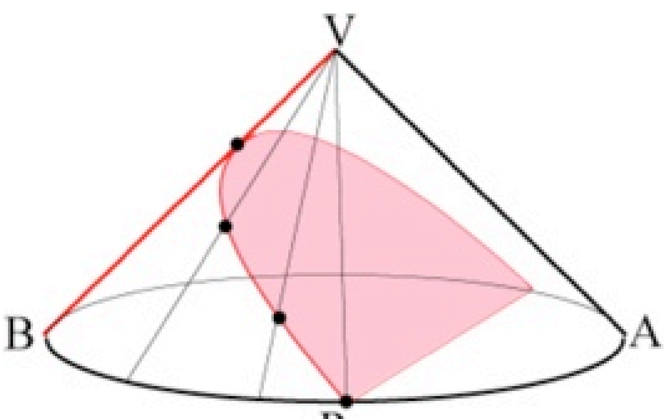
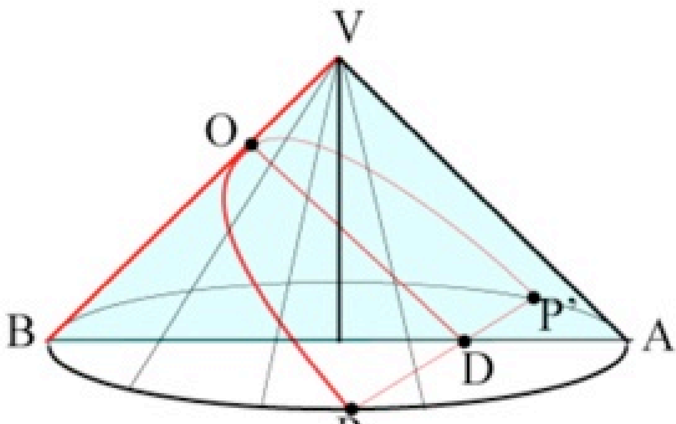
Quaderni di laboratorio N. 1
2009

La parabola come sezione conica

e lo strumento "pennino" della computer grafica

franco ghione



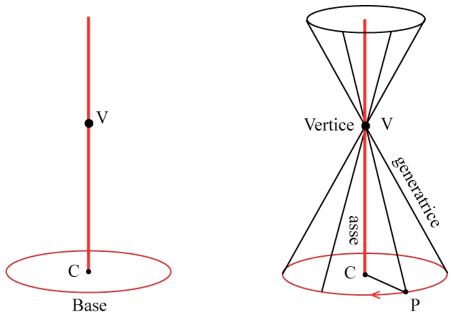


La parabola come sezione conica

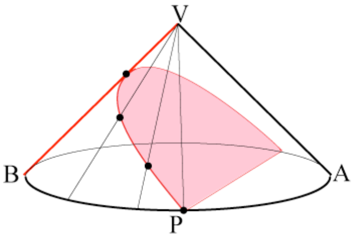
e lo strumento "pennino" della computer grafica

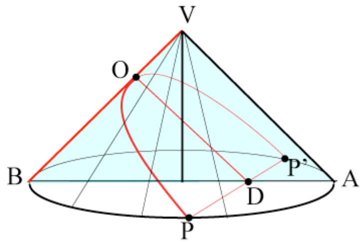
franco ghione

Consideriamo una circonferenza, una retta passante per il suo centro C e perpendicolare al piano della circonferenza e un punto V su tale retta.
Un *cono circolare retto* è l'insieme dei punti che appartengono alle rette che congiungono V con un punto P, al variare di P sulla circonferenza. La circonferenza si chiama *base* del cono, la retta perpendicolare al piano della circonferenza passante per il suo i centro C si chiama *asse del cono*, il punto V *vertice* e le infinite rette VP *generatrici* del cono. Se l'asse non è perpendicolare al piano del cono il cono non è un cono circolare retto ma semplicemente un cono circolare. Il cono è dunque una superficie e non un solido: i punti interni non fanno parte del cono.



E' facile vedere che tutti i piani paralleli al piano della base, sono perpendicolari all'asse e intersecano il cono in una circonferenza che ha il centro sull'asse.
Il movimento che un normale compasso esegue nel tracciare una circonferenza è un cono circolare retto: l'asse è la gamba fissa del compasso e la gamba con la matita che traccia la circonferenza la generatrice. Pensando a questo esempio possiamo anche definire, come fa Euclide, un cono come la superficie ottenuta ruotando l'ipotenusa VP di un triangolo rettangolo intorno a un suo cateto VC. La situazione che vogliamo studiare è quella che si ottiene quando il triangolo che ruota è un triangolo rettangolo isoscele. In questo caso l'angolo di apertura del cono è di 90 gradi e il cono si chiama *cono rettangolo*.
Consideriamo un piano *perpendicolare* alla generatrice VB del cono. Tale piano sarà quindi parallelo alla generatrice opposta VA e ogni altra generatrice lo incontrerà in un punto P. L'insieme di questi punti descrive una curva piana che si chiama *parabola* e che vogliamo studiare.





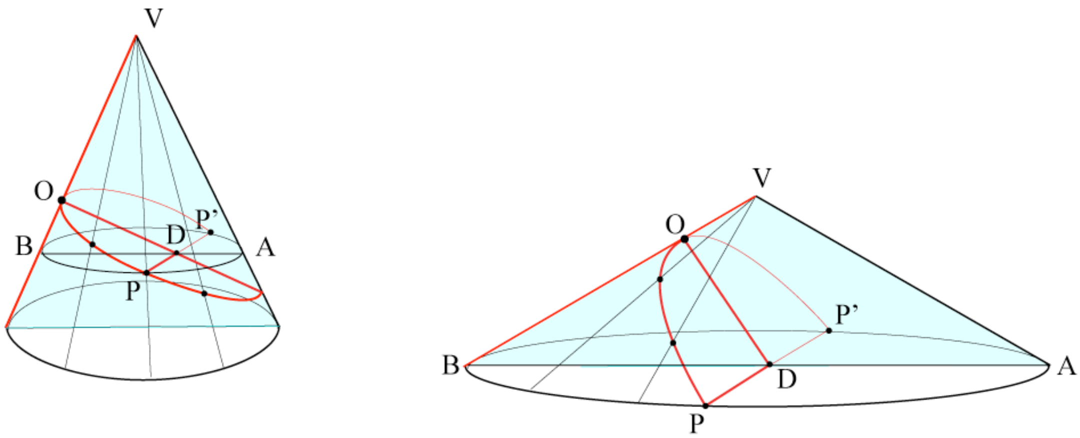
Consideriamo il piano che passa per l'asse del cono e che contiene la generatrice VB perpendicolare al piano della parabola. Tale piano incontra il piano della parabola in una retta OD che si chiama *asse della parabola*. La geometria che lega il cono e questi due piani è piuttosto complicata e può essere didatticamente illustrata servendosi di un cono reale con i vari piani in trasparenza. Questo oggetto concretamente astratto può essere manipolato dagli studenti, guardato da vari punti di vista e analizzato per capirne la geometria.
Ecco alcune proprietà rilevanti che derivano da questa analisi e che sono essenziali per descrivere la parabola.
1. La generatrice VO è perpendicolare al piano della parabola (piano rosa) per costruzione.
2. Il piano VAB (piano verde) incontra ogni cerchio parallelo alla base del cono in un diametro, perchè contiene l'asse.
3. Il piano verde è perpendicolare al piano della base (e a ogni altro a lui parallelo) perché contiene l'asse che è perpendicolare a quel piano[1].
4. Il piano verde è perpendicolare al piano della parabola perché contiene la retta VO che è perpendicolare a quel piano.
5. Il piano della parabola e il piano della base (e ogni altro a lui parallelo) sono perpendicolari al piano verde quindi la retta PDP' nella quale si intersecano è perpendicolare a quel piano[2].
6. La retta PP' è perpendicolare alla retta OD (perchè è perpendicolare al piano della parabola[3]) e alla retta AB (perchè è perpendicolare al piano verde).
7. Sul piano della base (e su ogni altro a lui parallelo) la corda PP' è bisecata dal diametro AB quindi PD=DP'. Ne consegue che la retta OD è una retta di simmetria.

Il punto O che abbiamo individuato sulla direttrice perpendicolare al piano della parabola si chiama *vertice della parabola* e la semiretta OD, come abbiamo detto, si chiama *asse di simmetria della parabola* o semplicemente *asse* della parabola.

