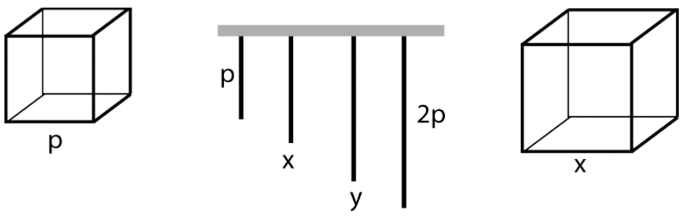
Quaderni di laboratorio N. 2

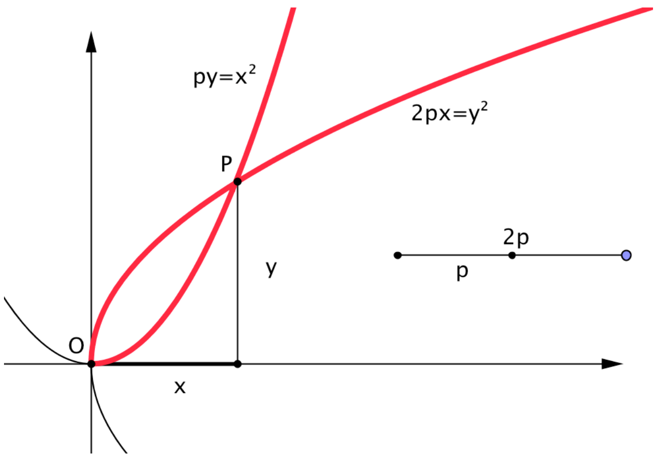
2009

Il parabolografo

e la duplicazione del cubo con qualche cenno alla teoria di Galois e alle costruzioni con riga e compasso

franco ghione





N. 2

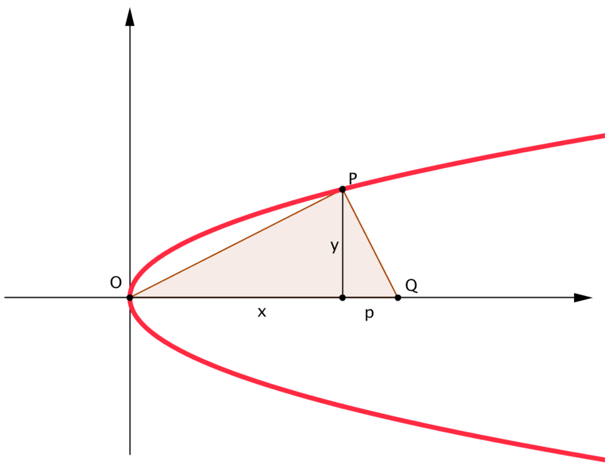
Il parabolografo

e la duplicazione del cubo con qualche cenno alla teoria di Galois e alle costruzioni con riga e compasso

franco ghione

Il *parabolografo* è uno strumento utile per disegnare un arco di parabola. La parabola si ottiene intersecando un cono circolare con un piano parallelo a una generatrice. Se si sceglie l'asse della parabola come asse delle ascisse e il vertice come origine, un punto P di ascissa x si trova sulla parabola se e solo se la sua ordinata y verifica la relazione

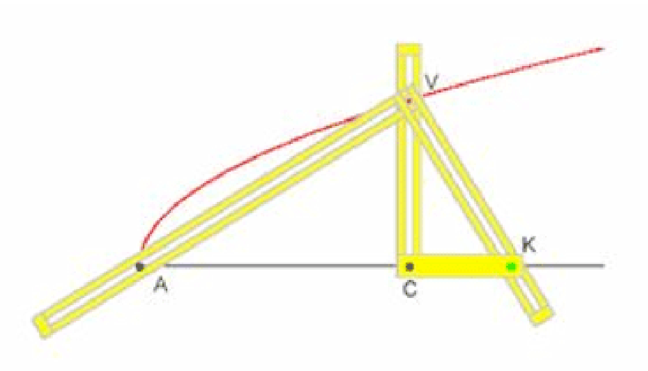
$$y^2=px$$



Questa relazione si può interpretare pensando a y come medio proporzionale tra x e p

$$p : y = y : x$$

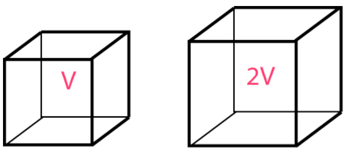
cosa che, dati p ed x permette di costruire l'ordinata y come altezza del triangolo rettangolo OPQ.
Il numero p si chiama *lato retto* della parabola e, a seconda della sua grandezza, la parabola è più o meno aperta.
E' su questo principio che funziona il parabolografo:



Il triangolo VCK rettangolo in C scorre sull'asse orizzontale e intercetta il punto V che è il vertice di un secondo triangolo rettangolo i cui cateti passano per A che il vertice della parabola fissato e per K. La punta della matita posta in V disegna l'arco di parabola.
Pensiamo che l'origine di questo strumento sia molto antica. Esso infatti avrebbe permesso la soluzione grafica di un difficile problema dell'antichità: la duplicazione del cubo seguendo un procedimento indicato da Menecmo (IV sec. a.C.). Tuttavia la prima descrizione che abbiamo risale al matematico Bonaventura Cavalieri (1598-1647) che lo illustra, insieme ad altri strumenti analoghi per disegnare coniche, nel suo libro "*Lo specchio ustorio, ovvero trattato delle settioni coniche e alcuni loro mirabili effetti intorno al lume, caldo, freddo, suono, e moto ancora.*

La duplicazione del cubo

Questo problema, ossia la costruzione di un cubo avente volume doppio rispetto a quello di un cubo di spigolo dato, è uno dei tre problemi classici della matematica greca, insieme alla trisezione dell'angolo e alla quadratura del cerchio. Esistono varie leggende sulla nascita del problema della duplicazione del cubo.



