

*Progetto “Lauree scientifiche”*  
 Università “Tor Vergata”  
 “Dalla logica naturale alla logica formale”

Settimo incontro

Cerchiamo di fare una ricapitolazione del laboratorio!

Abbiamo cominciato dal linguaggio naturale e dalle “implicature” conversazionali, ossia abbiamo esaminato delle “inferenze” nell’ambito della logica naturale:

“Ho terminato le sigarette” - “tranquillo, c’è un bar a 100 metri che chiude sempre tardi!”

Abbiamo poi analizzato dei ragionamenti “strutturati”: i sillogismi ipotetici

- Se la benzina finisce allora la macchina si ferma. (*premessa maggiore*)
- La benzina finisce (*premessa minore*)

Quindi la macchina si ferma (*conclusione del ragionamento: proposizione Q in forma affermativa*)

Abbiamo imparato a risolverli pervenendo allo schema:

Modus Ponens	Modus Tollens	Negazione dell’antecedente	Affermazione del conseguente
Se P allora Q P ————— Q	Se P allora Q $\neg$ Q ————— $\neg$ P	Se P allora Q $\neg$ P .... nulla ne consegue	Se P allora Q Q ..... nulla ne consegue

Siamo poi passati ad analizzare un altro tipo di sillogismi, quelli categorici

- Tutti gli italiani sono uomini
- Qualche uomo è biondo

Si può concludere qualcosa?

Ricordi?

Le due premesse hanno un termine in comune, *gli uomini*, che si chiama termine *medio*.

L’altro termine presente nella premessa maggiore, gli italiani, si chiama predicato.

L’altro termine presente invece nella premessa minore, **i biondi**, si chiama **soggetto**.

Dobbiamo trovare una conclusione (se è possibile) che leghi il **soggetto** con il predicato, cioè la categoria dei biondi con la categoria degli italiani.

Abbiamo poi “classificato” le affermazioni in base alla qualità e alla quantità

**A** Universale Affermativa - Tutti gli S sono P

**I** Particolare Affermativa - Alcuni S sono P

**E** Universale Negativa - Nessun S è P

**O** Particolare Negativa - Alcuni S non sono P

E alle “figure”, ossia alla disposizione, nelle premesse, del termine medio, del soggetto e del predicato

	Figura I	Figura II	Figura III	Figura IV
Premessa Maggiore	MP	PM	MP	PM
Premessa Minore	SM	SM	MS	MS

Per analizzare i sillogismi siamo poi ricorsi ai cerchi di Eulero:

Tutte le trote(P) sono pesci(M) Qualche animale(S) non è un pesce(M)	
---	--

Qualche animale non è una trota

Allora quanti possibili sillogismi esistono? 256!!!!

Infatti i vari tipi di sillogismo si ottengono combinando in ogni figura i tipi di asserzione in modo diverso

.....

Quindi, per ogni figura, dobbiamo contare le combinazioni possibili di questi 4 tipi di elementi (A, I, E, O) nelle 3 asserzioni che compongono il sillogismo ....

Grazie ai cerchi di Eulero abbiamo trovato i sillogismi validi della I figura (MP – SM)

**A A A      E A E      A I I      E I O** E per le altre figure?

Certamente Aristotele non conosceva i cerchi di Eulero ma il quadrato di Apuleio che mette in relazione le quattro forme proposizionali A – E – I – O

Per poter trasformare un sillogismo, Aristotele usò le operazioni di sostituzione:

- Conversione simplex s
- conversione per accidens p
- inversione delle premesse m
- per contraddictionem ( per assurdo) c

### Partiamo da un gioco

Si parte dalla parola “pera” per arrivare al bersaglio “senso” con le seguenti regole:

- La parola può essere un anagramma della precedente
- Può essere ottenuta dalla precedente cambiando una lettera
- Può essere ottenuta dalla precedente aggiungendo o sottraendo una lettera

La parola di partenza è l’ipotesi

Il bersaglio finale è la tesi

Una possibile catena di deduzioni è la seguente:

Pera → cera → cero → ceto → cesto → costo → tosco → tosto → mosto → mosso → messo → nesso → senso

### Dimostrazione diretta

Consiste in una catena di inferenze, a partire dalla (o dalle) ipotesi fino a giungere per deduzione alla tesi.

Ogni singolo passaggio può utilizzare diverse regole di deduzione

Le premesse di ogni deduzione sono le ipotesi del teorema o postulati della teoria o teoremi già dimostrati in precedenza

Il “gioco” precedente è un esempio di dimostrazione diretta

### Dimostrazione indiretta

- **Per esclusione:** consiste nell’esaminare tutte le possibili conseguenze dell’ipotesi, escludendo quelle inaccettabili. Applicabile quando le conseguenze possibili sono in numero limitato

Esercizio 1: Se la somma di due numeri è dispari, i due numeri sono uno pari e l’altro dispari.