La trattazione classica della coniche, quella che risale a Menecmo, Archimede e Euclide, considera le altre coniche nello stesso modo: quello che cambia è l'apertura del cono.

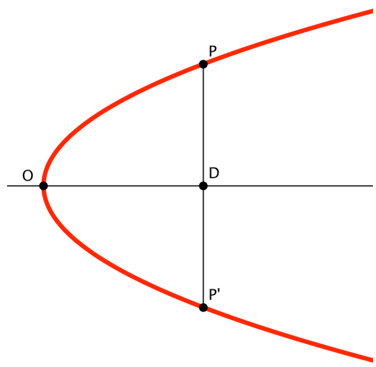
---

[1] Un piano α che contiene una retta perpendicolare a un piano β è perpendicolare a β.
[2] Se due piani sono perpendicolari a un dato piano allora la retta dove si incontrano è perpendicolare a quel piano.
[3] Una retta perpendicolare a un piano α è perpendicolare ad ogni retta di α che passa per il piede delle perpendicolare.

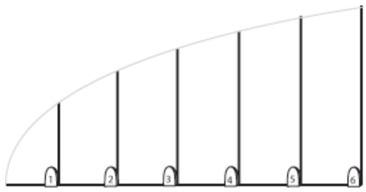


Si considera sempre un cono circolare retto e un piano *perpendicolare a una data generatrice* (rossa in figura). La curva intersezione è una conica: una parabola se il cono è rettangolo, un ellisse se il cono è acutangolo e una iperbole se il cono è ottusangolo. L'asse di simmetria della conica si ottiene intersecando il piano della conica con il piano che passa per l'asse del cono e per la generatrice perpendicolare al piano della conica (piano azzurro in figura): in questo modo tale piano è perpendicolare a quello della conica. Su ogni circonferenza parallela alla base abbiamo quindi una corda PP' perpendicolare al diametro AB proprio perchè il piano della conica e quello della base sono perpendicolari al piano verticale che passa per la generatrice perpendicolare al piano della conica. Si può definire in questo modo l'asse e i vertici della conica e vedere che si tratta di un *asse di simmetria*. Sono le prime proprietà qualitative comuni ai tre tipi di sezioni coniche.

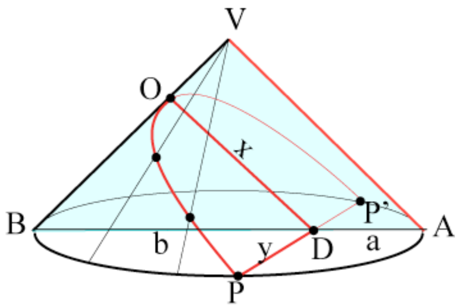
La parabola ha dunque un vertice O, un asse di simmetria che passa per O, e man mano che la linea si allontana dal vertice si apre sempre di più.



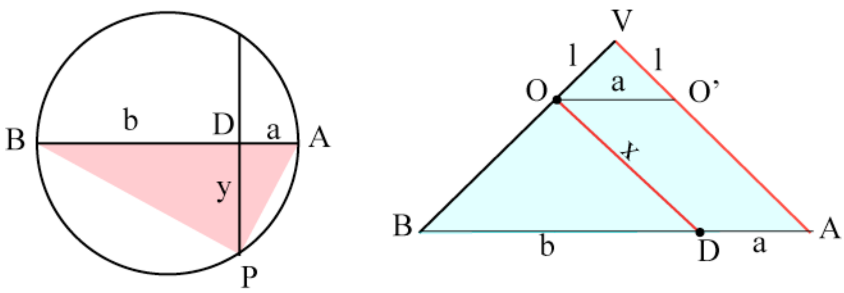
Per ottenere una descrizione quantitativa che esprima in che modo la curva si allarghi allontanandosi dal vertice, consideriamo un punto D sull'asse e in corrispondenza i due punti simmetrici P e P' sulla parabola. Seguendo Apollonio, chiamiamo *ascissa* il segmento OD e *ordinata* il corrispondente segmento DP. Il senso etimologico di queste parole, oggi di uso così frequente, suggerisce una immagine molto interessante che prefigura l'idea primitiva di funzione: l'ascissa (dal latino abscindere = tagliare) indica le tacche, le pietre miliari, i tagli equidistanziati che servono per misurare la distanza di un punto della via da un punto iniziale. Per descrivere una parabola si tratta ora di collocare ordinatamente, in corrispondenza ad ogni ascissa, dei segmenti, le ordinate appunto, ordinati in modo che siano tra loro paralleli.



Fissata una unità di misura per le lunghezze, chiamiamo x la lunghezza del segmento OD e y quella del segmento DP. Si tratta di vedere come cambia y al crescere di x. Per fare questo torniamo ad osservare il nostro cono:



Scegliamo un qualunque punto P sulla parabola e il corrispondente piano parallelo alla base del cono passante per P: tale piano interseca il cono in una circonferenza, il piano della parabola nel segmento PP' e il piano verticale che passa per l'asse del cono nel diametro AB.



Poiché il triangolo ABP è rettangolo in P, per il II teorema di Euclide, abbiamo

$$y^2 = ab$$

d'altra parte, ponendo l=VO=VO', dato che i triangoli BOD e OVO' sono simili, risulta x:b=l:a. Sostituendo si trova

$$y^2 = ab = a\frac{ax}{l} = \frac{2l^2x}{l} = 2lx = px$$

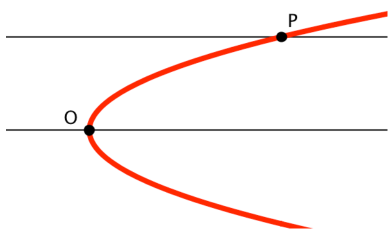
Il numero 2l=p si chiama il *lato retto* della parabola: è un parametro che caratterizza le diverse parabole. Tale parametro è il doppio della distanza tra i due vertici O e V della parabola e del cono rettangolo che definisce la parabola. Più il parametro p è piccolo e più il piano della parabola è vicino al vertice del cono e più la parabola è stretta. In definitiva, assegnato il parametro p, per trovare l'ordinata relativa

all'ascissa x basta costruire il medio proporzionale y tra x e p. La relazione p:y=y:x esprime infatti la relazione che abbiamo trovato $px= y^2$. La costruzione del medio proporzionale può farsi in molti modi e con uno strumento fisico, il parabolografo, che è descritto e utilizzato in un'altro quaderno. Una volta trovato il medio proporzionale, si costruisce il segmento DP e il suo simmetrico DP' rispetto all'asse della curva per ogni scelta dell'ascissa OD.
Una parabola è dunque definita in modo univoco a partire da un vertice, una semiretta che ha origine nel vertice (il suo asse di simmetria) e un parametro p (il suo lato retto).

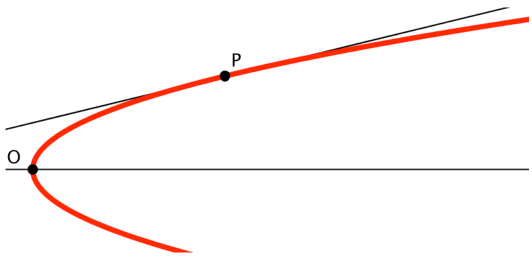
Vediamo ora come si trova la retta tangente alla parabola in un suo punto P. Intanto definiamo questa retta seguendo la falsariga di quello che viene fatto per le circonferenze dove la tangente è una retta che tocca la circonferenza lasciandola tutta in uno stesso semipiano.

Definizione di retta tangente a una parabola
Data una parabola e un suo punto P, una retta r passante per P è tangente alla parabola se

- r incontra la parabola solo nel punto P
- la parabola è interamente contenuta in uno dei due semipiani definiti dalla retta r.



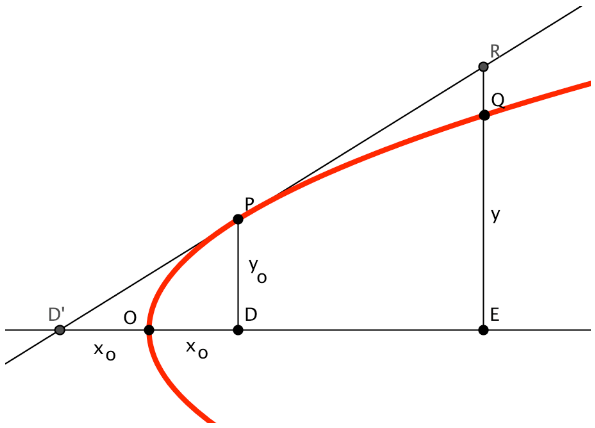
retta non tangente



retta tangente

Il teorema seguente insegna un modo geometrico molto semplice e costruttivo per trovare la retta tangente.

