L'arcobaleno con GeoGebra

Andrea Centomo

Liceo "F. Corradini" di Thiene (VI)

Email: andrea.centomo@istruzione.it

24 agosto 2006

In questo articolo viene descritto un percorso didattico per poter studiare il fenomeno dell'arcobaleno. Lo studio avviene con l'ausilio del software libero GeoGebra per lo studio della Geometria, dell'Analisi e dell'Algebra.

Tra le caratteristiche maggiormente appariscenti dell'arcobaleno spicca la brillantezza dei suoi colori, che coprono tutto lo spettro della luce visibile dal rosso, nella parte esterna, al violetto, nella parte interna. Talvolta l'arcobaleno si presenta con due archi, di cui il secondo situato più in alto e di minore intensità. I due archi sono detti rispettivamente *arco primario* e *secondario*.

Il fenomeno dell'arcobaleno ha suscitato sin dall'antichità l'attenzione di scienziati e filosofi portando, nel corso del tempo, ad una comprensione sempre più approfondita del fenomeno. I contributi e le testimonianze maggiormente rilevanti di cui disponiamo sono riassumibili nelle seguenti:

- → la banda scura di Alessandro: nel II secolo dopo Cristo il filosofo greco Alessandro di Afrodisia descrisse con cura il fenomeno per cui, nella zona compresa tra i due archi dell'arcobaleno, l'illuminamento del cielo al di sotto dell'arco principale dell'arcobaleno appare molto più intenso di quanto non appaia al di sopra;
- → la misura degli angoli tra luce incidente e diffusa: intorno alla prima metà del XIII secolo Ruggero Bacone misurò l'angolo tra luce incidente del Sole e luce diffusa dai due archi dell'arcobaleno determinando i valori 138° e 130°;
- → l'ipotesi della riflessione: nel XIV secolo Teodorico di Freiberg ipotizzò che il fenomeno dell'arcobaleno dipendesse dalla riflessione solare e condusse numerosi esperimenti in questa direzione utilizzando delle sfere piene di acqua pura;
- → l'interpretazione teorica: nel XVII secolo Renato Cartesio diede un interpretazione del fenomeno dell'arcobaleno in termine delle leggi dell'ottica geometrica che portano il suo nome.

1. Ottica Geometrica

La spiegazione fisica del fenomeno dell'arcobaleno non può prescindere da alcune leggi dell'ottica geometrica che per completezza ripercorriamo utilizzando l'ambiente GeoGebra.

1.1. Rifrazione e Riflessione

Consideriamo un fascio di luce incidente la superficie di separazione tra due mezzi fisici aventi indice di rifrazione diverso m e n. Un raggio proveniente dal primo mezzo si dice *raggio incidente* e l'angolo i da esso formato con la normale alla superficie di separazione tra i due mezzi, che assumiamo piana, è detto *angolo di incidenza*. Una parte del raggio incidente si propaga nel secondo mezzo e prende il nome di *raggio rifratto*. Il raggio rifratto forma con la normale un *angolo di rifrazione* r in genere diverso da quello di incidenza. L'esperienza mostra che il fenomeno della **rifrazione** è governato dalle leggi di Cartesio-Snell:

1. se chiamiamo *piano di incidenza* il piano π che contiene raggio incidente e normale alla superficie di separazione, si ha che il raggio rifratto appartiene a π;

2. angolo di incidenza e angolo di rifrazione sono legati dalla relazione:

$$m \cdot \sin i = n \cdot \sin r$$

Se assumiamo come noto l'angolo di incidenza possiamo esplicitare l'angolo di rifrazione ottenendo:

$$r = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right).$$

Utilizzando GeoGebra vogliamo studiare la situazione classica in cui il primo mezzo è l'aria, con indice di rifrazione unitario ($m = 1$), e il secondo mezzo ha indice variabile ad esempio nell'intervallo $1 \leq n \leq 2$. Possiamo iniziare ricorrendo alle costruzioni base del programma per rappresentare la superficie di separazione tra i due mezzi, il raggio incidente e la normale alla superficie di separazione. Utilizzando il goniometro possiamo anche misurare l'angolo i e corredare la figura di alcuni testi. L'indice di rifrazione n viene rappresentato da uno *slider*.

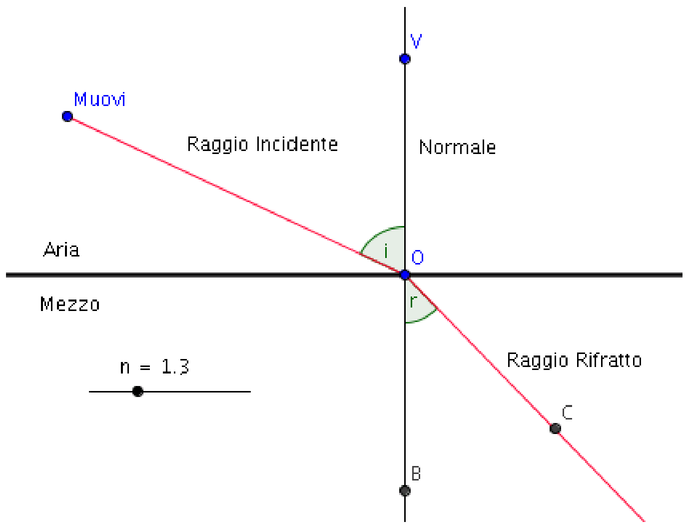


Figura 1. La riflessione con GeoGebra

Arrivati a questo punto dobbiamo costruire il raggio rifratto: è qui che l'utilizzo delle funzionalità algebriche diviene cruciale per poter **simulare** efficacemente il fenomeno. Un modo di procedere per costruire il raggio rifratto è il seguente:

→ costruiamo un punto B sulla normale;

→ inseriamo nella riga di Input:

```
r=asin(sin(i)/n)
```

che definisce il valore dell'angolo di rifrazione r;

→ ruotiamo il punto B intorno ad O in senso antiorario di un angolo pari ad r;

→ finalmente possiamo rappresentare il raggio rifratto costruendo la semiretta OC.

Se ora andiamo ad eseguire delle animazioni o più semplicemente a deformare dinamicamente la figura modificando l'angolo di incidenza, ossia muovendo il punto Muovi, e l'indice di rifrazione (muovendo il punto sullo slider) possiamo visualizzare come si comporta conseguentemente il raggio rifratto. In questo modo il programma permette di simulare perfettamente la fisica del fenomeno.

In modo ancora più semplice è possibile studiare le *riflessione*. Quando un raggio incide sulla superficie di separazione tra due mezzi con diverso indice di rifrazione, oltre al raggio rifratto considerato in precedenza, si forma anche un *raggio riflesso*. Il raggio riflesso si propaga all'indietro nello stesso mezzo da cui proviene il raggio incidente e per esso valgono le leggi di Cartesio-Snell per la riflessione:

→ il raggio riflesso giace nel piano di incidenza π;

→ angolo di incidenza e di riflessione hanno lo stesso valore.

1.2. Dispersione

Un'estensione immediata dell'uso visto sopra di GeoGebra consiste nell'utilizzare il programma per simulare il fenomeno ottico della *dispersione*. Come noto l'indice di rifrazione del vetro dipende dalla frequenza del raggio incidente, in particolare esso risulta leggermente maggiore per l'azzurro che per il rosso. La variazione dell'indice nel passsaggio dall'azzurro al rosso, per il vetro crown, è solamente dell'1% ma ciò è sufficiente a provocare il fenomeno per cui un fascio di luce bianca, incidente il prisma, risulta disperso all'uscita nei diversi colori dello spettro visibile. Ciascun colore ha subito una deflessione di un certo angolo, dipendente dalla lunghezza d'onda, che risulta massima per il blu e minima per il rosso.

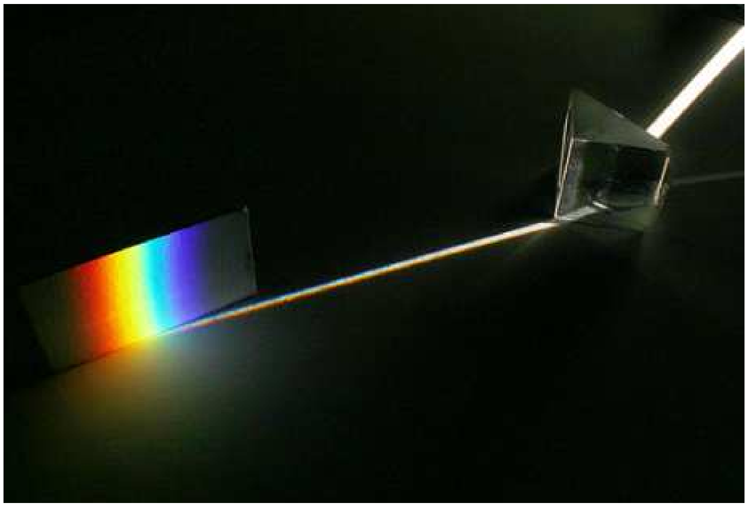


Figura 2. Dispersione della luce

Le piccole variazioni di indice del vetro crown *non permettono* di riprodurre fedelmente il fenomeno in GeoGebra tuttavia con esso possiamo modellare una situazione immaginaria in cui la differenza tra gli indici di rifrazione sia volutamente esagerata. L'implementazione del modello è lasciata al lettore.

2. L'arcobaleno

Un'applicazione delle leggi precedenti consiste nello studio della rifrazione di un raggio di luce in una goccia di acqua sferica che è alla base della spiegazione del fenomeno dell'arcobaleno. Analizziamo in modo dettagliato, utilizzando GeoGebra, cosa accade ad un raggio di luce, che assumiamo inizialmente monocromatica (ad esempio rosso), quando incide su una goccia di acqua sferica.

