

“L'albergo infinito e il paradosso della foto”

- Laboratorio di ricerca matematica del liceo Orazio di Roma –
(PLS Dipartimento di matematica dell'Università Roma Tor Vergata)

Abstract

In 1824 the German mathematician David Hilbert elaborated the well-known “infinite hotel paradox”, where he imagines a hotel with infinite rooms. He wanted to illustrate some paradoxical aspects of Cantor’s theory, which was aimed at setting a rigorous foundation to the notion of infinity. In this paper we recall some basic elements of Cantor’s theory, then we illustrate the unintuitive properties of the infinite hotel and how they are cleverly used by the hotel manager to make room for various groups of infinite clients, without leaving anyone out or making two or more people use the same room. One of the most surprising results of Cantor’s theory is that different types of infinity exist, and they can be ordered. In the last part of the paper we use once again the infinite hotel to illustrate this further paradox, comparing a group of infinite clients with their infinite holiday photos.

Key words: Hilbert’s hotel, set theory, paradox, infinity, Cantor’s theorem

0. INTRODUZIONE

Negli anni 1874-1884 il matematico Georg Cantor (1845 -1918) nella sua “Teoria dei numeri transfiniti” pone le basi concettuali per distinguere, catalogare e “ordinare” differenti “tipi” di insiemi infiniti. Nasce così una nuova branca della matematica che esplora con efficacia la nozione di infinito grazie anche al lavoro di molti altri matematici come R. Dedekind, D. Hilbert, C. Burali-Forti, E. Zermelo.

Nella prima parte dell’articolo si illustreranno alcune delle idee principali di questa teoria, per familiarizzare con il metodo e gli strumenti utilizzati da Cantor. Si noterà come molti di questi risultati siano in disaccordo con il senso comune, per questo motivo si parla spesso di “paradossi dell’infinito”. Come vedremo questi si producono per la tendenza ingiustificata a “trasferire” alle totalità infinite le qualità che caratterizzano quelle finite.

Ci occuperemo poi del “Paradosso dell’albergo infinito” . Nel 1924 il matematico David Hilbert (1862-1943) allo scopo di evidenziare i trabocchetti mentali che si incontrano maneggiando l’infinito, immagina un albergo dotato di infinite stanze e un abile albergatore che sfrutta la sua conoscenza dell’infinito per ospitare, in varie situazioni, vari gruppi di infiniti clienti.

Uno dei risultati più importanti della teoria dei numeri transfiniti, noto come “teorema di Cantor”, è che nell’ordinamento degli infiniti, l’infinità di un insieme è sempre un “gradino più in basso” rispetto all’infinità dei suoi sottoinsiemi. Seguendo lo spunto di Hilbert abbiamo cercato di usare

l'albergo infinito per illustrare anche questo risvolto della teoria di Cantor. E' nato così quello che abbiamo chiamato il "Paradosso della foto", illustrato nell'ultima parte del saggio.

1. CARDINALITÀ DI UN INSIEME

1.1. Quanti sono gli elementi di un insieme?

Come possiamo stabilire quanti sono gli elementi di un insieme, ovvero quanto sono "numerosi" i suoi elementi? Naturalmente possiamo, allo scopo, "contarli". Si possono allora verificare due casi:

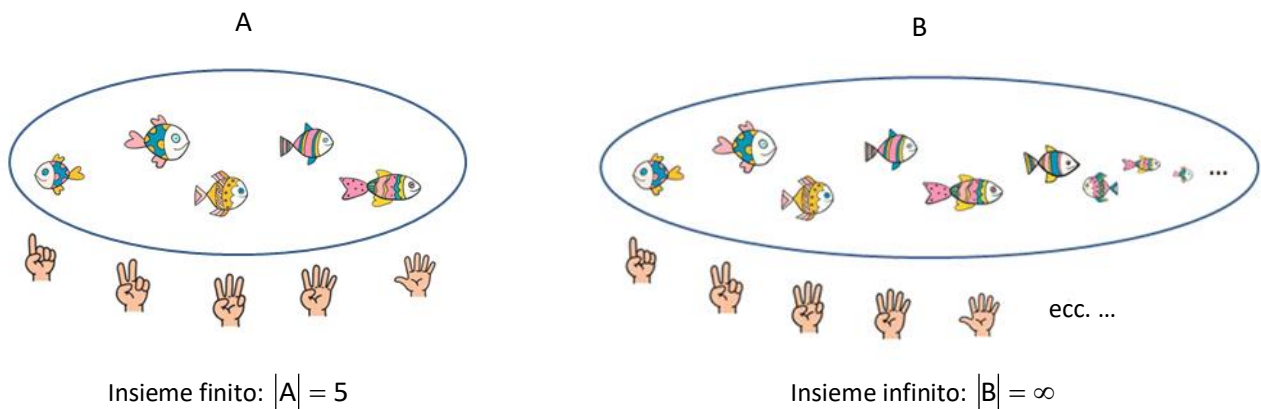
- Il conteggio termina: l'insieme è finito
- Il conteggio non ha fine: l'insieme è infinito

L'esito del conteggio degli elementi porta alla nozione di "cardinalità di un insieme" cioè alla misura della sua "numerosità".

Nel caso di un insieme finito la cardinalità è il numero naturale che termina il conteggio, nel caso di un insieme infinito si dice che la sua cardinalità è "un numero transfinito".

La cardinalità di un insieme S si indica con $|S|$.

Esempi:



1.2. Chi ha più elementi?

Introdotta, in modo intuitivo, la nozione di cardinalità come "numerosità" ci chiediamo:

- quando posso affermare che la cardinalità di un insieme è minore della cardinalità di un altro?
- quando posso affermare che due insiemi hanno la stessa cardinalità?