Teorema sulla tangente a una parabola
Data una parabola di vertice O *e un suo punto* P *di ascissa* OD, *sia* D' *il simmetrico di* D *rispetto al punto* O. *La retta* PD' *è la retta tangente alla parabola.*



Sia P il dato punto della parabola, D' il simmetrico di D rispetto ad O. Per dimostrare che la retta D'P è tangente alla parabola dobbiamo dimostrare che per ogni punto Q della parabola (sul ramo superiore cioè dove si trova P) l'ordinata EQ di Q è minore o uguale del segmento ER intercettato dalla retta D'P. I punti della parabola del ramo inferiore sono ovviamente nel semipiano inferiore e per quelli non c'è nulla da dimostrare.

Siano OD'=OD=x_0, OE=x le ascisse del dato punto P e del punto generico Q e siamo y_0 e y le rispettive ordinate. Poniamo z=ER e sia p il lato retto della parabola. Supponiamo, per assurdo, che il punto R sia interno alla parabola cioè che y > z. Essendo questi numeri positivi risulta anche

$$y^2 > z^2$$

$$\frac{y^2}{y_o^2} > \frac{z^2}{y_o^2} \quad , \quad \frac{px}{px_0} > \frac{z^2}{y_o^2}$$

I triangoli D'ER e D'DP sono simili quindi ER:ED'=PD:DD'. Sostituendo le misure numeriche abbiamo $z=(x+x_0)y_0/2x_0$ e quindi

$$\frac{px}{px_0} > \frac{z^2}{y_o^2} = \frac{(x+x_0)^2}{4x_0^2}$$

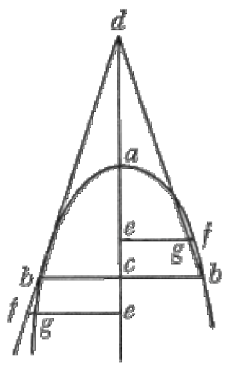
cioè $4xx_0 > (x+x_0)^2$ e questo è falso dato che

$$(x+x_0)^2 - 4xx_0 = (x-x_0)^2 > 0$$

tranne il caso in cui $x = x_0$ cioè P=Q.

Questa stessa dimostrazione si trova anche nel dialogo galileiano *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* nella quarta giornata. Riportiamo l'intero brano sia per la lingua sempre molto bella (la retta tangente è la retta che *non cade dentro la parabola ma fuori sì che solamente la tocca nell'istesso punto*) sia per confrontare quanto il linguaggio algebrico, del quale Galileo non disponeva, abbia enormemente semplificato, anche concettualmente, le dimostrazioni matematiche. Simplicio si perde nella dimostrazione, resta *sospeso* e Salviati deve ricordare una proposizione degli Elementi di Euclide (Libro II, proposizione 5) che traduce in termini di rettangoli e quadrati la relazione algebrica

$$4xx_0 = (x+x_0)^2 - (x-x_0)^2$$



Salv. .... Segniamo la parabola, della quale sia prolungato fuori l'asse ca in d, e preso qualsivoglia punto b, per esso intendasi prodotta la linea bc, parallela alla base di essa parabola; e posta la da eguale alla parte dell'asse ca, dico che la retta tirata per i punti d, b non cade dentro alla parabola, ma fuori, sì che solamente la tocca nell'istesso punto b. Imperò che, se è possibile, caschi dentro, segandola sopra, o, prolungata, segandola sotto, ed in essa sia preso qualsivoglia punto g, per il quale passi la retta fge. E perché il quadrato fe è maggiore del quadrato ge, maggior proporzione avrà esso quadrato fe al quadrato bc che 'l quadrato ge al medesimo bc; e perché, per la precedente, il quadrato fe al quadrato bc sta come la ea alla ac, adunque maggior proporzione ha la ea alla ac che 'l quadrato ge al quadrato bc, cioè che 'l quadrato ed al quadrato dc (essendo che nel triangolo dge come la ge alla parallela bc, così sta ed a dc): ma la linea ea alla ac, cioè alla ad, ha la medesima proporzione che 4 rettangoli ead a 4 quadrati di ad, cioè al quadrato cd (che è eguale a 4 quadrati di ad): adunque 4 rettangoli ead al quadrato cd aranno maggior proporzione che il quadrato ed al quadrato dc: adunque 4 rettangoli ead saranno maggiori del quadrato ed: il che è falso, perché son minori; imperò che le parti ea, ad della linea ed non sono eguali. Adunque la linea db tocca la parabola in b, e non la sega: il che si doveva dimostrare.

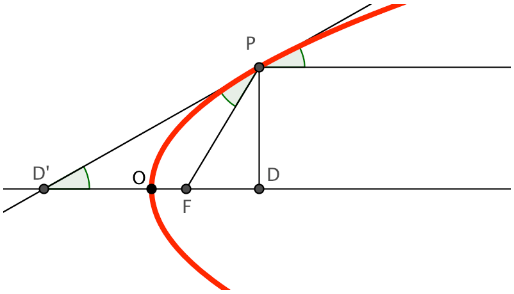
Simp. Voi procedete nelle vostre dimostrazioni troppo alla grande, ed andate sempre, per quanto mi pare, supponendo che tutte le proposizioni di Euclide mi siano così familiari e pronte, come gli stessi primi assiomi, il che non è. E pur ora l'uscirmi addosso, che 4 rettangoli ead son minori del quadrato de, perché le parti ea, ad della linea ed non sono equali, non mi quieta, ma mi lascia sospeso.

Salv. Veramente tutti i matematici non vulgari suppongono che il lettore abbia prontissimi al meno gli Elementi di Euclide: e qui, per supplire al vostro bisogno, basterà ricordarvi una proposizione del secondo...

Vediamo ora un'altra importante proprietà delle parabole che Bonaventura Cavalieri (1598-1647), nella sua opera intitolata *Lo specchio ustorio, ovvero trattato delle settioni coniche e alcuni loro mirabili effetti intorno al lume, caldo, freddo, suono, e moto ancora*, chiama *ammirabile.*

Teorema (Proprietà ammirabile)

Un qualunque raggio di luce, parallelo all'asse di una parabola di lato retto p, *si riflette internamente in un raggio che passa per un punto fisso* F *situato sull'asse della parabola a una distanza* p/4 *dal vertice.*



Il raggio riflesso PF forma con la retta tangente lo stesso angolo che forma il raggio incidente. Essendo il raggio incidente parallelo all'asse questo angolo è anche uguale all'angoloPD'O e quindi il triangolo PFD' è isoscele

D'F=FP

Sia x=OD l'ascissa del punto P e y= DP la sua ordinata. Chiamiamo f = OF. Calcoliamo questa distanza usando la proprietà caratteristica della parabola di lato retto p:

$$y^2 = px.$$

Abbiamo per il teorema precedente

OD'=OD=x

e quindi x+ f =FP , e applicando il teorema di Pitagora $(x+f)^2 = y^2 + (x-f)^2$ e quindi

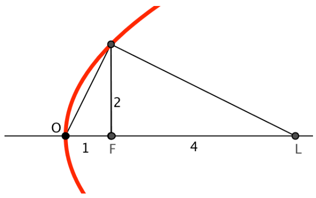
$$(x+f)^2 - (x-f)^2 = 4f\,x = px$$

da cui, se x non è zero, risulta 4f=p e quindi la distanza f di O da F non dipende dal punto P ed è la stessa qualunque sia il raggio incidente.

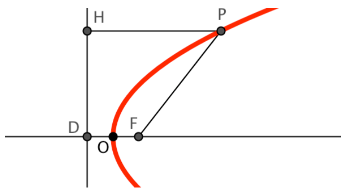
Il punto F viene chiamato il *fuoco* della parabola.

Esercizi

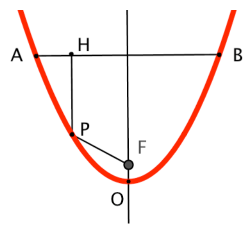
1. Dimostrare che l'ordinata del fuoco di una parabola di lato retto p vale p/2.
Nella figura F è il fuoco e FL è il lato retto della parabola



2. Sia F il fuoco di una parabola, D il suo simmetrico rispetto ad O e d la retta perpendicolare all'asse passante per D (*direttrice* della parabola). Dimostrae che un punto P appartiene alla parabola se e solo se PF=PH.