Nel racconto di Giovanni Filopono (visse nel VI d.C. ad Alessandria d'Egitto) si narra di una epidemia che imperversava ad Atene (430 a.C.) e del ricorso degli abitanti all'oracolo di Delfi per sapere fino a quando la pestilenza li avrebbe afflitti e come fare a fermarla.

…quando dio annunciò agli abitanti di Delfi, attraverso l'oracolo, che, al fine di sbarazzarsi della pestilenza, essi dovessero costruire un altare doppio di quello che esisteva, i loro operai specializzati caddero in una grande perplessità nei loro tentativi di scoprire come si potesse realizzare il doppio di un solido simile; essi, perciò, si recarono da Platone, per interrogarlo a proposito di ciò, ed egli rispose che l'oracolo non intendeva che il dio volesse un altare di misura doppia, ma che

egli desiderava, nell'affidargli il compito, disonorare i Greci per la loro negligenza in matematica e il loro disprezzo della geometria. "Il dio ha punito il popolo per aver trascurato la scienza della geometria che è scienza per eccellenza"

Eutocio[1] (480-540 d.C.) nei suoi commenti ad Archimede cita una lettera di Eratostene (276-194 a.C.), contemporaneo di Euclide, morto suicida, dopo essere diventato cieco, per il dolore di non poter più vedere le stelle. La lettera è indirizzata al re di Alessandria Tolomeo III e in questa lettera Eratostene racconta la genesi del problema della duplicazione del cubo e cita anche le diverse soluzioni già date da altri matematici.

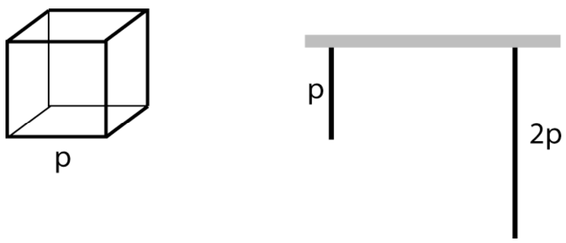
Eratostene a Tolomeo salute
Narrano che uno degli antichi poeti tragici facesse apparire sulla scena Mino [leggendario re di Creta] nell'atto di far costruire una tomba Glauco [suo figlio morto in combattimento] E che Mino accorgendosi che questa era lunga a ogni lato 100 piedi, dicesse "Piccolo spazio invero accordasti alla tomba di un re, radoppialo conservando sempre la forma cubica, raddoppia subito tutti i lati del sepolcro " . Ora è chiaro che egli si ingannava infatti duplicandone i lati una figura piana quadruplica mentre una solida si ottuplica . Allora anche fra i geometri fu agitata la questione in qual modo si potesse duplicare una data figura solida qualunque conservandone la specie. E questo problema fu chiamato duplicazione del cubo. Dopo di che tutti furono per lungo tempo titubanti, per primo IPPOCRATE da Chio trovò che se tra due linee rette , delle quali la maggiore sia doppia della minore, si inscrivono due medie in proporzione continua, il cubo sarà duplicato e così trasformò una difficoltà in un'altra non minore. Si narra poi che più tardi i Delii, spinti dall'oracolo a duplicare una certa ara, caddero nello stesso imbarazzo ed alcuni delegati vennero spediti ai geometri che convenivano con PLATONE all'Accademia, per eccitarli e cercare quanto era richiesto. Essi se ne occuparono con diligenza e si dice che, avendo cercato di inserire due medie tra due rette, ARCHITA TARANTINO vi riuscisse col semicilindro ed EUDOSSO invece mediante certe linee. Questi furono seguiti da altri, nel rendere più perfette le dimostrazioni, non però nell'effetuare la costruzione ed accomodarla alla pratica, eccetuato forse MENECMO e con gran fatica.

Menecmo (380-320 a.C.) è stato un matematico importante perché iniziò lo studio delle sezioni coniche e utilizzò, come vedremo, archi di parabola per risolvere il problema della duplicazione del cubo. Amico di Platone e tutore di Alessandro Magno di lui non è rimasto nulla se non testimonianze inidrette della sua opera. Si cita un aneddoto che confermerebbe i suoi rapporti con Alessandro Magno: ad Alessandro, che gli chiedeva di fargli conoscere un metodo facile per capire la geometria, Menecmo avrebbe risposto:

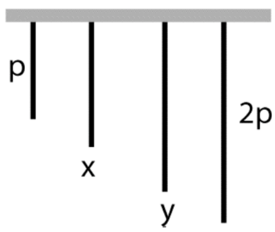
[1] In Archimede III, 56, 13 - 58,14 Heiberg, I commentari ad Archimede sono pubblicati in: Mugler Charles (ed.), *Archimède*, tome IV (*Commentaires d'Eutocius et fragments*), Paris, Les Belles Lettres, 1972.) dove è riportata la lettera di Eutocio

- Oh Re, per viaggiare da un luogo all'altro ci sono strade per il Re e strade per il popolo, ma in geometria c'è un'unica strada per tutti.