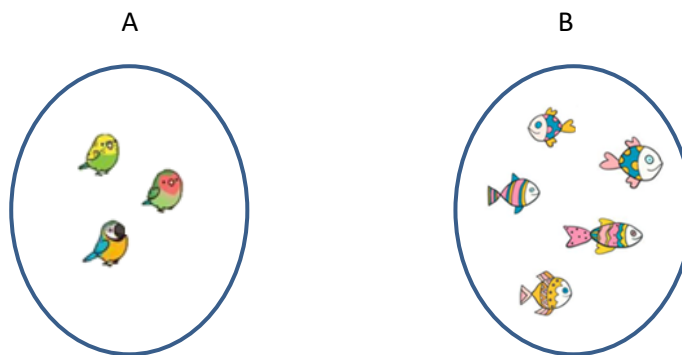
Nel caso di due insiemi finiti A e B con: $|A| = m$ e $|B| = n$ il tutto si riduce semplicemente ad un confronto tra i numeri che indicano le loro cardinalità, cioè:

- $|A| \leq |B|$ sse $m \leq n$

In particolare:

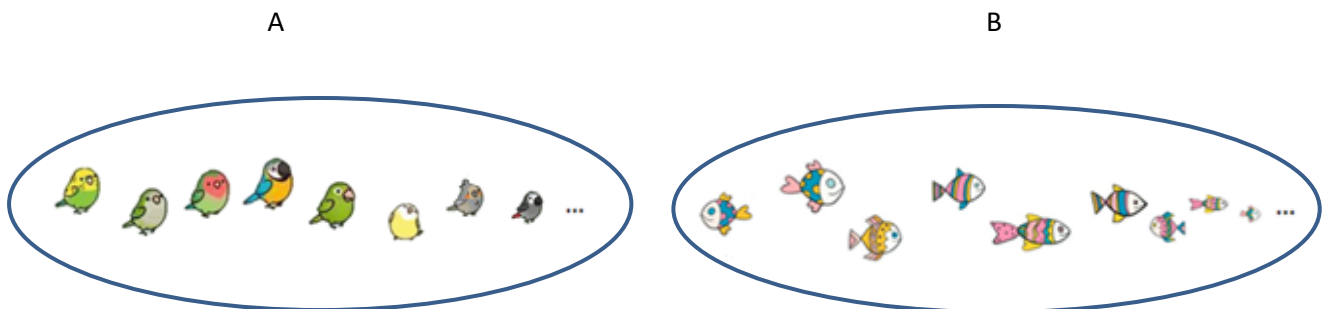
- $|A| = |B|$ sse $m = n$
- $|A| < |B|$ sse $m < n$

Esempio:



$$|A| = 3, |B| = 5 \Rightarrow 3 < 5 \Rightarrow |A| < |B|$$

E per gli insiemi infiniti?



$$|A| = \infty, |B| = \infty \Rightarrow ????????$$

Per essi le cardinalità non sono espresse da numeri naturali, occorre dunque ricorrere ad un'altra strategia.

1.3. Confronto tramite funzioni.

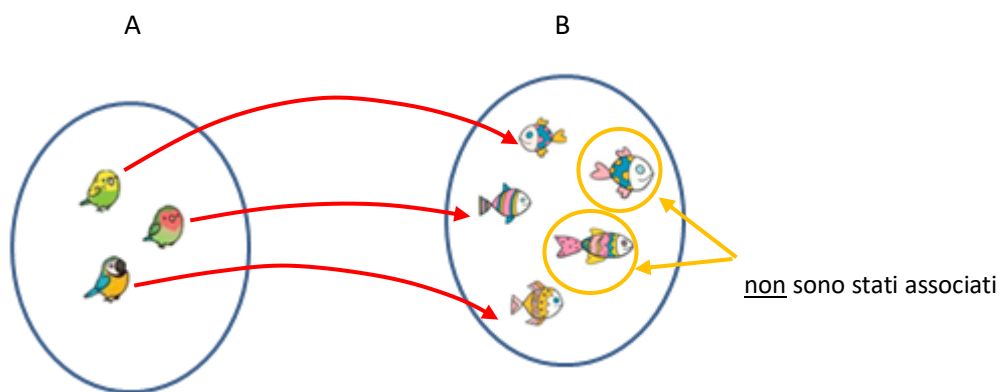
Tornando agli insiemi finiti, ci si rende conto che esiste un altro modo per confrontare le cardinalità di due insiemi A e B: associando in modo opportuno agli elementi di A quelli di B facendo ricorso alla nozione matematica di "funzione".

In pratica per confrontare due insiemi finiti A e B:

- associamo ad ogni elemento dell'insieme A un differente elemento dell'insieme B;

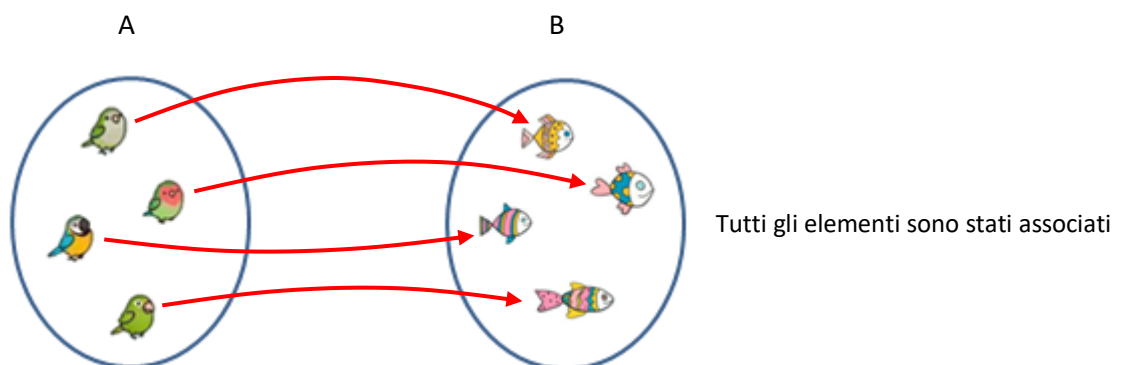
Alla fine potrà presentarsi solo uno di questi tre casi:

I) non sarà possibile associare agli elementi di A tutti gli elementi di B



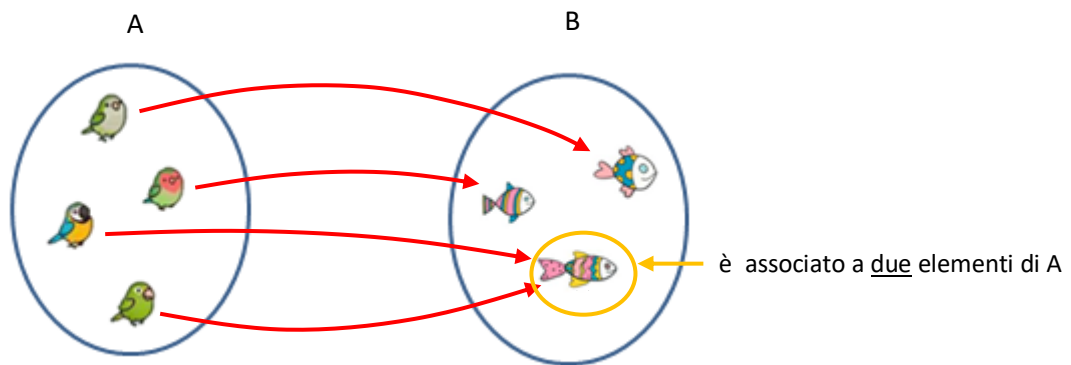
e questo nasce dal fatto che ci sono più elementi in B, quindi: $|A| < |B|$

II) tutti gli elementi di B possono essere associati agli elementi di A



A e B hanno in questo caso lo stesso numero di elementi, quindi: $|A| = |B|$

III) non sarà possibile associare agli elementi di A elementi tutti diversi di B



e questo dipende dal fatto che ci sono più elementi in A, quindi: $|A| > |B|$

Osserviamo che tutte le considerazioni fatte hanno evitato il ricorso al numero degli elementi degli insiemi, e ciò ci suggerisce di applicare questo approccio anche nel caso di insiemi infiniti.

Nei prossimi paragrafi formalizzeremo questa idea, ed elencheremo i risultati principali della teoria dei numeri transfiniti di Cantor. Ometteremo gran parte delle dimostrazioni che il lettore può però trovare in [1], [4], [5], [6].

1.4 Funzioni

Dati due insiemi A e B, si dice funzione da A a B una legge che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B.

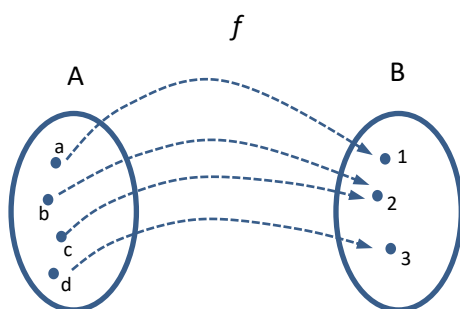
Se f è una funzione da A a B si scriverà:

$$f : A \longrightarrow B$$

Si dice immagine di un elemento $x \in A$, e si indica con $f(x)$, l'elemento di B associato a x dalla funzione f . Si usa anche la seguente notazione:

$$x \longmapsto f(x)$$

Esempio



$$f : A \longrightarrow B$$

$$a \longmapsto f(a) = 1$$

$$b \longmapsto f(b) = 2$$

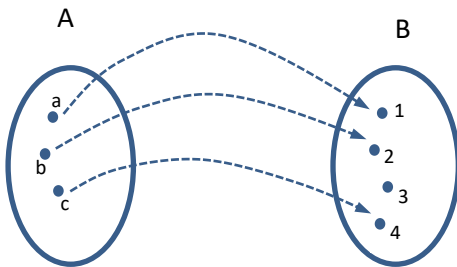
$$c \longmapsto f(c) = 2$$

$$d \longmapsto f(d) = 3$$

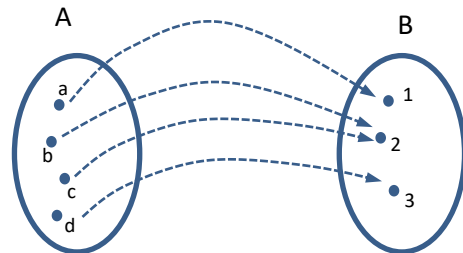
1.5 Funzioni iniettive, suriettive e biettive

- Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice “iniettiva” se gli elementi di A hanno immagini tutte diverse.
- Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice “suriettiva” se ogni elemento di B è immagine di un elemento di A .
- Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice biettiva se è iniettiva e suriettiva.

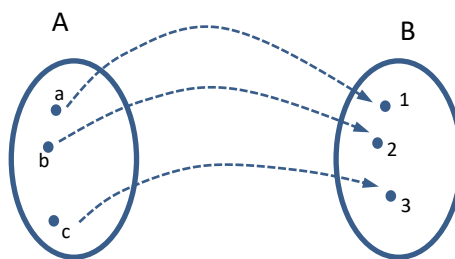
Esempi



Funzione iniettiva ma non suriettiva



Funzione suriettiva ma non iniettiva



Funzione biettiva

Si dimostra che se $f: A \rightarrow B$ è biettiva allora esiste un'altra funzione biettiva $f^{-1}: B \rightarrow A$ che prende il nome di funzione “inversa”.

Osservazione: possiamo ora rileggere il paragrafo 1.3 alla luce delle definizioni introdotte e riconoscere che nel confrontare le cardinalità degli insiemi finiti abbiamo usato funzioni iniettive, e biettive. Più precisamente si è stabilito che per due insiemi finiti A e B :

- $|A| < |B|$ sse esiste una funzione $f: A \rightarrow B$ iniettiva ma nessuna funzione biettiva
- $|A| = |B|$ sse esiste una funzione $f: A \rightarrow B$ biettiva

Cantor pone queste relazioni alla base della sua teoria assumendole per tutti gli insiemi, finiti e infiniti.

1.6. Relazione d'ordine e di equipotenza tra cardinalità.

Dati due insiemi A e B definiamo le seguenti relazioni:

- $|A| \leq |B|$ se esiste una funzione $f: A \rightarrow B$ iniettiva,
- $|A| = |B|$ se esiste una funzione $f: A \rightarrow B$ biettiva,
- $|A| < |B|$ se esiste una funzione $f: A \rightarrow B$ iniettiva, ma nessuna funzione biettiva

Due insiemi A e B tali che $|A| = |B|$ si dice che hanno la stessa cardinalità o che sono "equipotenti".

