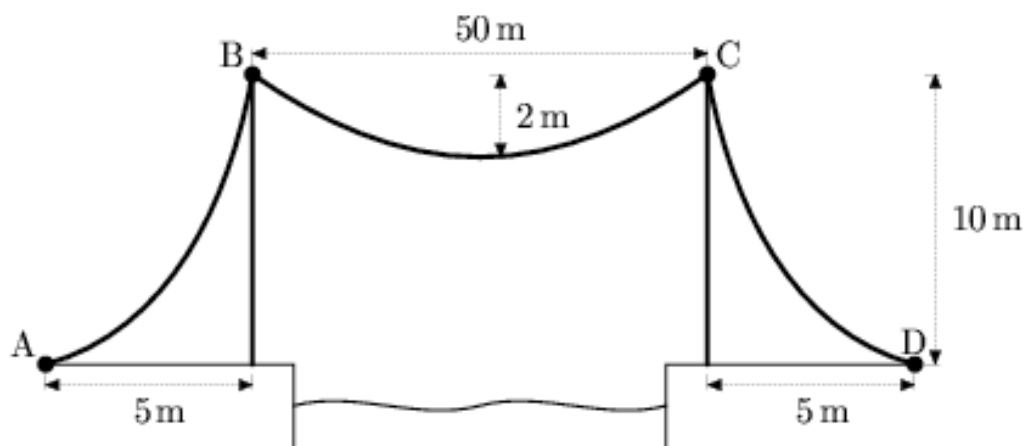


Una non parabola: la catenaria

con qualche cenno al calcolo della sua equazione
franco ghione



$$y(x) = c \frac{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}{2} = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

Una non parabola: la catenaria

con qualche cenno al calcolo della sua equazione

franco ghione

La *catenaria*, detta anche *curva funicolare*, è la curva secondo cui si dispone una fune che supponiamo omogenea, flessibile e non estendibile, appesa a due punti estremi, che sia lasciata pendere soggetta soltanto al proprio peso.



In considerazione del fatto che una catenaria ha la proprietà di avere in ogni suo punto una distribuzione uniforme del suo peso totale, questo tipo di curva è stata spesso utilizzata per realizzare manufatti e strutture architettoniche. Ecco alcuni esempi di catenarie rivoltate.



Cupola di St Paul (1675-1710) a Londra progettata da Sir Christopher Wren.



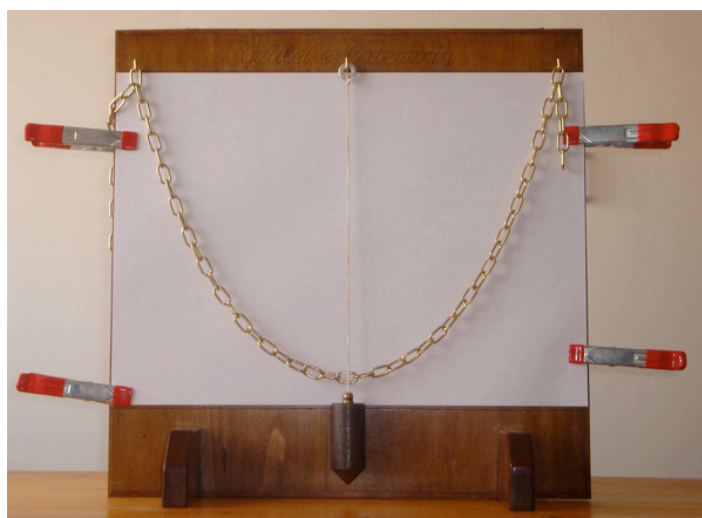
Il ponte ferroviario Garabit (1881-1884), progettato da Gustave Eiffel, è sostenuto da una catenaria riflessa