3. Proprietà meravigliosa.
Sia AB un segmento perpendicolare all'asse di una parabola e sia F il suo fuoco. Per ogni punto P dell'arco di parabola AOB la distanza PF + PH è costante.



Cavalieri nell'opera citata chiama meravigliosa questa proprietà perché permette di realizzare un semplice strumento a *filo teso* col quale disegnare la parabola: HP+PF è la lunghezza del filo che va tenuto fisso in F e mantenuto con una squadra perpendicolare a AB.

La forma algebrica della parabola

I metodi analitici, introdotti da Cartesio, permettono di tradurre nel linguaggio dell'algebra gli oggetti propri della geometria e attraverso la manipolazione algebrica dimostrare risultati spesso difficili da ottenere per via sintetica. Il metodo consiste nel rapportare i punti a un sistema di riferimento che viene scelto arbitrariamente una volta per tutte. In questo modo, nel piano, un punto P corrisponde biunivocamente a una coppia ordinata di numeri reali (x,y) che misurano rispetto a una fissata unità di misura, uniforme su tutto il piano, le distanze del punto da due assi ortogonali tra loro. Fatto questo, una curva definita da una qualche relazione geometrica, definisce una equazione F(x,y) = 0 che esprime algebricamente tale relazione. Ogni *forma geometrica* ha un suo corrispettivo algebrico: una sua *forma algebrica* che è definita dai caratteri particolari della sua equazione. Le equazioni in due incognite più semplici da studiare sono le equazioni polinomiali. Per dare un ordine ai diversi termini di un polinomio, lo si pensa e lo si scrive come una somma di *forme omogenee* di grado via via crescente: una forma di grado zero è una costante, una forma di grado uno (detta anche *forma lineare*) è una espressione del tipo ax+by, una forma di grado due (detta anche *forma quadratica*) è un trinomio $ax^2+bxy+cy^2$. In generale una forma F_m di grado m in due incognite è una espressione del tipo

$$F_m(x,y) = a_0x^m + a_1x^{m-1}y + a_2x^{m-2}y^2 +...+ a_my^m.$$

Un qualunque polinomio è dunque dato da una somma di polinomi omogenei che ne individuano il suo aspetto algebrico.

$$F(x,y)= F_m(x,y) + F_{m-1}(x,y) +... + F_1(x,y) + F_0(x,y)$$

Il grado più alto della forma non nulla è il primo carattere importante di un polinomio. Questo carattere si chiama *il grado del polinomio*. Ora, come abbiamo detto, ogni curva definita da una relazione geometrica tra i suoi punti definisce, una volta fissato un sistema di riferimento, una corrispondente equazione dalla quale, viceversa, è possibile ricavare la disposizione dei punti della curva iniziale: le soluzioni (x,y) dell'equazione corrispondono ai punti della curva e viceversa. In questo senso l'informazione geometrica contenuta nella relazione che definisce la curva è interamente tradotta nell'informazione algebrica contenuta nella corrispondente equazione. Naturalmente, se k è una costante numerica non nulla, le soluzioni dell'equazione F(x,y)=0 sono identiche a quelle dell'equazione kF(x,y)=0 e questo ci permette di modificare leggermente l'equazione potendo scegliere

opportunamente la costante k senza modificare l'insieme delle soluzioni cioè l'insieme dei punti della corrispondente curva. Questo non altera ovviamente la forma algebrica dell'equazione come ad esempio il suo grado.
Il *metodo* cartesiano permette prima do tutto di costruire un "vocabolario" che fa passare dal linguaggio puramente geometrico a quello algebrico. Con questo vocabolario i vari enti geometrici si trasformano in enti algebrici e viceversa. Le forme geometriche si traducono in forme algebriche. L'esempio più semplice si riferisce alle rette: la forma algebrica di una retta è una equazione di *primo grado*

$$ax+by + c = 0$$

e con questo intendiamo dire che, in virtù del teorema di Talete, le coordinate di un punto P che appartengono alla retta verificano una equazione di primo grado e viceversa le coppie ordinate (x,y) che verificano una equazione di primo grado danno luogo a punti che si dispongono lungo una retta.
Un fondamentale risultato di Fermat e Decartes stabilisce che la forma algebrica di una conica è un generico polinomio di secondo grado

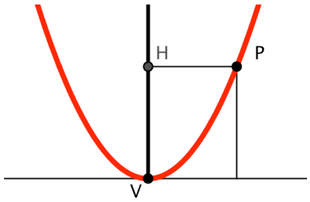
$$ax^2+bxy+cy^2 + dx+ey + f=0$$

Ma la parte più rivoluzionaria del metodo di Decartes consiste nel processo inverso. Possiamo infatti non solo tradurre la geometria classica nel linguaggio dell'algebra ma possiamo anche studiare nuovi oggetti geometrici, del tutto ignoti nella matematica greca, partendo direttamente dall'equazione. Ogni equazione in due incognite x e y definisce nel piano cartesiano una "curva". Si apre in questo modo un nuovo campo di ricerca: infiniti nuovi oggetti geometrici possono essere definiti e razionalmente indagati.
Abbiamo visto che la forma algebrica di una conica è un generico polinomio di secondo grado. Vediamo ora quale è la forma algebrica di alcune particolari coniche. Usando il teorema di Pitagora, si dimostra facilmente che una circonferenza è rappresentata da una equazione di secondo grado nella quale la parte quadratica è la somma dei quadrati delle incognite:

$$x^2+y^2 + ax+by + c =0$$

Vi sono delle eccezioni per particolari scelte dei coefficienti a,b,c che conducono a situazioni nelle quali l'equazione non ha soluzioni reali come ad esempio il caso $a=b=0$, $c \geq 0$, che possono essere analizzate ed esplicitate. Tuttavia se un definito luogo geometrico ha una equazione la cui forma è una somma di una forma di grado zero, una forma lineare e una forma quadratica uguale a kx^2+ky^2 (k non nullo) allora quel luogo è una circonferenza, viceversa per valori *generici* dei parametri a,b,c i punti le cui coordinate verificano l'equazione precedente si dispongono lungo una circonferenza.

Lo scopo di questo paragrafo e quello di trovare la forma algebrica della parabola e da questo ricavarne varie conseguenze. Come abbiamo visto, una parabola è definita da una semiretta, il suo asse di simmetria, un vertice V che è l'origine di questa semiretta, ed è formata da tutti e soli i punti P del piano per i quali la distanza PH del punto P dall'asse è media proporzionale tra la distanza HV di P da una retta perpendicolare all'asse e un segmento fisso AB detto lato retto della parabola.



OH : HP = HP : AB

Il teorema seguente traduce nel linguaggio algebrico questa geometria e ci porta come conclusione alla forma algebrica di una parabola.

Teorema

La forma algebrica di una parabola è una equazione di secondo grado in x e y la cui forma quadratica è un quadrato perfetto.

Possiamo scrivere questa equazione in modo che:

$$(ax+by)^2 = Ax + By + C$$

Ciò significa che le coppie (x,y) di numeri che verificano una equazione con quella forma sono le coordinate cartesiane dei punti di una parabola e viceversa le coordinate (x,y) di una punto di una data parabola verificano una equazione polinomiale di secondo grado la cui forma quadratica è un quadrato perfetto. Così, ad esempio, l'equazione $2x^2+4xy+2y^2=x$ rappresenta una parabola mentre $x^2 + 2y^2 = x+y$ no dal momento che $x^2 + 2y^2$ non è un quadrato perfetto.

Anche in questo caso si possono ottenere delle situazioni degeneri per particolari scelte dei coefficienti a,b,A,B,C, ma per una *scelta generica* di questi numeri l'equazione scritta sopra definisce una parabola. In questo caso non è difficile specificare cosa significhi una scelta generica: i casi eccezionali si ottengono quando aB-bA=0. Questo numero come vedremo nel corso della dimostrazione è proporzionale al lato retto della parabola.