Prima di Menecmo altri matematici avevano affrontato il problema della duplicazione del cubo senza riuscire a risolverlo completamente. Tra questi Ippocrate di Chio (470-410 a.C.) era riuscito a ridurre il problema, come racconta Eratostene, a un problema di medie proporzionali, un problema in un certo senso di musica. Dato che l'intervallo musicale tra il suono che si ottiene facendo vibrare due corde dello stesso tipo ma di lunghezza diversa dipende dal rapporto tra le lunghezze,



Ippocrate si pone il problema di inserire in un intervallo di ottava, due corde x e y in modo che l'intervallo musicale ottenuto pizzicando p e x sia lo stesso di quello che si ottiene pizzicando x e y e pizzicando y e 2p.



In termini più geometrici, si tratta, dato un segmento di lunghezza p, di trovare due segmenti di lunghezze x e y in modo che

$$p : x = x : y = y : 2p$$

In termini più algebrici questo significa, per ogni uguaglianza, che il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi, cioè

$$\begin{cases} py = x^2 \\ 2px = y^2 \end{cases}$$

elevando al quadrato i due membri della prima equazione e moltiplicando per p^2 quelli della seconda otteniamo

$$\begin{cases} p^2y^2 = x^4 \\ 2p^3x = p^2y^2 \end{cases}$$

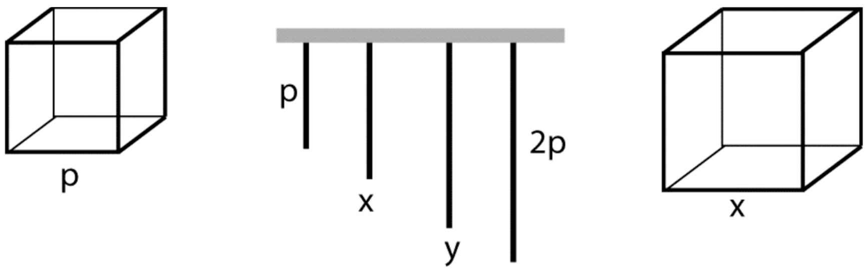
e quindi

$$x^4 = 2p^3x$$

Se x non è zero possiamo dividere i due membri dell'equazione per x e troviamo che:

$$x^3 = 2p^3$$

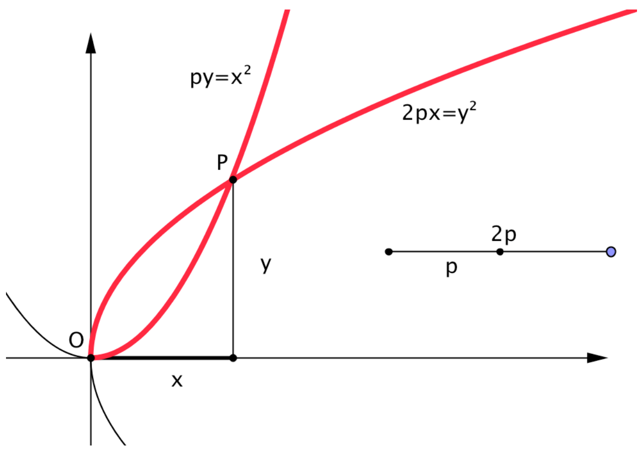
Dunque il cubo di x è 2 volte il cubo di p e quindi il segmento di lunghezza x definisce il lato di un cubo il cui volume è il doppio del volume del cubo di lato p.



Fino a questo punto era arrivato Ippocrate senza però riuscire a trovare un modo per costruire queste due medie proporzionali.
Ora arriva l'idea geniale di Menecmo che *vede* le due equazioni iniziali

$$\begin{cases} py = x^2 \\ 2px = y^2 \end{cases}$$

come due parabole con lo stesso vertice e con gli assi perpendicolari: la seconda equazione la pensiamo come una parabola con l'asse coincidente con l'asse delle ascisse e col lato retto 2p e la prima equazione come una parabola con l'asse coincidente con l'asse delle ordinate e parametro retto p.



Col parabolografo è possibile disegnare i due archi di parabola, trovare l'intersezione e misurare la lunghezza del segmento x il cui cubo è $2p^3$. La prova viene fatta per p = 10 si trovare in questo modo la radice cubica di 2 con una buona approssimazione. Lo stesso procedimento, disegnando due parabole di lato retto p e np, permette di calcolare la radice cubica di n.

