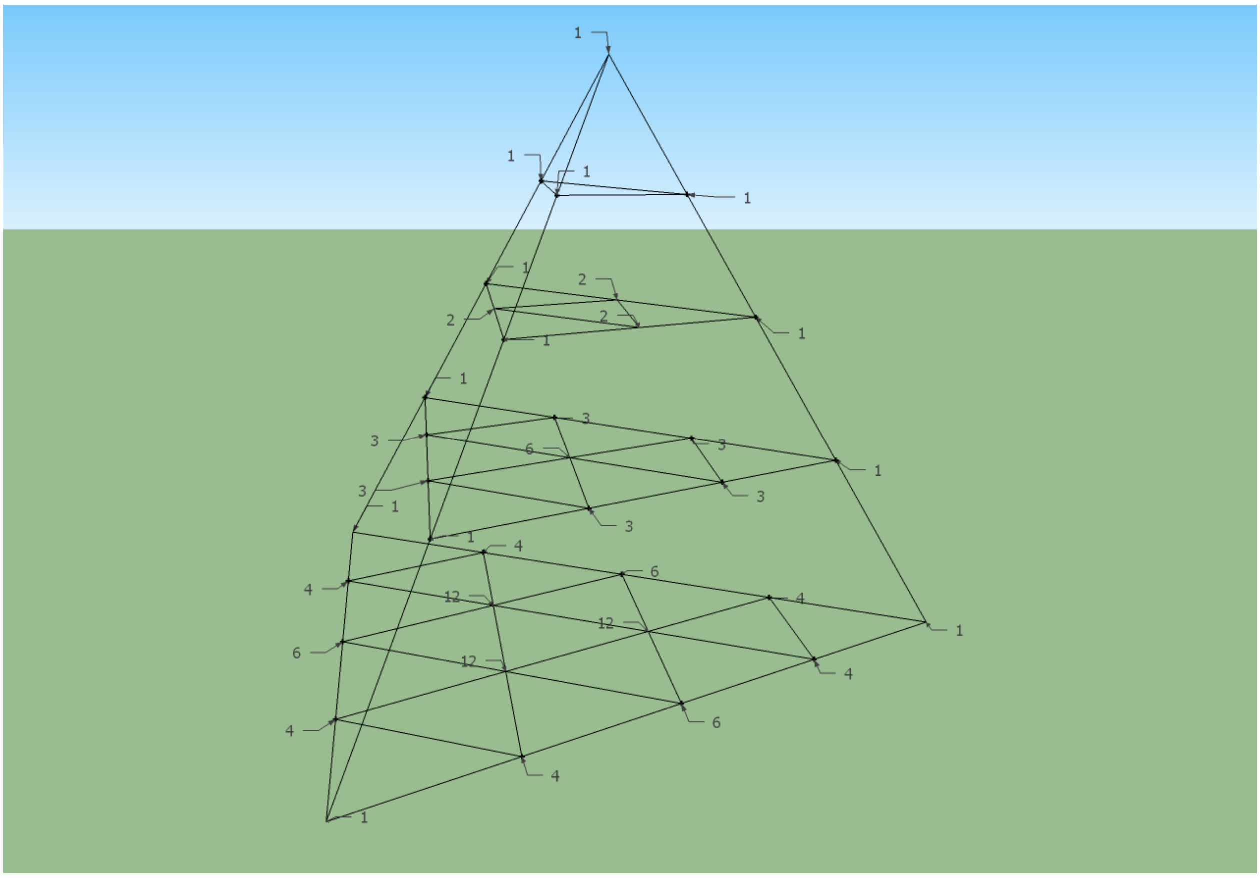
$$\binom{n}{h,k}=\binom{n-1}{h,k}+\binom{n-1}{h-1,k}+\binom{n-1}{h,k-1}$$

Dim.