La dimostrazione del teorema si basa sulla formula che esprime la distanza di un punto da una retta. Se ax+by+c=0 è l'equazione di una retta r e se $P=(x_P,y_P)$ sono le coordinate di un punto del piano allora la distanza di P da r è data da

$$\left|\frac{ax_P + by_P + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

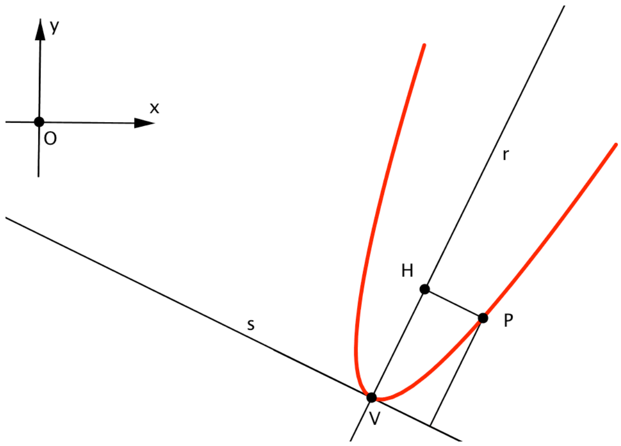
Osserviamo che se i coefficienti a e b della retta sono normalizzati, cioè se $\sqrt{a^2+b^2} = 1$, e se F(x,y)=ax+by+c è l'equazione della retta, allora la distanza *con segno* di P da r è data semplicemente dal numero $F(x_P,y_P)= ax_P+by_P+c$: se questo numero è positivo il punto si trova in uno dei due semipiani individuati da r, se è nullo si trova sulla retta r e se è negativo nell'altro semipiano.

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema.

Dimostriamo che le coordinate (x,y) di un punto P di una parabola verificano una equazione algebrica che ha la forma che abbiamo detta. Sia ax+by+c =0 l'equazione dell'asse della parabola, che possiamo supporre nella sua forma normale. Se infatti non lo fosse, possiamo dividere tutti i coefficienti dell'equazione per $\sqrt{a^2+b^2}$. La nuova equazione, che rappresenta la stessa retta, diventa

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

che è ora in forma normale.



Sia P un generico punto del piano: P appartiene alla parabola se e solo se

$$PH^2 = pHV$$

essendo p il lato retto, PH la distanza di P dalla retta r e HV la distanza di P dalla retta s ortogonale a r passante per V nel semipiano dove si trova la parabola. Dato che la retta r contiene il punto $V=(x_0,y_0)$ la sua equazione normalizzata ha la forma

$r \quad : \quad a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ con $\sqrt{a^2+b^2}=1$ la retta s perpendicolare ad r passante per V avrà equazione

$$s \quad : \quad b(x-x_0) - a(y-y_0)=0$$

Fissiamo i segni dei coefficienti b e -a di questa equazione in modo che per ogni punto $P=(x_P,y_P)$ del semipiano della parabola sia $b(x_P-x_0) - a(y_P-y_0) > 0$.

Abbiamo allora

$$PH^2 = [a(x-x_0) + b(y-y_0)]^2 \ \text{ e } \ HV= b(x-x_0) - a(y-y_0)$$

Le coordinate (x,y) definiscono dunque un punto della parabola se e solo se

$$[a(x-x_0) + b(y-y_0)]^2 = p\,[b(x-x_0) - a(y-y_0)].$$

Sviluppiamo i calcoli per vedere forma algebrica di questa equazione.

$[(ax+by)-d]^2 = pbx-pay-p(bx_0-ay_0)$ dove, per abbreviare le notazioni, abbiamo posto $d=ax_0+by_0$

e l'equazione dell'asse $ax+by=d$.

Troviamo

$$(ax+by)^2 = 2d(ax+by)-d^2 + pbx-pay-p(bx_0-ay_0) = (2da+pb)x+(2db-pa)y - [d^2 + p(bx_0-ay_0)]$$

cioè, come si voleva dimostrare,

$$(ax+by)^2 = Ax+By+C.$$

In questo modo abbiamo dimostrato che se un punto $P=(x,y)$ si trova sulla parabola data, allora le sue coordinate verificano una equazione del tipo $(ax+by)^2 = Ax+By+C$. Viceversa se (x,y) verificano l'equazione data allora verificano anche l'equazione $[a(x-x_0) + b(y-y_0)]^2 = p\,[b(x-x_0) - a(y-y_0)]$ e quindi la distanza di P dalla retta r è media proporzionale tra la distanza di P da s e il parametro p: $d(P,r)^2 = pd(P,s)$. Ne segue che il punto P appartiene alla data parabola.

Le tre costanti A,B,C che dipendono solo dai dati del problema (a,b,x_0,y_0,p) posso essere esplicitate:

$$\begin{cases} 2da + pb = A \\ 2db - pa = B \\ d^2 + p(bx_0 - ay_0) = -C \end{cases}$$

risolvendo le prime due equazioni nelle incognite p, d troviamo, tenendo conto che $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = d = \dfrac{aA + bB}{2} \\ p = bA - aB \end{cases}$$

da qua risulta che, essendo p il lato retto della parabola deve essere diverso da zero il numero bA-aB. In particolare abbiamo ottenuto il seguente risultato:
il lato retto della parabola di equazione $(ax+by)^2 = Ax+By+C$ *vale*

$$p = \frac{|bA - aB|}{\sqrt{\left(a^2 + b^2\right)^3}}$$

La divisione per la radice dipende dal fatto che, per normalizzare, abbiamo diviso l'equazione per la quantità a^2+b^2.
Dimostriamo ora che l'insieme dei punti le cui coordinate verificano l' equazione

$$(ax+by)^2 = Ax+By+C \quad \text{con } bA-aB \neq 0$$

si trovano su una parabola. Per dimostrare questo basta trovare le caratteristiche geometriche che definiscono la presunta parabola cioè il suo asse, il suo vertice e il suo lato retto. Cominciamo con normalizzare l'equazione dividendo ambo i membri per a^2+b^2. Nell'equazione così ridotta, che rappresenta lo *stesso* luogo di punti, i due coefficienti a e b della forma quadratica sono normalizzati. Sia r la retta di equazione:

$$ax + by = \frac{aA + bB}{2}$$

questa retta è il candidato per essere l'asse della parabola che cerchiamo mentre p = bA-aB (o il suo opposto se questo numero fosse negativo) è il candidato per essere il suo lato retto. Non ci resta che individuare il vertice. Per fare questo risolviamo il sistema

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = \dfrac{aA + bB}{2} \\ \left(\dfrac{aA + bB}{2}\right)^2 + (bA - aB)(bx_0 - ay_0) = -C \end{cases} \qquad \begin{cases} ax_0 + by_0 = \dfrac{aA + bB}{2} \\ bx_0 - ay_0 = \dfrac{C + \left(\dfrac{aA + bB}{2}\right)^2}{aB - bA} \end{cases}$$

Quello che conta ora non è risolvere esplicitamente il sistema quanto poter affermare che, poiché bA-aB non è zero, il sistema è compatibile e possiamo trovare una unica soluzione x_0, y_0, che risolve il sistema. Tali numeri ci forniscono in funzione dei dati (a,b,A,B,C) le coordinate del vertice. Ora per quello che abbiamo visto prima, l'equazione della parabola che ha come asse la retta r come lato retto p e come vertice il punto $V=(x_0,y_0)$ le cui coordinate verificano il sistema precedente, è proprio

$$(ax+by)^2 = Ax+By+C$$

dato che tutte le uguaglianze algebriche possono essere *ripercorse a ritroso*:
da

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = \dfrac{aA+bB}{2} \\ bx_0 - ay_0 = \dfrac{C+\left(\dfrac{aA+bB}{2}\right)^2}{aB-bA} \end{cases}$$

ricaviamo, ponendo $d=ax_0+by_0$

$$\begin{cases} 2da + pb = A \\ 2db - pa = B \\ d^2 + p(bx_0 - ay_0) = -C \end{cases}$$

e da qua troviamo che l'equazione $(ax+by)^2 = Ax+By+C$ è identica all'equazione

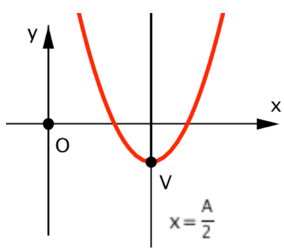
$$[a(x-x_0) + b(y-y_0)]^2 = p\,[b(x-x_0) - a(y-y_0)]$$

che è l'equazione di una parabola.