E' possibile, dato un segmento di lunghezza 1, costruire usando *solo* la riga e il compasso, un segmento il cui cubo sia 2? Questo è uno dei grandi problemi lasciato aperto dalla geometria classica che non ha soluzione. La dimostrazione che non è possibile trovare una costruzione con riga e compasso che risolva il problema si può ottenere usando la teoria di Galois.
Nel paragrafo seguente diamo una dimostrazione di questo fatto utilizzando solo alcuni aspetti, i più semplici, della teoria di Galois. La difficoltà a comprendere la dimostrazione consiste in un fondamentale salto di astrazione col quale Galois apre la strada alla moderna algebra astratta. I numeri non vanno più pensati come grandezze, se pure simboliche, ma vanno studiati nel loro insieme prendendo in esame la loro forma e le regole algebriche con le quali si opera.
Il paragrafo seguente può essere una prima introduzione all'algebra moderna.

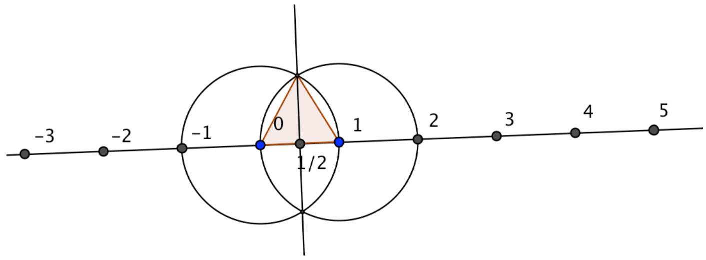
La non possibilità di duplicare il cubo con riga e compasso.

Dopo Menecmo, Archita, Eratostene molti altri, sfidando gli dei hanno trovato interessante dedicare il loro tempo per trovare una costruzione con riga e compasso che permettesse di costruire un segmento x tale che

$$x^3 = 2$$

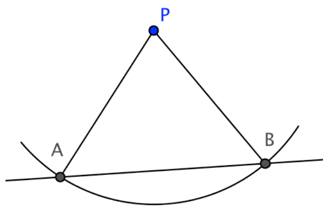
ma nessuno e' riuscito meglio di come sia riuscito Menecmo o Eratostene.
Fu un giovane un ragazzo, Evariste Galois, ucciso ad appena 21 anni in un duello nel 1832, probabilmente un tranello politico per eliminare un intelligente avversario della monarchia, a dimostrare che ogni sforzo per risolvere il problema era inutile perché il problema era irrisolvibile.
Ma... ma la soluzione del giovane Galois è molto difficile. Come fare a dimostrare che qualcosa non si può dimostrare? Il ragazzo, il giovane Evariste riesce a trovare una logica, precisa e molto particolare, che sottostà a ciò che è possibile costruire con la riga e il compasso. Intanto invece di pensare a figure costruibili con riga e compasso si pensa a *numeri costruibili*. Si cerca cioè di vedere la questione da un punto di vista algebrico. Identificando i punti di una retta con la loro ascissa, ci si chiede: quali numeri possono essere l'ascissa di un punto costruibile con riga e compasso a partire da un segmento unitario dato? Che *forma* hanno questi numeri? E' questa la domanda bizzarra e sorprendente che si pone Galois, domanda alla quale riesce a dare una risposta semplice e risolutiva. In particolare insieme a moltissime altre cose, si può vedere che il numero $\sqrt[3]{2}$ non ha quella forma.
Cominciamo con una utile definizione:
*Un numero che è l'ascissa di un punto costruibile con riga e compasso a partire da un dato segmento unitario, lo chiamiamo un **numero costruibile**.*
Cominciamo col vedere i primi e più semplici numeri costruibili.

Su una retta fissiamo un punto 0 e un punto 1: il segmento da 0 a 1 sarà l'unità di misura. Riportiamo con la stessa apertura di compasso, tanti punti, tante *volte* da una parte e dall'altra. In questo modo possiamo costruire tutti i numeri interi. Vogliamo anche poter dividere in tutti i modi possibili i segmenti che abbiamo creato e dimostrare che anche i numeri razionali positivi o negativi sono costruibili. Dividere per due è facile: basta saper fare l'asse di un segmento. La sola geometria che ci serve è quella dei triangoli isosceli.

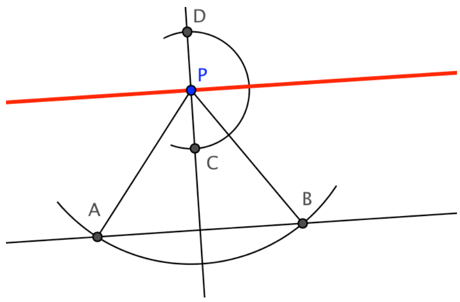


costruzione dell'asse

Così riusciamo a dividere per 4 per 8 per 16 ecc. E per dividere in 3? o in 5? o per qualunque numero positivo m? Per farlo abbiamo bisogno delle rette parallele. Dobbiamo saper costruire le parallele e abbiamo anche bisogno delle proporzioni e del teorema di Talete. Ecco come si costruisce la parallela a una data retta per un dato punto P:



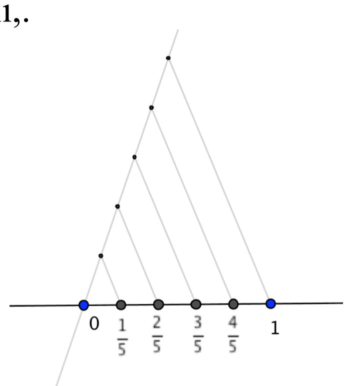
Con centro P si costruisce l'arco AB



Si costruisce l'asse del segmento AB.