Valgono le seguenti proprietà:

- se $|A| = |B|$ allora $|B| = |A|$
- se $|A| < |B|$ e $|B| < |C|$ allora $|A| < |C|$
- se $|A| = |B|$ e $|B| = |C|$ allora $|A| = |C|$

1.7 Teorema di Cantor Bernstein

Dati due insiemi A e B, se esiste una funzione $f: A \rightarrow B$ iniettiva e una funzione $g: B \rightarrow A$ iniettiva allora esiste una funzione biettiva $h: A \rightarrow B$.

E quindi

$$\text{se } |A| \leq |B| \text{ e } |B| \leq |A| \text{ allora } |A| = |B|$$

1.8 Cardinalità del numerabile

I seguenti insiemi:

- \mathbf{N} : numeri naturali
- \mathbf{N}^* : numeri naturali senza lo zero
- \mathbf{N}_q : numeri quadrati perfetti
- \mathbf{N}_p : numeri naturali pari
- \mathbf{N}_d : numeri naturali dispari
- \mathbf{Z} : numeri interi
- \mathbf{Q} : numeri razionali

sono equipotenti cioè: $|\mathbf{N}| = |\mathbf{N}^*| = |\mathbf{N}_q| = |\mathbf{N}_p| = |\mathbf{N}_d| = |\mathbf{Z}| = |\mathbf{Q}|$

la loro cardinalità prende il nome di "cardinalità del numerabile" e si indica con il simbolo \aleph_0 .

Dimostrazione

In forza della definizione 1.6 occorre ogni volta individuare l'opportuna funzione biettiva. Può tornare utile in alcune occasioni l'utilizzo del teorema di Cantor-Bernstein, in tal caso ci si può limitare alla ricerca alle funzioni iniettive.

Dimostriamo solo alcuni casi, per i restanti si veda [1], [4], [5], [6]:

- per provare che $|\mathbf{N}| = |\mathbf{N}^*|$ si considera la funzione biettiva:

$$f: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}^*$$
$$n \longmapsto f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n+1 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

- per provare che $|\mathbf{N}| = |\mathbf{N}_q|$ si considera la funzione biettiva:

$$f: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}_q$$
$$n \longmapsto f(n) = n^2$$

- per provare che $|\mathbf{N}| = |\mathbf{N}_d|$ si considera la funzione biettiva:

$$f: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}_d$$
$$n \longmapsto f(n) = 2n+1$$

- per provare che $|\mathbf{N}| = |\mathbf{Z}|$ si considera la funzione biettiva:

$$f: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z}$$
$$n \longmapsto f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

1.9 Cardinalità del continuo

I seguenti insiemi:

- \mathbf{R} : numeri reali
- $(0,1)$: intervallo aperto 0,1

- $[0,1)$: intervallo 0,1 chiuso a sinistra aperto a destra
- $[0,1]$: intervallo chiuso 0,1
- $\wp(\mathbf{N})$: insieme delle parti di \mathbf{N}
- $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$: insieme delle successioni infinite di 0 e 1
- *Segmento*
- *Semicirconferenza aperta*
- *Semicirconferenza chiusa*
- *Retta*
- *Piano*
- *Spazio*

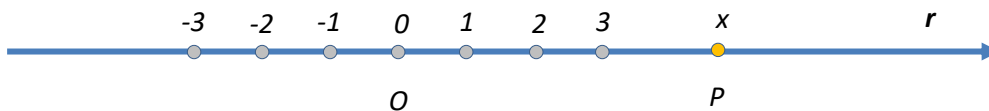
sono equipotenti.

La loro cardinalità prende il nome di “cardinalità del continuo” e si indica con il simbolo \aleph_1 .

Dimostrazione

Dimostriamo solo alcuni casi, per i restanti si veda [1], [4], [5], [6]:

- per provare che $|\text{retta}| = |\mathbf{R}|$ scelto sulla retta r un riferimento cartesiano come in figura:

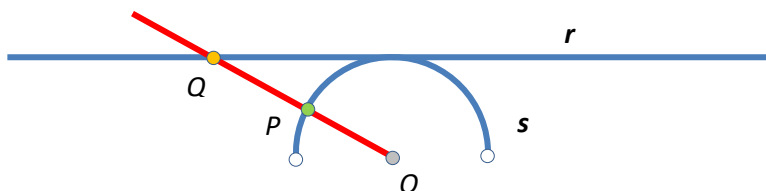


si considera la funzione biettiva:

$$f: \text{retta} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$P \longmapsto f(P) = x \quad \text{dove } x \text{ è l'ascissa del punto } P$$

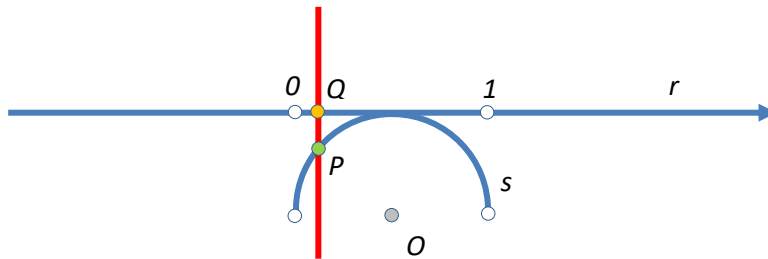
- per provare che $|\text{semicirconferenza aperta}| = |\text{retta}|$, scelte una semicirconferenza aperta s e una retta r come in figura:



consideriamo la funzione biettiva:

$$f: \text{semicirconferenza aperta} \longrightarrow \text{retta}$$

$P \longmapsto f(P) = Q$ dove Q è il punto di intersezione tra la semiretta OP e la retta r
 - per provare che $|\text{semicirconfenza aperta}| = |(0,1)|$, scelte una semicirconfenza aperta s di diametro 1 e il segmento aperto sulla retta r corrispondente all'intervallo $(0,1)$ come in figura:



consideriamo la funzione biettiva:

$$f: \text{semicirconfenza aperta} \longrightarrow (0,1)$$

$$P \longmapsto f(P) = x \quad \text{dove } x \text{ è l'ascissa del punto } Q, \text{ intersezione di } r \text{ con la retta per } P \perp r$$