Conoscere la forma algebrica di una parabola ci permette di risolvere algebricamente e senza difficoltà molti problemi non banali.
Intanto possiamo osservare che l'equazione generale della parabola dipende da 4 coefficienti liberi a,A,B,C (il coefficiente b è legato ad a dalla relazione $a^2+b^2=1$) e quindi per 4 punti generici del piano passa una parabola. Per trovare questa parabola si cerca la sua equazione e per fare questo si calcolano i 4 coefficienti a,A,B,C imponendo il passaggio per i 4 punti assegnati: si trova così un sistema lineare di 4 equazioni (una equazione per ogni punto) nelle 4 incognite a,A,B,C che risolto fornisce l'equazione cercata.

Vi sono poi alcuni casi particolari particolarmente interessanti.

$x^2=Ax+By+C$



Questa equazione è già normalizzata: a=1,b=0 e non degenera se $B\neq 0$. In questo caso abbiamo una parabola il cui asse è parallelo all'asse delle ordinate e ha equazione

$$x=A/2.$$

Il lato retto vale $p=|B|$. Se $B>0$ la concavità è verso l'alto mentre se $B<0$ verso il basso

Il vertice della parabola si trova facilmente intersecando la curva con il fascio di rette $y=t$ e cercando quella che incontra la parabola in due punti coincidenti. Questo corrisponde alla condizione algebrica che l'equazione in x di secondo grado $x^2=Ax+Bt+C$ abbia il delta uguale a zero, cioè $A^2+4tB+4C=0$ e quindi l'ordinata y_V del vertice, che è uguale al valore t del parametro che realizza questa condizione è:

$$y_V = -\frac{A^2+4C}{4B}$$

Un caso particolare interessante riguarda il grafico di una funzione polinomiale di secondo grado $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$, cioè l'insieme dei punti del piano cartesiano $(x,f(x))$ che si ottengono facendo variare x nell'insieme dei numeri reali. Questo grafico è una parabola di asse parallelo all'asse delle ordinate dato che l'equazione del grafico della funzione è $y=f(x)$ cioè

$$x^2 = \frac{-bx+y-c}{a}$$

Il lato retto di questa parabola è $p=|1/a|$ e la concavità è verso l'alto se $a>0$, verso il basso nel caso contrario.

Il legame tra funzioni polinomiali di secondo grado in una variabile e la parabola è molto stretto. Abbiamo infatti il seguente importante

Teorema
I punti del piano cartesiano le cui coordinate sono espresse come generiche funzioni polinomiali di secondo grado in una variabile t,

$$\begin{cases} x = at^2+bt+c \\ y = a't^2+b't+c' \end{cases}$$

al variare di t si dispongono lungo una parabola e viceversa.
Nell'enunciato di questo teorema per funzioni generiche intendiamo tutte le possibili coppie di funzioni polinomiali di secondo grado tranne quelle per le quali $ab'-ba'=0$.
Diamo le linee della dimostrazione senza sviluppare completamente i calcoli. Dimostriamo che i punti le cui coordinate sono espresse con due generici polinomi di secondo grado descrivono una parabola. Poniamo $u=t^2$ e $v= t$, risulta ovviamente

$$v^2 = u.$$

Sostituendo u e v nel sistema iniziale troviamo un sistema di due equazioni lineari in due incognite u e v.

$$\begin{cases} x = au+bv+c \\ y = a'u+b'v+c' \end{cases}$$

La condizione $ab'-ba' \neq 0$ ci garantisce che possiamo risolvere il sistema ed esprimere $u=u(x,y)$ e $v=v(x,y)$ come funzioni lineari in x e y. La condizione $v(x,y)^2 = u(x,y)$ ci dice che le coordinate x e y verificano l'equazione di una parabola.
Viceversa se abbiamo l'equazione della parabola $(ax+by)^2 =Ax+By+C$, poniamo

$$\begin{cases} u = Ax + By + C \\ v = ax + by \end{cases}$$

Dato che (x,y) verificano l'equazione della parabola, abbiamo $v^2 = u$. D'altra parte $bA-Ba \neq 0$ e quindi il sistema precedente può essere invertito e possiamo esprimere x e y come funzioni lineari di u e v. Sostituendo in queste equazioni v=t e $u=t^2$, abbiamo trovato x e y come funzioni polinomiali di secondo grado in t.

Ricapitolando l'equazione cartesiana della parabola $(ax+by)^2 = Ax+By+C$ è una equazione polinomiale di secondo grado in due incognite, essa ha infinite soluzioni che sono implicitamente definite dall'equazione. Per risolvere l'equazione ed esplicitare le infinite soluzioni si deve esprimere le incognite x e y funzioni di un parametro t in modo che per ogni valore di t si abbia una soluzione dell'equazione:

$$\begin{cases} x = at^2 + bt + c \\ y = a't^2 + b't + c' \end{cases}$$

Queste equazioni si chiamano le *equazioni parametriche* della parabola, esse sono state calcolate facendo operazioni razionali sui coefficienti dell'equazione cartesiana della parabola il che implica che, se assegno a t un valore razionale, il risultato è una *soluzione razionale* dell'equazione iniziale. Ciò può essere utile per trovare le soluzioni razionali o intere di determinate equazioni diofantine. Ecco un esempio.

Problema

Trovare due numeri interi la cui somma sia uguale alla loro differenza al quadrato.

Se i due numeri sono x ed y la condizione implica che

$$x+y=(x-y)^2.$$

Questa è l'equazione di una parabola che può essere risolta seguendo il procedimento che abbiamo esposto: si pone

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

quindi $v^2=u$. Si tratta ora di invertire queste equazioni e sostituire v con t

$$\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} = \dfrac{t^2+t}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} = \dfrac{t^2-t}{2} \end{cases}$$

Per t=1 troviamo la coppia 1,0. Per t=2 la coppia 3,1, per t=3 la coppia 6,3, per t=4 la coppia 10, 6 ecc. Per ogni valore intero di t troviamo una soluzione intera dell'equazione $x+y=(x-y)^2$.

La conoscenza della forma algebrica di una parabola ci permette di dimostrare facilmente un importante risultato probabilmente già noto ad Archimede.

Teorema

Una parabola si trasforma tramite una affinità in una parabola.

La dimostrazione è molto semplice e ancora si basa non tanto sul calcolo algebrico quanto nel confronto di forme algebriche. Una affinità è una trasformazione invertibile definita da equazioni lineari

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases} \quad \text{e inversamente} \quad \begin{cases} x = a_1'x' + b_1'y' + c_1' \\ y = a_2'x' + b_2'y' + c_2' \end{cases}$$

Ora, i punti (x,y) che verificano l'equazione $(ax+by)^2 = Ax+By+C$ si trasformato in punti (x',y') che verificano l'equazione

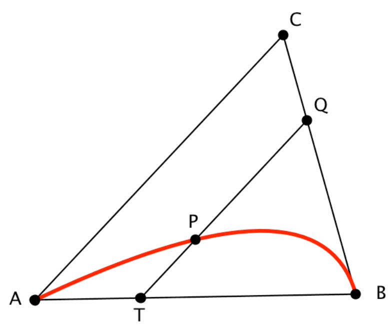
$$[a(a'_1\, x' + b'_1 y' + c'_1) + b(a'_2\, x' + b'_2\, y' + c'_2)]^2 = A(a'_1\, x' + b'_1\, y' + c'_1) + B(a'_2\, x' + b'_2\, y' + c'_2) + C$$

che è ancora il quadrato di una forma lineare in x' , y' uguagliato a un polinomio di primo grado in x',y' e che rappresenta dunque una parabola.

Questo fatto è non evidente dato che la proprietà geometrica che definisce una parabola è di natura metrica e non affine facendo intervenire le distanze di un punto da due rette perpendicolari. Anche la proprietà che lega fuoco e direttrice che potrebbe servire per definire una parabola come luogo è formulata in termini metrici.

Il carattere affine di una parabola ci permette di dimostrare importanti proprietà di questa curva usando un nuovo tipo di ragionamento che potremmo chiamare dinamico e che, per quanto c'è dato sapere, è stato usato per la prima volta da Desargues (XVII secolo) in ambito proiettivo. Si vuole dimostrare che una determinata figura gode di una certa proprietà, per fare questo si trasforma la figura in una più semplice con una trasformazione che conserva la proprietà che si vuole dimostrare e si dimostra che la proprietà vale per la figura trasformata e da li si risale a quella di partenza.
Ecco un esempio relativo a una importante proprietà delle parabole usata da Archimede nel *Metodo* per calcolare l'area di un segmento parabolico. Questa proprietà leggermente modificata è essenziale nella attuale computer grafica.