Barcellona, archi di catenaria nell'attico di Casa Milà (1905- 1910) – Gaudì

Galileo Galilei che sembra sia stato il primo a porsi il problema di una descrizione matematica di questa curva, aveva pensato a una parabola. Non tanto per la forma molto simile a quella parabolica che poteva sperimentalmente osservare, quanto piuttosto sulla base di una analogia col moto di un proiettile. Galileo pensò che, come il proiettile in moto in ogni istante è sottoposto a due azioni: una naturale che lo spinge verso il basso per effetto del suo peso e l'altra "equabile" che ha la direzione del movimento, così anche nella catena ogni anello è sottoposto alle stesse due azioni. Per il moto del proiettile Galileo era riuscito a dimostrare la natura parabolica dell'orbita e nello stesso modo pensò si potesse fare per la catena. Tuttavia in quel caso ogni anello della catena è sottoposto alla forza pesa e a una seconda forza, la tensione, che diversamente da quello che accade per il proiettile è tangente alla curva. Questa problema può essere didatticamente utile per sottolineare che non basta che una curva assomigli come forma a una parabola per essere una parabola. Per capire se una curva è veramente una parabola si devono conoscere delle sue distintive caratteristiche. Possiamo intanto iniziare in modo sperimentale seguendo le indicazioni dello stesso Galileo scritte in una lingua italiana di grande bellezza.

Lo strumento che abbiamo preparato, che è lo stesso che lui suggerisce, consente di confrontare diverse catenarie con la parabola.



Ecco quello che Salviati afferma nella Seconda giornata del dialogo *Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze*:

*Salviati: ...Ferminsi ad alto due chiodi in un parete, equidistanti all'orizzonte e tra di loro lontani il doppio della larghezza del rettangolo su 'l quale vogliamo notare la semiparabola, e da questi due chiodi penda una catenella sottile, e tanto lunga che la sua sacca si stenda quanta è la lunghezza del prisma: **questa catenella si piega in figura parabolica**, sì che andando punteggiando sopra 'l muro la strada che vi fa essa catenella, aremo descritta un'intera parabola, la quale con un perpendicolo, che penda dal mezo di quei due chiodi, si dividerà in parti eguali....*

Possiamo fare lo stesso esperimento *punteggiando* su un foglio di carta formato A3 fissato sulla parete verticale del nostro strumento *la strada che fa essa catenella*. Galileo sembra sostenere che la linea descritta sia un arco di parabola, tuttavia più avanti, nella quarta giornata c'è un altro accenno alla catenaria nella quale l'affermazione precedente viene in qualche modo corretta. Salviati si esprime ora utilizzando termini che fanno pensare alla catenaria come approssimazione della parabola :

*Salviati:Ma più voglio dirvi, recandovi insieme maraviglia e diletto, che la corda così tesa, e poco o molto tirata, si piega in linee, **le quali assai si avvicinano alle paraboliche**: e la similitudine è tanta, che se voi segnerete in una superficie piana ed eretta all'orizzonte una linea parabolica, e tenendola inversa, cioè col vertice in giù e con la base parallela all'orizzonte, facendo pendere una catenella sostenuta nelle estremità della base della segnata parabola, vedrete, allentando più o meno la detta catenuzza, incurvarsi e adattarsi alla medesima parabola, e tale adattamento tanto più esser preciso, quanto la segnata parabola sarà men curva, cioè più distesa; sì che nelle parabole descritte con elevazioni sotto a i gr. 45, **la catenella camina quasi ad unguem sopra la parabola**.*

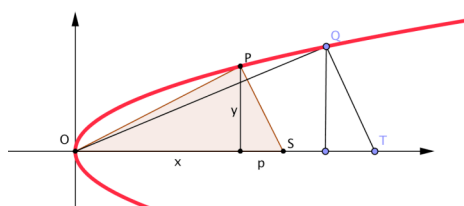
Ora Galileo precisa meglio il tipo di esperimento che suggerisce di fare e che possiamo realizzare col nostro strumento. Si fissa sulla parete verticale un foglio sul quale punteggiamo il cammino della catena. Con un filo a piombo equidistante ai due chiodi si individua l'asse di simmetria della curva ottenuta e il suo vertice. Si fa questo disegno su diversi fogli con catenelle men curve. L'elevazione è l'angolo formato dalla curva e dalla retta orizzontale che passa per i due chiodi: ciò che Galileo sostiene, e che andremo a verificare, è che sotto i 45° la catenaria è meglio approssimata dalla parabola.