- per provare che $|\wp(\mathbf{N})| = |\{0,1\}^{\mathbf{N}}|$ consideriamo la funzione biettiva:

$$f: \wp(\mathbf{N}) \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbf{N}}$$

$$X \longmapsto f(X) = s \quad \text{dove } s \text{ è la successione così definita } s(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \in X \\ 0 & \text{se } n \notin X \end{cases}$$

1.10 Teorema di Cantor

Per ogni insieme S si ha:

$$|S| < |\wp(S)|$$

Dimostrazione

Osserviamo intanto che nel caso finito il risultato è banale,

infatti se $|S| = n$ allora $|\wp(S)| = 2^n$, e per ogni n si ha: $n < 2^n$

Passiamo ora a dimostrare il caso generale. Dobbiamo provare che:

$$|S| \leq |\wp(S)| \quad \text{ma} \quad |S| \neq |\wp(S)|$$

È facile mostrare la prima parte, esiste infatti la funzione iniettiva:

$$i: \mathbf{S} \longrightarrow \wp(\mathbf{S})$$

$$x \longmapsto i(x) = \{x\}$$

Per la seconda parte, procediamo per assurdo, supponiamo che:

$$|\mathbf{S}| = |\wp(\mathbf{S})|$$

che cioè esista una funzione biettiva f

$$f: \mathbf{S} \longrightarrow \wp(\mathbf{S})$$

Indichiamo allora con \mathbf{T} il sottoinsieme di \mathbf{S} così definito:

$$\mathbf{T} = \{x \mid x \notin f(x)\}$$

Per ipotesi f è biettiva esisterà dunque un elemento t tale che $f(t) = \mathbf{T}$

Ora:

$$t \in \mathbf{T} \Rightarrow t \in \{x \mid x \notin f(x)\} \Rightarrow t \notin f(t) \Rightarrow t \notin \mathbf{T}$$

$$t \notin \mathbf{T} \Rightarrow t \notin \{x \mid x \notin f(x)\} \Rightarrow t \in f(t) \Rightarrow t \in \mathbf{T}$$

siamo giunti quindi ad una contraddizione che è nata appunto dall'aver supposto l'esistenza della funzione biettiva: $f: \mathbf{S} \longrightarrow \wp(\mathbf{S})$.

Osservazione. Il teorema di Cantor è il risultato chiave di tutta la costruzione di Cantor: esso dimostra che esistono "effettivamente" diversi "gradi" di infinito permettendo così, a partire da un insieme infinito \mathbf{S} , la costruzione di una scala infinita di cardinalità infinite, ognuna strettamente più grande della precedente:

$$|\mathbf{S}| < |\wp(\mathbf{S})| < |\wp(\wp(\mathbf{S}))| < |\wp(\wp(\wp(\mathbf{S})))| < |\wp(\wp(\wp(\wp(\mathbf{S}))))| < \dots$$

Fino ad ora abbiamo classificato (vedi 1.8 e 1.9) due famiglie di insiemi infiniti: quelli di cardinalità del numerabile e quelli di cardinalità del continuo. Ora grazie al teorema di Cantor possiamo provare che la cardinalità del numerabile è strettamente minore di quella del continuo, cioè:

$$\aleph_0 < \aleph_1$$

Possiamo così affermare che ad esempio l'insieme dei numeri reali è "effettivamente" più "numeroso" dell'insieme dei numeri naturali, o degli interi, o dei razionali.

1.11 Numerabile vs Continuo

Tra la cardinalità infinita del numerabile \aleph_0 e quella del continuo \aleph_1 vale la seguente relazione:

$$\aleph_0 < \aleph_1$$

Dimostrazione

È sufficiente ricordare (vedi 1.9) che: $|\wp(\mathbf{N})| = |\mathbf{R}|$

ma per il teorema di Cantor applicato a \mathbf{N} : $|\mathbf{N}| < |\wp(\mathbf{N})|$

dunque: $|\mathbf{N}| < |\mathbf{R}|$

e quindi: $\aleph_0 < \aleph_1$

Osservazione. Nella dimostrazione abbiamo usato il teorema di Cantor. Esistono tuttavia anche dimostrazioni "dirette" che, utilizzando il cosiddetto "argomento diagonale di Cantor" (vedi [1], [4], [5], [6]) confrontano ad esempio gli insiemi \mathbf{N} e $(0,1)$ stabilendo che:

$$\aleph_0 = |\mathbf{N}| < |(0,1)| = \aleph_1$$

2. L'ALBERGO DI HILBERT

Il grande matematico tedesco David Hilbert, in una serie di lezioni divulgative degli anni '20, propose una maniera molto suggestiva per spiegare alcuni aspetti della teoria delle cardinalità di Cantor. Si tratta della celebre storia dell'albergo infinito, resa popolare dal libro di G. Gamow "One, Two, Three...Infinity : Facts and Speculations of Science" [3].



Un albergo ... molto singolare

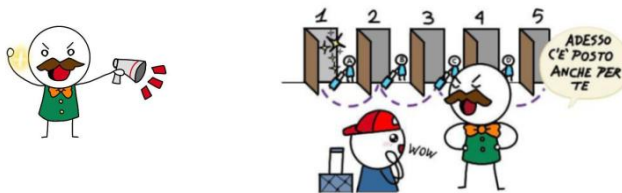
2.1. I paradossi dell'albergo infinito

Hilbert immagina un hotel con infinite stanze, tutte occupate, ed afferma che qualsiasi sia il numero di altri ospiti che sopraggiungano, sarà sempre possibile ospitarli tutti, anche se il loro numero è infinito.

Nel caso semplice, arriva un singolo nuovo ospite.