Con centro P si costruisce l'arco CD e l'asse del segmento CD

Possiamo ora riportare su una retta obliqua che inizia in zero, m segmenti uguali, e poi proiettarli parallelamente sul segmento unitario. Così riusciamo, usando il teorema di Talete, a mantenere il rapporto tra le lunghezze sulla retta obliqua e quelle sul segmento unitario da cui siamo partiti, riusciamo cioè a dividere l'uno in un numero arbitrario di parti uguali,.

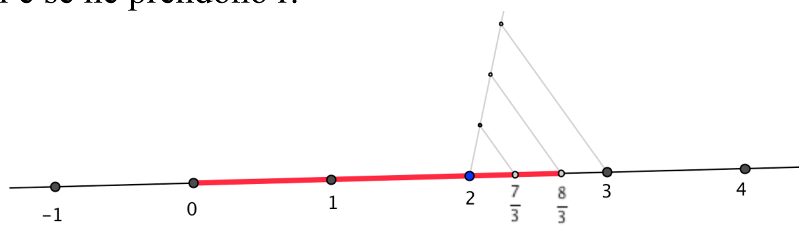


Nella figura m=5

Nello stesso modo possiamo dividere in un numero arbitrario m di parti uguali ogni segmento unitario: quello che va da 1 a 2 , da 2 a 3 , da 3 a 4 , da 0 a -1, da -1 a -2 , ecc ecc. In definitiva, dato un qualunque numero razionale n/m possiamo costruire con la riga e il compasso un segmento la cui lunghezza misuri (rispetto alla unità scelta) n/m. Se n/m è positivo si divide n per m e si trova il resto $0 \leq r < m$ in modo che si possa scrivere

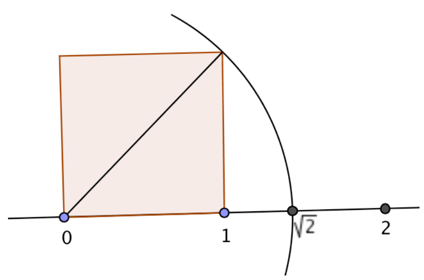
$$\frac{n}{m} = q + \frac{r}{m}$$

si considera il segmento che va dal punto q al punto q+1, si divide questo segmento in m parti uguali e se ne prendono r.



La figura mostra come si costruisce con la riga e il compasso un segmento di lunghezza 8/3

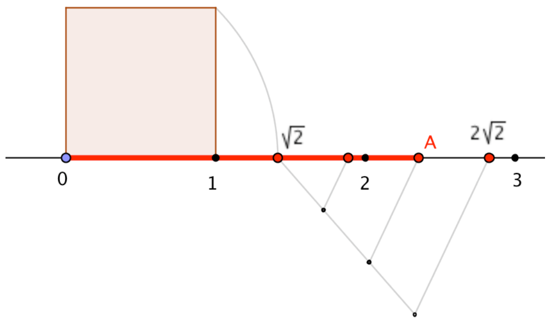
Abbiamo costruito con riga e compasso tutti i numeri razionali: ad ogni numero razionale positivo o negativo corrisponde un punto sulla retta che si può costruire con la riga e col compasso a partire dal segmento unitario.
Con questi numeri possiamo fare le quattro operazioni fondamentali dell'aritmetica, la somma la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione per un numero non nullo ottenendo sempre come risultato un numero dello stesso tipo: un numero razionale. Abbiamo quello che si chiama *un campo di numeri* cioè un particolare insieme di numeri reali che si riproducono tra loro operando in tutti i modi possibili con le 4 operazioni elementari dell'aritmetica. Questo primo e più semplice campo numerico è molto importante ha un nome e un suo speciale simbolo, uguale in tutto il mondo, per essere riconosciuto. Si chiama il *campo dei numeri razionali* e il suo simbolo è **Q**.
Possiamo ora alzare una retta verticale (l'asse delle ordinate) e costruire su questa nuova retta tutti i punti a coordinate intere e poi tutti i punti a coordinate razionali e poi tracciando rette parallele possiamo costruire una maglia fittissima di punti del piano le cui coordinate sono numeri razionali.
Tutti questi infiniti e densissimi punti possono essere costruiti con la riga e col compasso. Ma possiamo fare molto di più. Possiamo costruire anche dei punti le cui ascisse non sono razionali. Possiamo, ad esempio, costruire un quadrato di lato unitario e abbassare, col compasso, la sua diagonale.