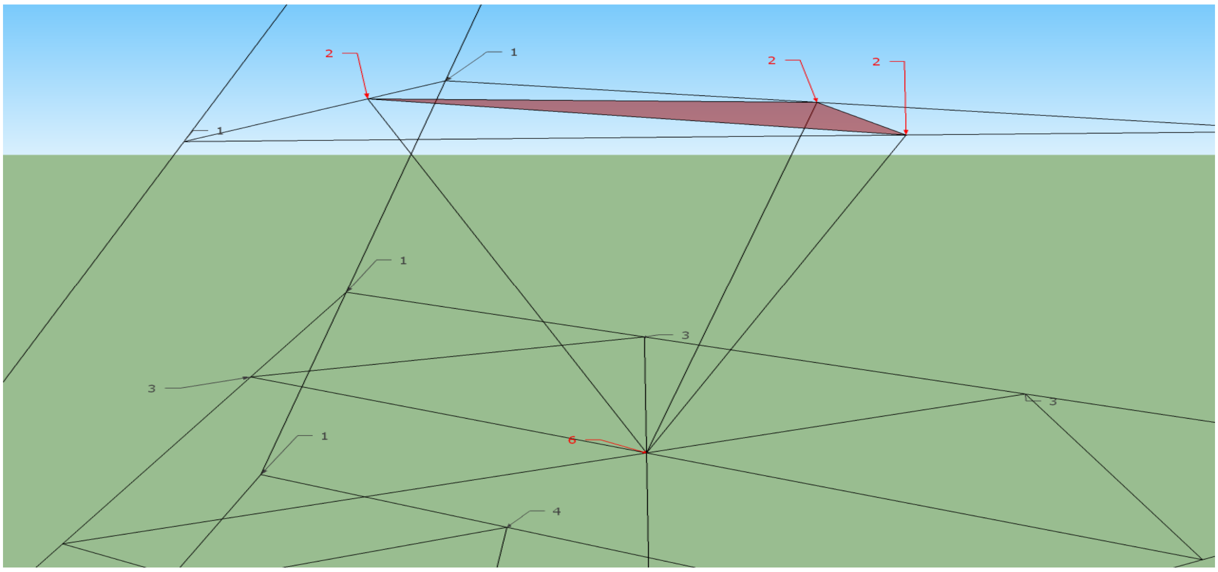
$$\frac{n!}{h!k!(n-h-k)!}=\frac{(n-1)!}{h!k!(n-h-k)!}+\frac{(n-1)!}{(h-1)!k!(n-h-k+1)!}+\frac{(n-1)!}{h!(k-1)!(n-h-k+1)!}$$
$$\Rightarrow\frac{n!}{h!k!(n-h-k)!}=\frac{(n-1)!(n-h-k)(n-1)!h(n-1)!k}{h!k!(n-h-k+1)!}$$
$$\Rightarrow\frac{n!}{h!k!(n-h-k)!}=\frac{(n-1)!(n-h-k+k+h)}{h!k!(n-h-k+1)!}$$
$$\Rightarrow\frac{n!}{h!k!(n-h-k)!}=\frac{(n-1)!n}{h!k!(n-h-k+1)!}$$
$$\Rightarrow\frac{n!}{h!k!(n-h-k)!}=\frac{n!}{h!k!(n-h-k+1)!}$$

4. TETRAEDRO DI TARTAGLIA

Così come dalle proprietà 2 dei coefficienti binomiali si può costruire il triangolo di Tartaglia, dalla proprietà 4 dei coefficienti trinomiali (vedi 4) si ottiene una figura tridimensionale che chiameremo tetraedro si Tartaglia.



in cui ogni numero si ottiene come somma dei tre che si trovano ai vertici di un triangolo immediatamente al di sopra del numero stesso:



5. SVILUPPO DELLA POTENZA ENNESIMA DI UN TRINOMIO (TEOREMA TRINOMIALE)

Siamo pronti ad affrontare lo sviluppo della potenza ennesima di un trinomio. Nella dimostrazione gioca un ruolo chiave le proprietà dei coefficienti trinomiali (vedi 4).

Vogliamo dimostrare che:

$$(a+b+c)^n = \sum_{h=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-h}\binom{n}{h,k}a^{n-h-k}b^k c^h$$

Dimostriamo per induzione :

<u>Base dell'induzione</u>:

$$(a+b+c)^1 = \binom{1}{0,0}a^1 b^0 c^0 + \binom{1}{0,1}a^0 b^1 c^0 + \binom{1}{1,0}a^0 b^0 c^1 \Rightarrow a+b+c = a+b+c$$

<u>Passo induttivo</u>:

Supponendo vero che: $(a+b+c)^n = \sum_{h=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-h}\binom{n}{h,k}a^{n-h-k}b^k c^h$,

dimostriamo che: $(a+b+c)^{n+1} = \sum_{h=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1-h}\binom{n+1}{h,k}a^{n-h-k+1}b^k c^h$

$$(a+b+c)^{n+1} = (a+b+c)(a+b+c)^n$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^{n+1} = (a+b+c)\sum_{h=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-h}\binom{n}{h,k}a^{n-h-k}b^k c^h$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^{n+1} = \sum_{h=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-h}\binom{n}{h,k}a^{n-h-k+1}b^k c^h + \sum_{h=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-h}\binom{n}{h,k}a^{n-h-k}b^{k+1}c^h + \sum_{h=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-h}\binom{n}{h,k}a^{n-h-k}b^k c^{h+1}$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^{n+1} = \sum_{h=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-h}\binom{n}{h,k}a^{n-h-k+1}b^k c^h + \sum_{h=0}^{n}\sum_{k=1}^{n-h+1}\binom{n}{h,k-1}a^{n-h-k+1}b^k c^h + \sum_{h=1}^{n+1}\sum_{k=0}^{n-h+1}\binom{n}{h-1,k}a^{n-h-k+1}b^k c^h$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^{n+1} = \sum_{h=0}^{n}\left[\binom{n}{h,0}a^{n-h+1}c^h + \sum_{h=1}^{n-h}\binom{n}{h,k}a^{n-h-k+1}b^k c^h\right]$$

$$+\sum_{h=0}^{n}\left[\binom{n}{h,n-h}b^{n-h}c^h + \sum_{k=1}^{n-h}\binom{n}{h,k-1}a^{n-h-k+1}b^k c^h\right] + \binom{n}{n,0}c^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=0}^{n-h+1}\binom{n}{h-1,k}a^{n-h-k+1}b^k c^h$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^{n+1} = \sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h,0}a^{n-h+1}c^h + \sum_{h=0}^{n}\sum_{k=1}^{n-h}\binom{n}{h,k}a^{n-h-k+1}b^k c^h + \sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h,n-h}b^{n-h+1}c^h$$

$$+\sum_{h=0}^{n}\sum_{k=1}^{n-h}\binom{n}{h,k-1}a^{n-h-k+1}b^k c^h + \binom{n}{n,0}c^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1,0}a^{n-h+1}c^h + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1,n-h+1}b^{n-h+1}c^h$$

$$+\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-h}\binom{n}{h-1,k}a^{n-h-k+1}b^k c^h$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^{n+1} = \binom{n}{0,0}a^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h,0}a^{n-h+1}c^{h} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{0,k}a^{n-k+1}b^{k} + \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-h}\binom{n}{h,k}a^{n-h-k+1}b^{k}c^{h} + \binom{n}{0,n}b^{n+1}$$

$$+\sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h,n-h}b^{n-h+1}c^{h} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{0,k-1}a^{n-k+1}b^{k} + \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-h}\binom{n}{h,k-1}a^{n-h-k+1}b^{k}c^{h} + \binom{n}{n,0}c^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1,0}a^{n-h+1}c^{h}$$

$$+\sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1,n-h+1}b^{n-h+1}c^{h} + \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-h}\binom{n}{h-1,k}a^{n-h-k+1}b^{k}c^{h}$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^{n+1} = \binom{n}{0,0}a^{n+1} + \binom{n}{0,n}b^{n+1} + \binom{n}{n,0}c^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\left[\binom{n}{h,0}+\binom{n}{h-1,0}\right]a^{n-h+1}c^{h} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{0,k}+\binom{n}{0,k-1}\right]a^{n-k+1}b^{k}$$

$$+\sum_{h=1}^{n}\left[\binom{n}{h,n-h}+\binom{n}{h-1,n-h+1}\right]b^{n-h+1}c^{h} + \sum_{h=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n-h}\binom{n}{h,k-1}+\sum_{k=1}^{n-h}\binom{n}{h,k}+\sum_{k=1}^{n-h}\binom{n}{h-1,k}\right]a^{n-h-k+1}b^{k}c^{h}$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^{n+1} = \binom{n}{0,0}a^{n+1} + \binom{n}{0,n}b^{n+1} + \binom{n}{n,0}c^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\left(\frac{n!}{h!(n-h)!}+\frac{n!}{(n-1)!(n-h+1)!}\right)a^{n-h+1}c^{h}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\right)a^{n-k+1}b^{k}$$

$$+\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{n!}{h!(n-h)!(n-h-n+h)!}+\frac{n!}{(h-1)!(n-h+1)!(n-h+1-n+h-1)!}\right)b^{n-h+1}c^{h}$$