Il furbo albergatore sposterà tutti i clienti nella camera successiva (l'ospite della 1 alla 2, quello della 2 alla 3, etc.); in questo modo, benché l'albergo fosse pieno è comunque possibile, essendo infinito, sistemare il nuovo ospite nella stanza che si è liberata: la 1.



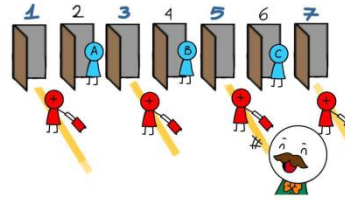
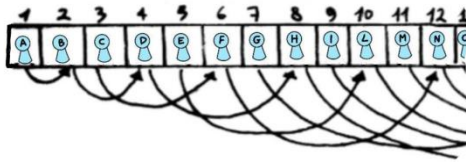
L'albergatore trova una stanza per il nuovo cliente

Un caso meno intuitivo si ha quando arrivano infiniti nuovi ospiti.



Sarebbe possibile procedere nel modo visto in precedenza, ma solo scomodando infinite volte gli ospiti (già spazientiti dal precedente spostamento).

L'albergatore trova invece una soluzione diversa che consiste nello spostare ogni ospite nella stanza con numero doppio rispetto a quello attuale (dalla 1 alla 2, dalla 2 alla 4, etc.),



L'albergatore trova posto ai nuovi infiniti ospiti

lasciando ai nuovi ospiti tutte le camere con i numeri dispari, che sono essi stessi infiniti, risolvendo dunque il problema. Gli ospiti sono tutti dunque sistemati, benché l'albergo fosse pieno.

Ancora più difficile: ci sono infiniti alberghi con infinite stanze tutti al completo.

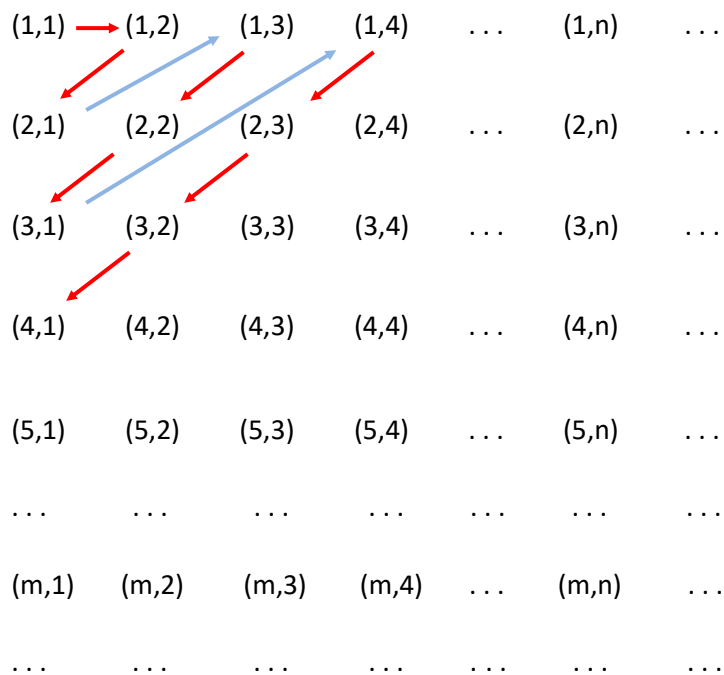


Tutti gli alberghi chiudono, tranne uno. Tutti gli ospiti vogliono alloggiare nell'unico albergo rimasto aperto. Sarebbe possibile procedere come prima, ma solo scomodando infinite volte gli ospiti. Un modo alternativo, invece, è di assegnare ad ogni persona una coppia di numeri (m, n) in cui m indica l'albergo di provenienza, e n la relativa stanza. Gli ospiti sono quindi etichettati in questo modo:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	...	(1,n)	...
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	...	(2,n)	...
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	...	(3,n)	...
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	...	(4,n)	...
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	...	(5,n)	...
...
(m,1)	(m,2)	(m,3)	(m,4)	...	(m,n)	...
...



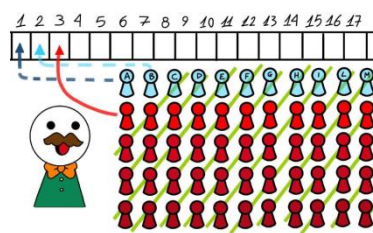
A questo punto basta assegnare le nuove stanze agli ospiti secondo un criterio ordinato, ad esempio per diagonali:



Cioè:

$(1,1) \rightarrow 1$, $(1,2) \rightarrow 2$, $(2,1) \rightarrow 3$, $(1,3) \rightarrow 4$, $(2,2) \rightarrow 5$, $(3,1) \rightarrow 6$, ecc.

E ancora una volta tutti i clienti vengono sistemati nell'albergo.



L'albergatore trova posto agli infiniti clienti degli infiniti alberghi

2.2 Riflessione teorica

Osserviamo per prima cosa che l'insieme delle stanze dell'albergo, che indicheremo con S , e l'insieme dei clienti che occupano tutte le stanze dell'albergo, che indicheremo con C , sono numerabili perché ad ogni stanza e ad ogni cliente corrisponde biunivocamente il numero della stanza:

$$|\mathcal{S}| = |\mathcal{C}| = |\mathbf{N}^*| = \aleph_0$$

Nel primo caso l'albergatore riesce a trovare posto ad un nuovo cliente facendo scorrere tutti gli altri di una stanza. Notiamo che la chiave di questo risultato è osservare che, indicando con a un nuovo cliente, si ha:

$$|\mathcal{C} \cup \{a\}| = |\mathcal{S}|$$

basta infatti considerare la funzione biettiva:

$$f: \mathcal{C} \cup \{a\} \longrightarrow \mathcal{S}$$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \text{stanza } 1 & \text{se } x = a \\ \text{stanza } n+1 & \text{se } x \text{ alloggiava nella stanza } n \end{cases}$$