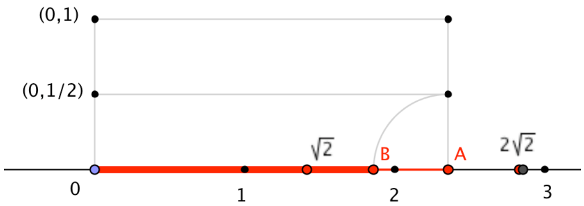
Questa lunghezza, che si denota con $\sqrt{2}$, non è compresa nel campo dei numeri razionali. Abbiamo nuovo punto ($\sqrt{2}$,0), un nuovo numero costruibile con riga e compasso $\sqrt{2}$. In più, dato che la somma algebrica si rappresenta geometricamente unendo uno dopo l'altro due segmenti che rappresentano i due addendi, possiamo costruire i numeri $2\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}$, 3 $\sqrt{2}$, ... , n $\sqrt{2}$ per n intero, ma possiamo anche dividere il segmento corrispondente a $n\sqrt{2}$ in m parti uguali e costruire il segmento $(n\sqrt{2})/m = (n/m)\sqrt{2}$. Possiamo anche aggiungere a questo, il segmento corrispondente a p/q che abbiamo già costruito, e costruire, con riga e compasso, tutti i punti della retta di ascissa

$$a + b\sqrt{2}$$

essendo a e b due qualunque numeri razionali.
La figura seguente mostra la costruzione del punto di ascissa $-1/2 + (5/3)\sqrt{2}$.



Il punto A ha ascissa $(5/3)\sqrt{2}$



Il punto B ha ascissa $-1/2 + (5/3)\sqrt{2}$

La cosa fondamentale è riconoscere a questi numeri una loro particolare *forma* (quella che permette di scriverli come $a + b\sqrt{2}$) e convincersi possono essere tra loro sommati, sottratti, moltiplicati e divisi riproducendo sempre un numero della stessa forma. La forma di questi numeri consiste nell'essere la somma di due addendi: il primo addendo è un numero razionale mentre il secondo addendo è il prodotto di un numero razionale per $\sqrt{2}$. Questa forma si conserva operando con le 4 operazioni dell'aritmetica. Per moltiplicarli basterà usare la legge distributiva

$$(a+b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + 2bd = (ac + 2bd) + (ad+bc)\sqrt{2}$$

Si vede che la forma del numero non è cambiata dopo aver eseguito la moltiplicazione. Per la divisione le cose non cambiano molto: si deve razionalizzare il denominatore

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})} = \frac{(ac-2bd)+(bc-ad)\sqrt{2}}{c^2-2d^2} = \frac{ac-2bd}{c^2-2d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-d^2}\sqrt{2} = p+q\sqrt{2}$$

Anche in questo caso il quoziente di due numeri di quella forma si presenta ancora nella stessa forma. Questo significa che tutti i numeri del tipo $a+b\sqrt{2}$, come i numeri razionali, formano un *campo numerico* che si denota col simbolo $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ e che contiene i numeri razionali. In simboli

$$\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} \mid a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{Q}\}$$

In definitiva per il fatto che $\sqrt{2}$ è un numero costruibile, diventano costruibili tutti i numeri della forma

$$a+b\sqrt{2}$$

dove a e b sono numeri del campo più piccolo che avevamo costruito prima, il campo cioè dei numeri razionali.
Continuando ora le costruzioni con riga e compasso a partire da questi punti, tracciando cioè rette che congiungono punti costruiti in questo modo e cerchi coi centri su questi punti e coi raggi di questa natura, possiamo trovare o no nuovi numeri, nuovi punti che non stanno tra quelli precedentemente individuati? Certamente è possibile, poiché, ad esempio $\sqrt{3}$ come ogni altra radice quadrata, può essere costruita, ma non ha la forma detta. Se infatti fosse $\sqrt{3}=a+b\sqrt{2}$ con a e b numeri razionali, elevando al quadrato avremmo

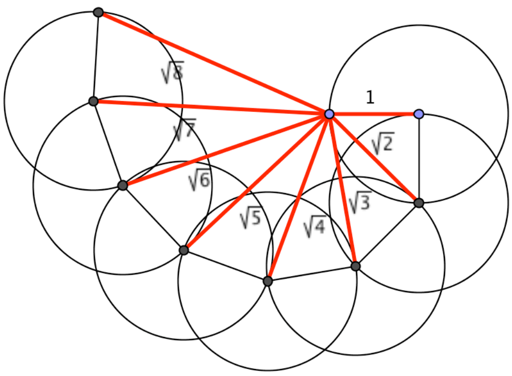
$$3=a^2+2b^2 +2ab\sqrt{2}$$

e quindi

$$\sqrt{2} = \frac{3 - a^2 - 2b^2}{2ab}$$

sarebbe un numero razionale mentre sappiamo che non è così.

La costruzione con riga e compasso di ogni radice quadrata si fa facilmente osservando la seguente spirale