Suggerimento: Dati due numeri  $x$  e  $y$ , i casi possibili sono tre:

- I due numeri sono entrambi pari
- I due numeri sono entrambi dispari
- I due numeri sono uno pari e uno dispari

Dimostrazione:

- Se  $e$  sono pari si possono scrivere  $e$  , con  
Quindi  $e$  quindi il numero è multiplo di 2, cioè pari.
- Se sono entrambi dispari si possono scrivere  $e$  , con  
E perciò  $e$  quindi il numero è multiplo di 2, cioè pari.
- Non rimane che la terza possibilità.

**Per assurdo:** consiste nel negare la tesi, e dimostrare che ne consegue falsità o contraddizioni di ipotesi, teoremi, assiomi...

In pratica, in una dimostrazione per assurdo, al posto dell’implicazione  $P \rightarrow Q$  si esamina l’equivalente  $\neg Q \rightarrow \neg P$

Esercizio 2 : Verifica con la tavola di verità l’equivalenza logica delle seguenti proposizioni composte:

		$P \rightarrow Q$ e $\neg Q \rightarrow \neg P$			
P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

**Con il controesempio:** consiste nell'individuare un elemento che non soddisfa la tesi negandone così la validità universale

Esercizio 3: Dimostra che non è vero che ogni numero reale, elevato al quadrato, è maggiore del numero stesso.

Riprendiamo le “regole” per passare da un sillogismo ad un altro (di prima figura)

I Figura MP+SM	Barbara, Celarent, Darii, Ferio
II Figura PM+SM	Cesare, Camestre, Festino, Baroco
III Figura MP+MS	Darapti, Disamis, Datisi, Felapton, Bocardo, Feriso
IV Figura PM+MS	Bramantip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison.

### Bramantip

Bramantip  $\rightarrow$  Barbara  
 IV figura PM I figura MP  
           MS               SM  
           SP               SP

<ul style="list-style-type: none"> <li>Tutti gli P sono M      A</li> </ul> <p>applico m</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Tutti gli M sono S      A</li> </ul> <p>Apuleio-subalterna:</p> <p>dalla verità</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Tutti gli M sono S      A</li> <li>Tutti gli P sono M      A</li> </ul> <hr/> <p>Qualche P è S      I</p> <p>applico s</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Tutti gli M sono S      A</li> <li>Tutti gli P sono M      A</li> </ul> <hr/> <p>Tutti gli P sono S      A</p> <p>di A discende la verità di I</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Tutti gli M sono S      A</li> <li>Tutti gli P sono M      A</li> </ul> <hr/> <p>Qualche S è P      I</p>
---	--

### In conclusione:

- Tutti gli P sono M      A
  - Tutti gli M sono S      A
- 
- Qualche S è P      I

Abbiamo poi lavorato con le tavole di verità. Usiamole ora per risolvere il seguente quesito

### **Dagli archivi dell'ispettore Craig**

L'ispettore Craig di Scotland Yard ha gentilmente acconsentito a rendere pubblici i resoconti di alcuni casi a beneficio di coloro che sono interessati all'applicazione della logica alla soluzione di problemi criminali:

“Che cosa riesce a dedurre da questi fatti?” chiese l'ispettore Craig al sergente McPherson.

- 1) Se A è colpevole e B innocente, allora C è colpevole.
- 2) C non lavora mai da solo.
- 3) A non lavora mai con C.
- 4) Nessun altro tranne A, B, C era implicato, e almeno uno di essi era colpevole.

Il sergente si grattò la testa e disse: “ Non molto, temo, Signore. Lei riesce a dedurre da questi fatti chi è innocente e chi colpevole?”

“No”rispose Craig,” Ma c’è materiale sufficiente per incriminare con certezza uno di essi”.

Di chi si può affermare che è colpevole senza sbagliare?

Per risolvere il problema bisogna sapere se ogni individuo è colpevole o innocente; per questo può essere utile schematizzare tutti i casi possibili con una tabella ed esaminare la compatibilità di ogni riga.

I casi che verificano tutti i dati indicano che B è sicuramente colpevole

A	B	C	
Inn	Inn	Inn	Escluso perché non verifica il dato 4
Inn	Inn	Col	Escluso perché non verifica il dato 2
Inn	Col	Inn	Verifica tutti i dati
Inn	Col	Col	Verifica tutti i dati
Col	Inn	Inn	Escluso perché non verifica il dato 1
Col	Inn	Col	Escluso perché non verifica il dato 3
Col	Col	Inn	Verifica tutti i dati
Col	Col	Col	Escluso perché non verifica il dato 3

E ricordiamo ancora ... Il sogno di Leibniz (1646-1716)

“ Di conseguenza, quando sorgeranno controversie tra filosofi, non sarà più necessaria una discussione , come non lo è tra due calcolatori. Sarà sufficiente, infatti, che essi prendano in mano le penne, si siedano di fronte agli abaci e ... si dicano l’un l’altro : CALCULEMUS”