Possiamo riassumere il quadro delle cardinalità nel seguente modo:

$$|\mathcal{C} \cup \{a\}| = |\mathcal{S}| = |\mathcal{C}| = |\mathbf{N}^*| = \aleph_0$$

ottenendo la seguente relazioni tra numeri transfiniti:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

Nel secondo caso l'albergatore riesce a trovare posto ad una nuova infinità di clienti, indicati con \mathcal{C}' , anch'essa numerabile, facendo spostare i vecchi clienti nella stanza indicata con il doppio del numero della propria stanza. La soluzione dell'albergatore dà prova del seguente fatto:

$$|\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'| = |\mathcal{S}|$$

Per una argomentazione più formale, notiamo per prima cosa che, essendo l'insieme dei nuovi clienti numerabile, possiamo associare ad ognuno di essi un numero naturale $n' \in \mathbf{N}^*$

Siamo ora in grado di costruire la seguente funzione biettiva:

$$f: \mathcal{C} \cup \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{S}$$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \text{stanza } 2n & \text{se } x \in \mathcal{C} \text{ e } n \text{ è la stanza dove alloggiava} \\ \text{stanza } 2n'+1 & \text{se } x \in \mathcal{C}' \text{ e } n' \text{ è il numero ad esso associato} \end{cases}$$

Possiamo riassumere il quadro delle cardinalità nel seguente modo:

$$|\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'| = |\mathcal{S}| = |\mathcal{C}| = |\mathbf{N}^*| = \aleph_0$$

Nel linguaggio dei numeri transfiniti questo può si esprimere nel modo seguente:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

Concludiamo con l'ultimo caso: si pone ora il problema di ospitare in un albergo infinito già completo, una infinità numerabile di comitive di infiniti clienti tra le quali va ovviamente considerata l'infinità dei clienti che già vi alloggiava. Si tratta di mostrare che: indicato con C_1 i clienti già alloggiati nell'albergo e con C_m una generica comitiva di infiniti clienti, vale la seguente relazione:

$$\left| \bigcup_{m \in \mathbf{N}} C_m \right| = |\mathbf{S}|$$

Anche qui per una argomentazione rigorosa, notiamo per prima cosa che, essendo ognuno degli insiemi di clienti numerabile, ed essendo questi insiemi a loro volta una totalità numerabile, possiamo associare ad ogni cliente una coppia ordinata di numeri (m, n) $m, n \in \mathbf{N}^*$ dove m indica a quale comitiva appartiene e n il numero che in quella comitiva lo contraddistingue.

Consideriamo ora la funzione biettiva che è la versione analitica dell'assegnazione delle stanze "per diagonali" illustrata nel par. 2.1.

$$f: \bigcup_{m \in \mathbf{N}} C_m \longrightarrow \mathbf{S}$$

$$x \longmapsto f(x) = \text{stanza } \frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} + m \quad \text{dove } (m, n) \text{ è la coppia associata a } x$$

Possiamo riassumere il quadro delle cardinalità trattate nel seguente modo:

$$\left| \bigcup_{m \in \mathbf{N}^*} C_m \right| = |\mathbf{S}| = |\mathbf{C}| = |\mathbf{N}^*| = \aleph_0$$

Nel linguaggio dei numeri transfiniti questo può si esprime nel modo seguente:

$$\underbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \dots + \aleph_0}_{\aleph_0 \text{ volte}} = \aleph_0$$

2.3. Il paradosso della foto

Ogni anno una comitiva di infiniti affezionati clienti, prenota per due settimane tutte le infinite stanze dell'albergo di Hilbert.

Per premiare la loro fedeltà, l'albergatore mette a disposizione degli ospiti un fotografo professionista che per tutta la durata della loro vacanza scatta fotografie a tutti i possibili gruppi della comitiva.



Il fotografo dell'albergo

In particolare entrano nell'obiettivo della sua macchina fotografica:

- tutta la comitiva (l'inquadratura più impegnativa: potete stringervi ancora un po'!....);
- tutte le singole famiglie;
- tutti i gruppi di amici;
- tutti i gruppi di giovani;
- tutti i gruppi di anziani;
- tutte le coppie di genitori;
- tutti i nipoti con i loro nonni;
-
- e in generale tutti i gruppi di villeggianti comunque essi siano formati.



Infine il fotografo decide di fare una foto ad ogni singolo ospite e di chiudere il suo servizio con un bel panorama delle cime delle montagne "inaccessibili" (nessuno è mai riuscito a scalarle).

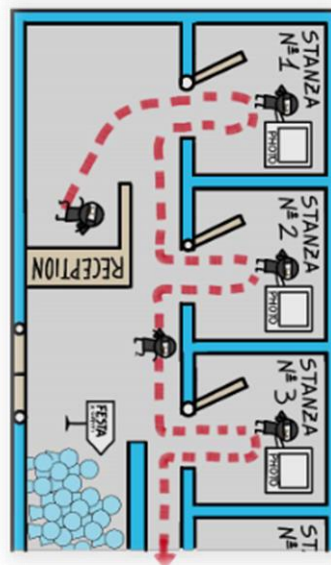
Tornato nel suo laboratorio attiva le sue stampanti fotografiche (per fare presto ne usa infinite: pensate che spesa di carta speciale e inchiostro!) e al termine si trova sul tavolo di lavoro un gran numero di fotografie; a questo punto le ripone in un grande pacco e le consegna al suo committente.



L'albergatore vorrebbe all'inizio farne dono ai suoi ospiti, ma poi cambia idea e decide di fargli una sorpresa. Introduce ogni foto all'interno di un quadro, con l'intenzione di appendere ognuno di questi in una stanza diversa.

Memore delle sue imprese straordinarie riuscirà anche questa volta nel suo intento? Come proveremo l'albergatore questa volta dovrà arrendersi.

Supponiamo infatti per assurdo che l'albergatore raggiunga il suo obiettivo e riesca, mentre i clienti stanno cenando, ad appendere tutte le foto nelle stanze.