Teorema (Archimede)



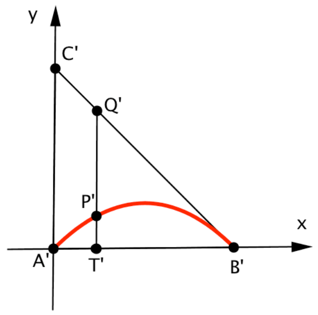
Consideriamo un triangolo A,B,C. *Per ogni punto* T *della base* AB *si conduca la retta per* T *parallela al lato* AC *e sia* Q *il punto in cui questa retta incontra il lato* CB. *Costruiamo su questa retta il punto* P *tale che*

TP:TQ=AT:AB

In queste condizioni il luogo descritto da punto P *al variare di* T *su lato* AB *è un arco di parabola passante per* A *e tangente in* B *alla retta* BC.

Vi sono molte vie per dimostrare il teorema sia sintetiche che analitiche. Il metodo che proponiamo serve a illustrare un tipo di ragionamento basato su considerazioni

"dinamiche". Cominciamo col dimostrare il teorema di Archimede in una situazione particolarmente semplice per poi ricavare il caso generale trasformando la configurazione con una affinità.
Consideriamo un triangolo A'B'C' rettangolo in A' e isoscele e fissiamo un sistema di coordinate cartesiane con l'origine in A' l'asse delle ordinate coincidente col lato A'B' del triangolo e scegliamo come unità di misura la lunghezza del lato A'B'=A'C'. In questo modo le coordinate dei tre punti sono A'=(0,0), B'=(1,0) e C'=(0,1). Sia T' un punto del lato A'B'. Le coordinate di T' saranno (t,0) con $0 \leq t \leq 1$. La retta C'B' ha equazione x+y=1 e il punto Q' è l'intersezione di tale retta con la retta x=t. Abbiamo dunque Q'=(t,1-t). L'ordinata P'T' del punto P' si ottiene a partire dalle relazione



$$P'T' : T'Q' = A'T:A'B'$$

cioè y= t(1-t). Le equazioni parametriche del luogo descritto da P' sono dunque

$$\begin{cases} x = t \\ y = t(1-t) \end{cases}$$

e quella cartesiana $y = x-x^2$.
Si vede così che il luogo descritto da P' è una parabola e che la retta x+y=1 è tangente in B' a questa parabola.
Sappiamo che esiste una affinità che trasforma il triangolo A'B'C' in un qualunque triangolo ABC. Il punto T' si trasformerà in un punto T sul corrispondente lato AB del triangolo e la retta T'Q' nella retta TQ parallela al lato AC dato che le affinità *conservano il parallelismo*. Abbiamo anche

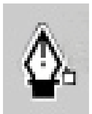
$$A'T':A'B'=AT:AB \text{ e } T'P':T'Q'=TP:TQ$$

dato che le affinità *conservano i rapporti tra segmenti consecutivi*. Il luogo descritto da P è dunque l'immagine tramite l'affinità del luogo descritto da P' e dato che questo luogo è un arco di parabola anche il luogo descritto da P sarà un arco di parabola dato che una affinità *conserva le parabole*.

Lo strumento *pennino* nella computer grafica

Dietro le meravigliose figure che si possono realizzare col computer e che oggi rappresentano il linguaggio della moderna grafica e del design di ogni oggetto di uso comune, ci sono le curve di Bezier che il computer traccia automaticamente usando un particolare strumento che si chiama il *pennino* e che i nuovi disegnatori sanno usare con estrema perizia.

Pierre Étienne Bézier (Parigi, 1 settembre 1910 – Parigi, 25 novembre 1999) è stato un ingegnere e matematico francese, creatore delle curve Bézier e delle superfici Bézier che sono ora alla base della maggior parte del Computer Aided Design e dei sistemi di computer grafica. Lavorò presso la Renault dal 1933 al 1975, dove realizzò il suo sistema UNISURF CAD CAM.
Il pennino è uno strumento che permette agli operatori grafici di realizzare disegni curvilinei bellissimi e precisi oggi alla base della così detta grafica vettoriale.



Icona del pennino

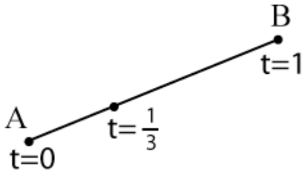
La grafica vettoriale ha il pregio di non perdere in definizione quando una figura costruita con questo tipo di tecnica viene ingrandita o rimpicciolita. Il motivo per cui questo avviene è l'ingrandimento o rimpicciolimento avviene con una omotetia che trasforma non i singoli punti della figura ma il *processo* con il quale la figura è costruita. Cercheremo di spiegare questa idea illustrando il funzionamento del pennino. Dobbiamo, per cominciare, immaginare lo schermo del computer come un piano cartesiano ogni punto del quale (pixel) è definito da due coordinate: l'ascissa e l'ordinata. Consideriamo due punto $A=(a_1,a_2)$ e $B=(b_1,b_2)$ e supponiamo di voler disegnare il segmento che unisce A con B. Si clicca col pennino nel punto A poi si clicca nel punto B e appare immediatamente il segmento che unisce A con B. Se poi si continua a cliccare un punto C, D ecc appare la spezzata ABCD...Se si ingrandisce questa spezzata appare perfettamente definita. Cosa è accaduto? I punti X=(x,y) del piano dati da

$$\begin{cases} x = a_1(1-t)+b_1t \\ y = a_2(1-t)+b_2t \end{cases}$$

che possiamo scrivere, usando una notazione vettoriale,

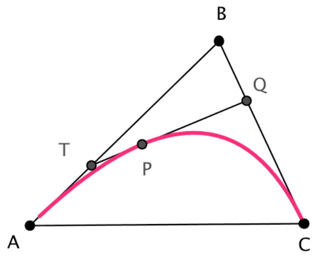
$$X=(1-t)A + tB \quad 0 \le t \le 1$$

al variare di t tra 0 e 1, descrivono il segmento che unisce A con B. La cosa non è difficile da vedere dato che le equazioni precedenti, eliminando il parametro t, si riducono a una equazione lineare il x e y che rappresenta appunto una retta. Inoltre per t=0 abbiamo il punto A, per t=1 il punto B, per t=1/2 il punto medio tra A e B e, in generale, per t=k il punto K del segmento AB per il quale AK:AB=k.



Per ingrandire la figura non si trasformano, con la relativa affinità, tutti i punti del segmento AB ma si trasformano solo i punti A e B e, ai nuovi punti A' , B', così ottenuti, si applica lo stesso processo precedente ridisegnano, con quella formula, il nuovo segmento A'B'.
Per disegnare delle linee curve Bezier si serve di archi di parabole che vengono descritte mediate la seguente proprietà.

Teorema (Bezier)



Consideriamo un triangolo A,B,C. *Per ogni punto* T *del lato* AB *si consideri un corrispondente punto Q sul lato BC tale che*

$$AT : AB = BQ : BC$$

e sul segmento TQ *si consideri un ulteriore punto* P *tale che*

$$BQ : BC = TP : TQ$$

In queste condizioni il luogo descritto da punto P *al variare di* T *sul lato* AB *è un arco di parabola tangente in* A *alla retta AB e tangente in* C *alla retta* CB.

Il teorema è molto simile al teorema di Archimede ed anzi come vedremo i due enunciati sono equivalenti.
La dimostrazione può farsi in modo diretto. Fissiamo un qualunque sistema di riferimento e un parametro t, ($0 \leq t \leq 1$). Per quanto abbiamo visto prima il punto T del segmento AB tale che AT:AB=t avrà coordinate

$$T=(1-t)A + tB$$

Analogamente per Q e P:

$$Q=(1-t)B + tC$$

$$P=(1-t)P+tQ=(1-t)[(1-t)A+tB]+t[(1-t)B + tC]$$

Sviluppando le parentesi abbiamo

$$Q=(1-t^2)A + 2t(1-t)B + t^2 C$$

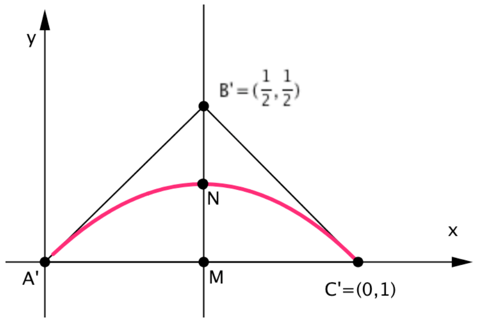
passando alle coordinate

$$\begin{cases} x = a_1(1-t)^2 + 2t(1-t)b_1 + t^2c_1 = (a_1 - 2b_1 + c_1)t^2 + 2(b_1 - a_1)t + a_1 \\ y = a_2(1-t)^2 + 2t(1-t)b_2 + t^2c_2 = (a_2 - 2b_2 + c_2)t^2 + 2(b_2 - a_2)t + a_2 \end{cases}$$

e queste sono le equazioni parametriche di una parabola dato che, come si può dimostrare facilmente,

$$(a_1-2b_1+c_1)(b_2-a_2) - (a_2-2b_2+c_2)(b_1-a_1) = 0$$

se e solo se i tre punti A,B,C sono allineati. Per vedere che le rette AB e BC sono tangenti alla parabola, usiamo riduciamoci con una affinità a un caso più semplice.