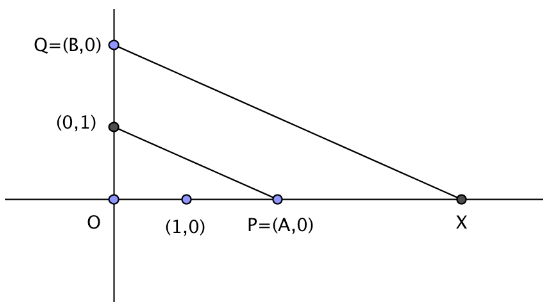


La spirale delle radici quadrate

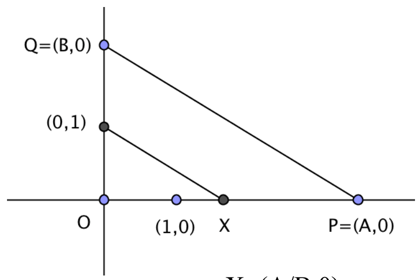
nella quale ogni triangolo rettangolo ha un cateto unitario costruito sulla perpendicolare all'ipotenusa del triangolo precedente. Possiamo allora costruire con riga e compasso $\sqrt{3}$ costruendo prima $\sqrt{2}$ e poi costruendo il triangolo rettangolo i cui cateti misurano $\sqrt{2}$ e 1. Analogamente si può fare con le altre radici quadrate. Come si vede sono tantissimi i punti del piano cartesiano che si possono costruire con riga e compasso a partire dal segmento unitario.

Il seguente teorema mette in relazione i numeri costruibili con l'algebra delle 4 operazioni e permette di costruire tantissimi altri numeri costruibili.

Teorema
Se A *e* B *sono due numeri costruibili allora è costruibile anche* A+B, A-B, A.B, A/B.
Dimostrazione
Per la somma e la differenza non ci sono problemi, si affiancano i due segmenti e si sommano andando nel verso positivo e si sottraggono andando nel verso opposto. Vediamo come si costruisce il prodotto e la divisione



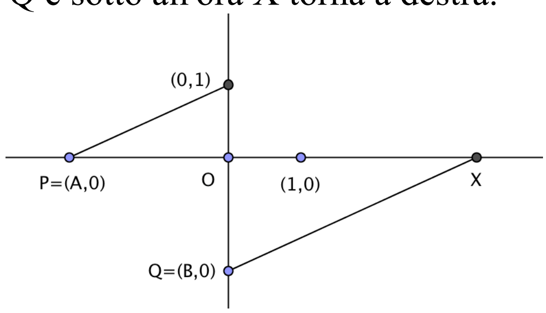
X=(AB,0)



X=(A/B,0)

Per ipotesi il punto P=(A,0) è stato costruito con riga e compasso. Tracciamo la retta che congiunge P col punto unità dell'asse delle ordinate e costruiamo la parallela passante per Q=(B,0) (che è costruito per ipotesi). Il punto X dove questa parallela incontra l'asse delle ascisse ha una ascissa x che, per il teorema di Talete, verifica la relazione $1 : B = A : x$ e quindi x=AB è un numero costruibile. Per la divisione si procede in modo analogo come indicato dalla figura a destra.

E' interessante notare come questa costruzione geometrica restituisca la regola dei segni. Facendo la costruzione con un software di geometria dinamica si può spostare il punto P alla sinistra dell'origine e vedere che in questo caso anche X è a sinistra, mentre se P è a sinistra e Q è sotto all'ora X torna a destra.



Meno per meno uguale a più

Il teorema precedente ci dice che i numeri costruibili sono un campo numerico cioè un insieme di numeri che si riproducono tra loro facendo le 4 operazioni elementari dell'aritmetica.

Vediamo ora come si può dimostrare che il numero $\sqrt[3]{2}$ non è un numero costruibile con l'uso della sola riga e del compasso. L'idea geniale di Galois è quella di associare a ogni costruzione con riga e compasso una catena di campi numerici ognuno più grande del precedente la cui forma ha un particolarissimo aspetto che può essere esplicitamente descritto.

Cominciamo ad osservare che una retta che congiunge due punti P e Q le cui coordinate si trovano su un campo numerico K ha una equazione cartesiana

$$Ax+By+C=0$$

i cui coefficienti si trovano ancora nello stesso campo numerico K, analogamente un cerchio che ha il centro in un punto con coordinate in K e il raggio in K ha una equazione cartesiana

$$(x-A)^2+(y-B)^2 = R^2$$

i cui coefficienti sono in K.

Intersecando due rette non parallele con coefficienti in K si trova un punto le cui coordinate sono in K, questo perché le operazioni che si devono fare per trovare le coordinate del punto intersezione sono le 4 operazioni dell'aritmetica che producono comunque, operando con numeri in K, numeri ancora in K. La cosa cambia se intersechiamo una circonferenza con una retta. Il calcolo porta infatti a dover risolvere una equazione di *secondo grado* la quale richiede l'estrazione di una *radice quadrata*, $\sqrt{N}$ che generalmente non appartiene a K pur appartenendo a K il radicando N. In questo caso quel passo della costruzione porta alla costruibilità del nuovo numero $\sqrt{N}$ e quindi di tutte le sue possibili combinazioni $A+B\sqrt{N}$. La stessa cosa accade se intersechiamo due circonferenze. Anche in questo caso le coordinate del punto di intersezione si ottengono risolvendo una equazione di secondo grado la quale comporta l'estrazione di una radice quadrata.

Ricapitolando:

Una costruzione con riga e compasso consiste di una serie finita di passi attraverso i quali si costruiscono vari punti del piano attraverso tre operazioni: intersecando due rette, intersecando una retta e una circonferenza, intersecando due circonferenze. Le ascisse di questi punti sono punti costruibili.