L'albergatore decora le stanze con le foto dei clienti

Dopo cena tutti gli ospiti rientrando nelle loro stanze troveranno sul muro uno degli scatti del fotografo:

- alcuni di essi si ritroveranno all'interno dell'inquadratura
- altri no (ad esempio il cliente che ha nella sua stanza il panorama delle montagne!)

chiameremo i primi "insider" e i secondi "outsider".



Un insider



Un outsider

Gli outsider, come tanti altri, sono un gruppo di clienti dell'albergo, e come tale il fotografo li avrà certamente immortalati. La loro foto è ora appesa in una delle stanze, e l'ospite a cui è stata assegnata quella stanza la sta guardando cercando, tra i volti ritratti, il suo. Ci sarà?

Riflettiamo:

- se l'ospite è presente nella foto, trattandosi della foto degli outsider, non dovrebbe essere presente nella foto;
- se l'ospite non è presente nella foto, allora è uno degli outsider, e quindi dovrebbe essere presente nella foto.

Si giunge così ad una contraddizione, nata dall'aver supposto che l'albergatore riesca a decorare le stanze con le foto dei clienti. Per quanto si impegni ci sarà sempre almeno una foto che non troverà posto: ci sono "troppe foto" rispetto alle stanze dell'albergo!



L'ospite della stanza con la foto degli outsider

2.4 Riflessione teorica sul paradosso della foto

Il paradosso della foto, come è facile rendersi conto, non è altro che una versione della dimostrazione del teorema di Cantor (vedi 1.9). In pratica abbiamo dimostrato per assurdo che la cardinalità dell'insieme dei clienti, che indicheremo con C , è strettamente minore delle cardinalità dell'insieme F delle fotografie. Mettiamo in luce in modo più formale la cardinalità di questi due insiemi.

Osserviamo innanzi tutto che l'insieme delle fotografie F è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle parti dell'insieme dei clienti $\wp(C)$, basta considerare banalmente la funzione f :

$$f: F \longrightarrow \wp(C)$$

$$x \longmapsto f(x) = \text{insieme dei clienti presenti nella foto } x$$

(es.: i "ritratti" corrispondono ai singoletti cioè agli insiemi contenenti un solo cliente, il "panorama delle montagne" corrisponde all'insieme vuoto, ecc.)

A sua volta l'insieme delle parti dell'insieme dei clienti $\wp(C)$ è equipotente a $\wp(N)$ (è sufficiente associare ad ogni insieme di clienti l'insieme dei numeri delle loro stanze) e possiede quindi, come

quello delle foto, la potenza del continuo (vedi 1.10).

E infine in virtù del teorema di Cantor: $|C| < |\wp(C)|$

Possiamo dunque riassumere i vari passaggi nel seguente schema:

$$\aleph_0 = |N| = |S| = |C| < |\wp(C)| = |F| = |\wp(N)| = \aleph_1$$

3. CONCLUSIONI

Nella letteratura matematica l'albergo di Hilbert viene generalmente utilizzato per stabilire la "numerabilità" di particolari insiemi infiniti di clienti: una infinità numerabile più un cliente, una infinità numerabile più una infinità numerabile di clienti, una infinità numerabile di infinità numerabili di clienti; numerabilità che viene ogni volta "certificata" dall'aver trovato posto nell'albergo a tutti i clienti, nell'infinità numerabile delle stanze.

Nel proporre il paradosso della foto si è deciso di estendere il "campo di applicazione" con lo scopo di trattare anche cardinalità non numerabili: si è infatti usato l'albergo di Hilbert per confrontare l'infinità numerabile dell'insieme dei clienti e delle stanze, con quella non numerabile (infinità del continuo) dell'insieme delle foto o dei sottoinsiemi dei clienti dell'albergo. Il risultato illustrato è inoltre, a differenza dei paradossi noti, "negativo", si pone cioè come una prova di "impossibilità", attraverso un ragionamento per assurdo. Un assurdo (piccola annotazione psicologica) che però è "umanizzato", dallo sguardo straniato dell'ospite di fronte alla foto nella quale è "presente" e "non presente", aumentando così la portata comunicativa del racconto.

Queste idee ci spingono ad immaginare altri possibili applicazioni dell'albergo infinito per illustrare altri aspetti elementari e non, all'interno della teoria delle cardinalità transfinito o più in generale nella teoria degli insiemi.

Legate al paradosso della foto si possono ad esempio porre domande e questioni interessanti come le seguenti, che lasciamo al lettore.

- L'albergatore per rimuovere la contraddizione si affretta a scambiare la foto degli outsider con quella di un'altra stanza. Raggiunge il suo obiettivo?
- Perché la foto di coloro che si trovano all'interno della foto (gli "insider") non porta a contraddizioni?
- Il paradosso si può proporre anche nel caso di un albergo finito?
- Abbiamo visto che l'albergatore non riesce a collocare tutte le foto, può però accontentarsi di appenderne solo una parte (ad esempio tutte quelle con un solo soggetto). In quel caso, quante ne resterebbero nel suo studio? una? un milione? infinite? C'è una foto che è destinata a rimanere nel cassetto della sua scrivania?

Un'ultima nota sulle illustrazioni. Abbiamo voluto commentare alcuni passaggi con delle immagini divertenti ma rigorosamente coerenti con il testo, utilizzando il linguaggio dei fumetti, avvalendoci delle doti grafiche di un allieva del gruppo. Non è escluso che il materiale raccolto non possa diventare una piccola graphic novel a carattere divulgativo, come ultimamente sta avvenendo in vari contesti culturali anche a carattere scientifico.

4. BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

- [1] Richard Courant e Herbert Robbins, *Che cos'è la matematica?* Bollati Boringhieri (2000)
- [2] C. Bartocci, *Racconti matematici*, Einaudi (2006)
- [3] G. Gamow, *One, Two, Three...Infinity: Facts and Speculations of Science*, Dover Publ.(1947)
- [4] <http://people.dm.unipi.it/berardu/Didattica/Appunti/scuole060210.pdf>
- [5] http://www.centromorin.it/attivita/materiali2012/Insiemi_infiniti.pdf
- [6] https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Cantor
- [7] https://it.wikipedia.org/wiki/Paradosso_del_Grand_Hotel_di_Hilbert