$$+\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-h}\left[\binom{n}{h,k-1}+\binom{n}{h,k}+\binom{n}{h-1,k}\right]a^{n-h-k+1}b^{k}c^{h}$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^{n+1} = \binom{n}{0,0}a^{n+1} + \binom{n}{0,n}b^{n+1} + \binom{n}{n,0}c^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\left(\frac{n!(n-h)+n!h}{h!(n-h+1)!}\right)a^{n-h+1}c^{h} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n!(n-k)+n!k}{k!(n-k+1)!}\right)a^{n-k+1}b^{k}$$

$$+\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{n!(n-h)+n!h}{h!(n-h+1)!}\right)b^{n-h+1}c^{h} + \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-h}\binom{n+1}{h,k}a^{n-h-k+1}b^{k}c^{h}$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^{n+1} = \binom{n}{0,0}a^{n+1} + \binom{n}{0,n}b^{n+1} + \binom{n}{n,0}c^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\left(\frac{n!(n-h+h)}{h!(n-h+1)!}\right)a^{n-h+1}c^{h} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n!(n-k+k)}{k!(n-k+1)!}\right)a^{n-k+1}b^{k}$$

$$+\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{n!(n-h+h)!}{h!(n-h+1)!}\right)b^{n-h+1}c^{h} + \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-h}\binom{n+1}{h,k}a^{n-h-k+1}b^{k}c^{h}$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^{n+1} = \binom{n}{0,0}a^{n+1} + \binom{n}{0,n}b^{n+1} + \binom{n}{n,0}c^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\binom{n+1}{h,0}a^{n-h+1}c^{h} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{0,k}a^{n-k+1}b^{k} + \sum_{h=1}^{n}\binom{n+1}{h,n+1-h}b^{n-h+1}c^{h}$$

$$+\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-h}\binom{n+1}{h,k}a^{n-h-k+1}b^{k}c^{h}$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^{n+1} = \binom{n+1}{0,0}a^{n+1} + \binom{n+1}{0,n+1}b^{n+1} + \binom{n+1}{n+1,0}c^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\binom{n+1}{h,0}a^{n-h+1}c^{h} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{0,k}a^{n-k+1}b^{k}$$

$$+\sum_{h=1}^{n}\binom{n+1}{h,n+1-h}b^{n-h+1}c^{h} + \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-h}\binom{n+1}{h,k}a^{n-h-k+1}b^{k}c^{h}$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^{n+1} = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-h}\binom{n+1}{h,k}a^{n-h-k+1}b^k c^h + \sum_{h=1}^{n+1}\binom{n+1}{h,0}a^{n-h+1}c^h + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{0,k}a^{n-k+1}b^k$$

$$+ \sum_{h=0}^{n}\binom{n+1}{h,n+1-h}b^{n-h+1}c^h + \binom{n+1}{0,0}a^{n+1}$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^{n+1} = \sum_{h=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-h}\binom{n+1}{h,k}a^{n-h-k+1}b^k c^h + \sum_{h=1}^{n+1}\binom{n+1}{h,0}a^{n-h+1}c^h + \sum_{h=0}^{n}\binom{n+1}{h,n+1-h}b^{n-h+1}c^h$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^{n+1} = \sum_{h=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-h+1}\binom{n+1}{h,k}a^{n-h-k+1}b^k c^h + \sum_{h=1}^{n+1}\binom{n+1}{h,0}a^{n-h+1}c^h$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^{n+1} = \sum_{h=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{n-h+1}\binom{n+1}{h,k}a^{n-h-k+1}b^k c^h$$

C.V.D.

6. CONCLUSIONE

Nel passare dallo sviluppo della potenza ennesima di un trinomio a quello di un quadrinomio, bisognerebbe utilizzare dei “coefficienti tetranomiali”, che dovrebbero avere questa forma:

$$\binom{n}{h,k,l} = \frac{n!}{h!\cdot k!\cdot l!\cdot (n-h-k-l)!}$$

Nel rappresentarli graficamente in modo simile ai coefficienti binomiali e trinomiali si otterrebbe una figura quadridimensionale, un *ipertetraedro* di Tartaglia.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

[1] http://it.wikipedia.org/wiki/Fattoriale
[2] http://it.wikipedia.org/wiki/Coefficiente_binomiale
[3] http://it.wikipedia.org/wiki/Triangolo_di_Tartaglia
[4] http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_binomiale
[5] http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads//2010/04/logica2.pdf

Le immagini sono state realizzate con *Google SketchUp*

http://sketchup.google.com/