La costruzione inizia con un segmento dato che pensiamo come il segmento unitario. A partire da questo possiamo costruire tutti i numeri razionali: il campo **Q**.

Il passo successivo produce un nuovo punto le cui coordinate possono essere razionali oppure possono richiedere l'astrazione di una radice quadrata di un numero razionale: $\sqrt{n}$. Nel primo caso non abbiamo aggiunto nulla di nuovo, ma nel secondo i numeri costruibili a partire da quel punto sono tutti i numeri del campo $K_1 = Q(\sqrt{n})$ cioè tutti i numeri del tipo $a+b\sqrt{n}$, con a e b razionali.

Il passo successivo della costruzione ci permette di considerare rette passanti per punti con coordinate in K_1 e analogamente cerchi con centri e raggi in K_1 dal momento che tutti questi punti sono diventati costruibili. La costruzione come nel caso precedente può portare a punti le cui coordinate si trovano ancora in K_1 oppure possono richiedere l'estrazione di una radice quadrata $\sqrt{N}$ dove N è un numero di K_1. In questo secondo caso utilizzando quel punto possiamo costruire tutti i numeri che ottengo a partire da $\sqrt{N}$, posso ciò costruire tutti i numeri del tipo $A+B\sqrt{N}$ al variare di A e B in K_1. Questo nuovo campo di numeri ottenuto da con l'aggiunta delle radice di N

$$K_2 = \left\{A+B\sqrt{N} \ : \ A \in K_1, B \in K_1\right\} = K_1(\sqrt{N})$$

rappresenta tutti i numeri che posso costruire facendo quei particolari passi della costruzione.
La cosa continua nello stesso modo fino alla fine della costruzione. In definitiva avrò prodotto una catena di campi numerici di numeri reali.

$$\mathbf{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \ . \ . \ . \ \subset K_n \subset \mathbf{R}$$

ognuno dei quali è ottenuto dal precedente con l'aggiunta di una radice quadrata $\sqrt{\xi}$

$$K_{i+1} = K_i(\sqrt{\xi}) = \left\{P+Q\sqrt{\xi} \ : \ P \in K_i, Q \in K_i\right\}$$

Supponiamo ora per assurdo che il numero $\sqrt[3]{2}$ sia costruibile con riga e compasso. La costruzione produrrà una catena di campi numerici sempre più grandi fino ad arrivare alla fine della costruzione a un campo numerico K_n che contiene il numero $\sqrt[3]{2}$ mentre il campo precedente K_{n-1} non lo conteneva. Dato che $\sqrt[3]{2}$ non è un numero razionale[2] abbiamo n ≥ 1. D'altra parte la forma dei numeri che appartengono al campo K_n è nota dato che K_n è ottenuto da K_{n-1} con l'aggiunta di una radice quadrata

$$\sqrt{\xi} \notin K_{n-1}.$$

Ora, dato che $\sqrt[3]{2}$ appartiene a K_n ha la forma

(1) $$\sqrt[3]{2} = P+Q\sqrt{\xi}$$

elevando al cubo

(2) $$2 = P^3 + 3P^2Q\sqrt{\xi} + 3PQ^2\xi + Q^3\xi\sqrt{\xi} = P^3 + 3PQ^2\xi + (3P^2Q + Q^3\xi)\sqrt{\xi}$$

ma da questo segue che

(3) $$3P^2Q + Q^3\xi = 0$$

perché altrimenti potremmo ricavare $\sqrt{\xi}$ da questa relazione, precisamente si avrebbe

$$\sqrt{\xi} = \frac{2-P^3+3PQ^2\xi}{3P^2Q+Q^3\xi}$$

---

[2] E' impossibile che risulti $2q^3=p^3$ con p e q interi positivi senza fattori comuni.

il che è assurdo dato che il numero a secondo membro è ottenuto eseguendo somme, differenze prodotti e divisioni dei numeri $2, P, Q, \xi$ che sono in di K_{n-1}, e quindi anche il risultato $\sqrt{\xi}$ dovrebbe essere un elemento di K_{n-1} contro l'ipotesi.

D'altra parte Q non è zero perché in questo caso, dalla (1), seguirebbe $P = \sqrt[3]{2}$ cosa impossibile dato che P appartiene a K_{n-1} mentre $\sqrt[3]{2}$ non appartiene a K_{n-1}. Possiamo allora ricavare ξ dalla (3):

$$\xi = -\frac{3P^2}{Q^2}$$

sostituendo il valore ξ trovato nella relazione che abbiamo ricavato dalla (2), e tenendo conto della (3) troviamo

$$2 = P^3 + 3PQ^2\xi \qquad 2 = P^3 - 9P\frac{P^2}{Q^2}Q^2 = -8P^3 = (-2P)^3$$

e quindi -2P sarebbe una soluzione reale dell'equazione $X^3 = 2$. Ma questa equazione ha una sola soluzione reale[3] e quindi avremmo

$$-2P = \sqrt[3]{2}$$

Il che è assurdo perché abbiamo supposto che $\sqrt[3]{2}$ non si trovi in K_{n-1} mentre -2P è un elemento di K_{n-1}.

[3] $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$ e l'equazione x^2+ax+a^2 non ha radici reali essendo $\Delta=-3a^2$.