Consideriamo il caso in cui i tre punti siano A'=(0,0), B'=(1/2,1/2) C'=(1,0), le equazioni parametriche della parabola sono

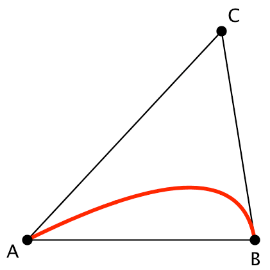
$$\begin{cases} x = t(1-t)+t^2 = t \\ y = t(1-t) \end{cases}$$

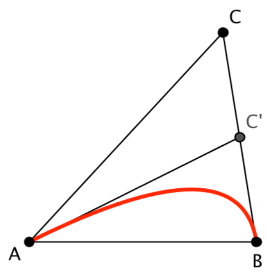
mentre l'equazioni cartesiana è

$$y=x(1-x).$$

Si vede allora che la retta x=1/2 è l'asse di simmetria della parabola e che il vertice N ha ordinata _.

Ne segue che MN=NB' e quindi le due rette A'B' e C'B' sono tangenti alla parabola. Trasformando con una affinità il triangolo A'B'C' nel triangolo ABC, l'arco di parabola si trasforma nel corrispondente arco di parabola e le rette tangenti in rette tangenti.





Osserviamo che l'arco di parabola costruita da Archimede a partire dal triangolo ABC è lo stesso di quello costruito da Bezier a partire dal triangolo ABC' se si prende come C' il punto medio tra B e C.

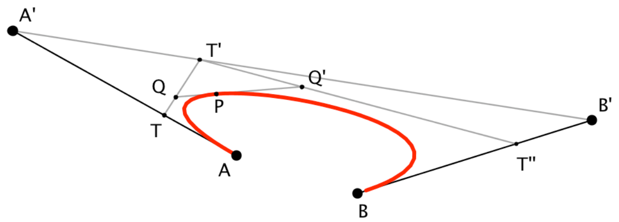
Chiamiamo $\mathcal{P}$(A,A',B) l'arco di parabola che passa per A per B e che è tangente alle rette AA' e BA'. E' molto facile costruire questo arco conoscendo le coordinate dei vertici del triangolo: i suoi punti si ottengono dando a t tutti i valori da 0 a 1 e per ogni t disegnando il punto

$$X = (1-t)^2 A + 2t(1-t) A' + t^2 C$$

Torniamo ora allo strumento pennino nella computer grafica. Se clicchiamo in un punto A e, tenendo premuto il mouse, *trasciniamo* il pennino fino al punto A' e poi lasciamo il mouse e clicchiamo in un terzo punto B il computer disegna, in un tempo brevissimo, l'arco di parabola $\mathcal{P}$(A,A',B). La cosa interessante è il carattere affine di questo arco. Ogni affinità (come ad esempio rotazioni, dilatazioni, contrazioni, similitudini, omotetie) trasforma l'arco di parabola $\mathcal{P}$(A,A',B) nel nell'arco di parabola definito dai trasformati dei vertici del triangolo. Se vogliamo ad esempio ingrandire l'arco, con una omotetia ϕ, non dobbiamo trasformare tutti i punti dell'arco ma basta trasformare A, A' e B e poi disegnare da capo l'arco di parabola $\mathcal{P}(\phi(A), \phi(A'), \phi(B))$. Il risultato che si ottiene è proprio il trasformato di tutti i punti dell'arco iniziale $\mathcal{P}$(A,A',B): in formule

$$\phi(\ \mathcal{P}(A,A',B)\ ) = \mathcal{P}(\phi(A), \phi(A'), \phi(B)).$$

Oltre ai segmenti e alle parabole, il pennino disegna anche archi di cubiche. Accenniamo brevemente per completezza a questo aspetto.
Supponiamo di cliccare col pennino in un punto A e poi di trascinare il pennino in un punto A', supponiamo ora di cliccare in un punto B, mantenendo però premuto il mouse e traslando il pennino in un nuovo punto B'. Abbiamo ora 4 punti e il computer disegna una curva che passa per A con la direzione AA' e per B con la direzione BB'.



Le coordinate dei punti di questa curva si ottengono iterando il procedimento precedente. Dato un valore $0\leq t\leq 1$ si determinano i punti T sul lato AA', T' sul lato A'B', T'' sul lato B'B in modo che

$$t=AT:AA'=A'T':A'B'=B'T'':B'B$$

si determinano poi due punti Q e Q' sui segmenti TT' e T'T'' in modo che, per lo stesso t, valga

$$t=TQ:TT'=T'Q':T'T''$$

e infine un punto P sul segmento QQ' in modo che

$$t=QP:QQ'.$$

Il luogo descritto da P è un curva le cui equazioni parametriche si trovano facilmente come nel caso precedente. Se X=(x,y) sono le coordinate del punto P risulta

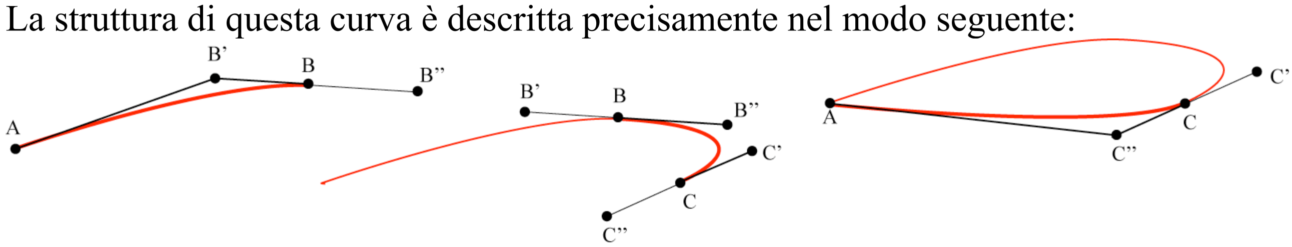
$$X = (1-t)^3\, A + 3t(1-t)^2\, A' + 3t^2(1-t)\, B' + t^3\, B$$

Come nei casi precedenti anche questo arco. per come è stato definito, si conserva per affinità, nel senso che, se ϕ è una affinità allora

$$\phi(\ \mathcal{P}(A,A',B',B)\ ) = \mathcal{P}(\phi(A), \phi(A'), \phi(B'), \phi(B)).$$

E' utile realizzare tali curve con un software di geometria dinamica e vedere come varia la curva variando i punti A e B e i "manici" AA' e BB'.
Ecco un esempio.
Il profilo seguente è formato da due archi di parabola e da un arco di cubica.

La struttura di questa curva è descritta precisamente nel modo seguente:



Si clicca nel punto A, si clicca nel punto B e si trascina il pennino nel punto B'' (il punto B' simmetrico di B'' rispetto a B è automaticamente segnato): il software disegna la parabola $\mathcal{P}$(A,B',B) cioè la parabola che passa per i punti A e B ed è tangente alle rette AB' e BB'. Successivamente si clicca nel punto C e si trascina il mouse fino al punto C'' (il punto C' simmetrico di C'' rispetto a C è automaticamente segnato): il software disegna la cubica $\mathcal{P}$(B,B'',C',C) cioè la cubica passante per B e C e tangente alle rette BB'' e CC'. Dato che la retta BB' e BB'' sono la stessa retta i due archi si incollano in modo regolare, dolcemente, senza produrre spigoli. Il profilo si conclude cliccando nuovamente nel punto A. Il software disegna l'arco di parabola $\mathcal{P}$(C,C'',A) che pure si incolla con regolarità all'arco precedente e la curva si chiude.