Una sezione della goccia è rappresentata dalla circonferenza di centro C di Figura 3[1] e supponiamo che un raggio di luce solare sia ad essa incidente. Con il goniometro possiamo misurare l'angolo di incidenza i rispetto alla normale alla superficie e quindi inserire nella riga di Input il valore dell'indice di rifrazione dell'acqua $n = 1.333$. Arrivati prendiamo un raggio di luce a costruiamo con le modalità viste sopra, nell'ordine, un raggio rifratto, un raggio riflesso e un raggio rifratto. L'ultimo raggio (raggio di classe 3) giustifica la comparsa del colore rosso nell'arco primario dell'arcobaleno. Se ora andiamo a deformare dinamicamente la figura in GeoGebra, possiamo vedere cosa accade al raggio rosso di classe 3 quando si varia il *parametro d'urto* $b = |y_M|$ del raggio incidente. Noteremo che il raggio rosso di classe 3 cambia la sua inclinazione. Dal momento che la luce solare illumina uniformemente i raggi rossi di classe 3 dovrebbero venire diffusi ad ogni angolo per cui l'analisi geometrica che abbiamo condotto non ci permette ancora di chiarire il motivo per cui l'arco primario dell'arcobaleno è visibile solo ad un ben determinato angolo $\alpha \approx 42^\circ$.

1. La figura 3 è stata ottenuta direttamente da GeoGebra. Il software permette infatti l'inserimento nell'ambiente geometrico di immagini come, nel nostro caso, le due clipart libere che rappresentano il sole e l'omino.

Prima di procedere all'analisi di questo punto osserviamo che la presenza nell'arcobaleno di tutto lo spettro dei colori visibili dipende dal fenomeno ottico della *dispersione* per cui l'indice di rifrazione dell'acqua varia al variare della frequenza del raggio incidente.

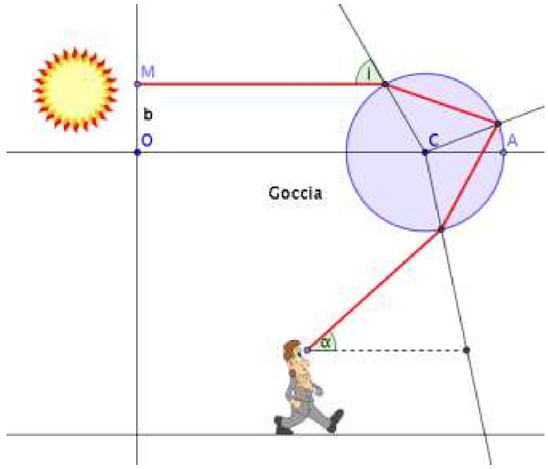
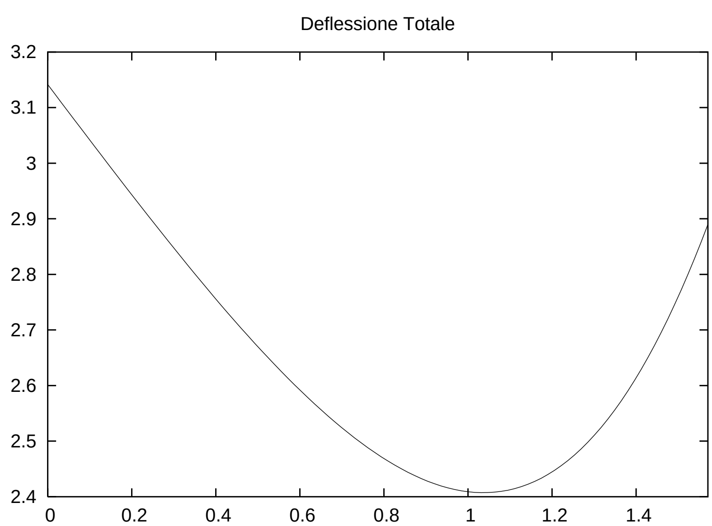


Figura 3. Rifrazione della luce in una goccia sferica

Se si calcola la funzione che definisce la deflessione totale subita da un raggio di classe 3 al variare dell'angolo di incidenza si noterà che essa è data da:

$$\Delta(i) = \pi + 2i - 4\arcsin\frac{\sin i}{n}$$

e che il suo grafico, ottenuto utilizzando il programma Gnuplot, è il seguente:



In corrispondenza del punto di minimo, $i_m \approx 59^\circ$, si ha un massimo dell'intensità di emissione della luce rifratta e in corrispondenza di questo angolo si osserva l'arco primario dell'arcobaleno. Sempre con GeoGebra possiamo misurare, in corrispondenza del valore i_m, l'angolo α formato tra la direzione dei raggi di luce incidenti la goccia e i raggi di classe 3. Il valore ottenuto è esattamente pari a circa 42°.

Il grafico della funzione $\Delta(i)$ e una stima grossolana del valore del punto di minimo si potevano condurre direttamente in GeoGebra sfruttando le funzionalità per il tracciamento di grafici. Lasciamo come esercizio per il lettore questa verifica. Per concludere un'ultima osservazione: se la funzione $\Delta(i)$ fosse risultata polinomiale GeoGebra sarebbe stato in grado di calcolarne la derivata e stimarne l'estremo locale ricorrendo alle sue funzionalità di computer algebra.