Ma come possiamo confrontare queste curve con una parabola? Come fare a costruire una parabola esattamente? Cosa è una parabola? Per rispondere a queste domande

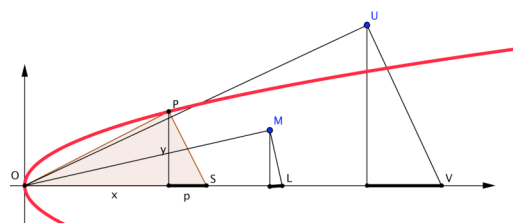
occorre una proprietà geometrica che riesca a caratterizzare tutti i punti che si trovano sulla parabola. Possiamo intanto dire che la parabola ha un asse di simmetria e un vertice che è l'unico punto della parabola che si trova sull'asse. Le stesse cose abbiamo anche per la catenaria. Occorre dunque qualche altra proprietà. Non è difficile vedere che se assegniamo, oltre al vertice e all'asse, anche un punto del piano, esiste una sola parabola che ha quel vertice, quel asse e che passa per quel punto: tutti gli altri infiniti punti della parabola si trovano in una posizione ben precisa e determinata da questi dati. Infatti i punti $P=(x,y)$ della parabola, che ha il vertice nell'origine del riferimento, e l'asse coincidente con l'asse delle ascisse, sono caratterizzati dal fatto che

$$y^2=px$$

Ciò può essere interpretato geometricamente dicendo che, se x è l'ascissa di un punto P della parabola, allora, costruito il triangolo rettangolo OPS rettangolo in P , la proiezione del cateto PS sull'ipotenusa è costantemente uguale a p , dato che l'altezza y deve essere media proporzionale tra le proiezioni x e p dei due cateti. Ne segue che, se Q un nuovo punto, costruito il triangolo rettangolo OQT , il punto Q si trova sulla parabola se e solo se la proiezione di QT è uguale alla proiezione di PS .



Q si trova sulla parabola perché la proiezione di QT è uguale alla proiezione di PS .



M non si trova sulla parabola perché la proiezione di ML è più piccola di p ; per U invece la proiezione è più grande di p ; per U invece la proiezione

Individuando l'asse e il vertice e un punto di una curva che assomiglia a una parabola, possiamo, a partire da questi dati, costruire tutti gli altri punti della parabola e controllare se questi si sovrappongono o meno alla data curva.

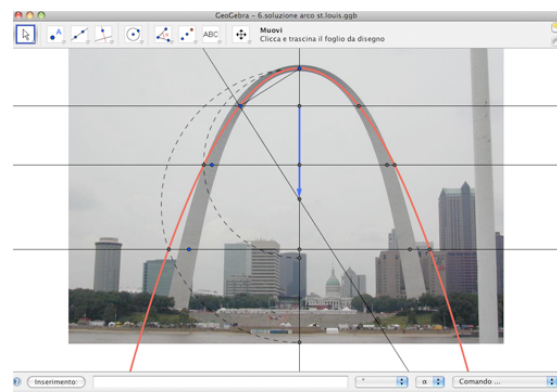
Possiamo fare questo esercizio col nostro strumento:

- mettiamo un foglio A3 sulla parete
- facciamo pendere una catena e segniamo sul foglio i suoi punti.
- mettiamo un filo a piombo per individuare con precisione l'asse di simmetria e il vertice
- stacciamo il foglio dallo strumento per poterci disegnare sopra
- prendiamo un punto P che non sia il vertice della curva e costruiamo con una squadra il triangolo rettangolo OPS (S sull'asse)
- prendiamo un secondo punto Q , tracciamo con una squadra il triangolo OQT e verifichiamo se le proiezioni di PS e QT sono uguali

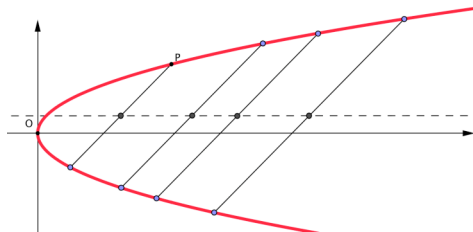
Se esistono due punti per i quali le proiezioni sono diverse la linea che abbiamo tracciato non può essere una parabola.

Possiamo anche servirci un software di geometria dinamica come ad esempio Geogebra. Si costruisce una macro che disegna, come luogo, tutti i punti di una parabola a partire dai seguenti oggetti iniziali: una retta (l'asse), un punto O sulla retta (vertice), un punto P fuori dall'asse. La macro si costruisce facilmente usando la caratterizzazione precedente dei punti della parabola. Fatto questo possiamo verificare col nostro software se una data linea sia o meno un arco di parabola. Consideriamo, ad esempio, il grande arco di Saint Louis. Possiamo procedere in questo modo:

- si importa nel foglio da disegno di geogebra l'immagine dell'arco
- si individua l'asse di simmetria e il vertice superiore di questa curva
- si sceglie un punto sulla curva e si costruisce col software la parabola con quel vertice, quel asse e passante per quel punto.
- si va poi a vedere se questa parabola si sovrappone alla data curva.



Un altro modo di procedere, se si vuole dimostrare che una curva non è un arco di parabola, è quello di trovare una proprietà geometrica delle parabole che non si verifica nell'esempio considerato. Una di queste riguarda i punti medi di una famiglia di corde parallele: nel caso di una parabola questi punti si trovano su una retta parallela all'asse.



Non è difficile dimostrare questa proprietà con gli strumenti della geometria analitica. Ecco un esempio realizzato con Geogebra nel quale confrontiamo una curva, dotata di asse di simmetria e di vertice, con una parabola.



I punti rossi non sono allineati.
Ecco altri esempi che si possono scaricare dalla rete



Barcellona, Collegio delle teresinas, Gaudi



Londra, Millennium Bridge

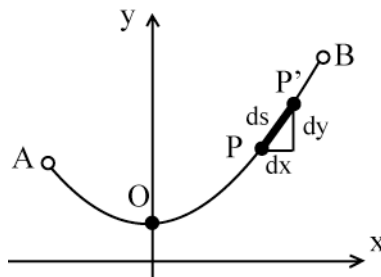


Iraq, Ctesiphon (IV sec A.C.)

Il segreto della catenaria: il coseno iperbolico

Nel 1699 [Jungius](#) dimostrò che la curva di una catena appesa, sotto l'azione della gravità, non è una parabola. Johann Bernoulli, attraverso una rivista scientifica, lanciò nel 1690, una sfida ai più importanti matematici del suo tempo invitandoli a risolvere il problema di trovare una equazione per descrivere la curva-catenaria. La risposta fu data poco dopo nel 1691 da [Leibniz](#), [Huygens](#) e [Johann Bernoulli](#). [Huygens](#) fu il primo ad usare il termine "catenaria" in una lettera a [Leibniz](#) nel 1690 e [David Gregory](#) scrisse nello stesso anno un trattato su questa curva.

Per poter iniziare lo studio teorico della catenaria scegliamo un sistema di riferimento ortogonale. Prendiamo come asse delle ordinate la retta passante per il punto O, il punto più basso della catenaria e perpendicolare alla tangente in O alla curva.



Sia $P=(x,y)$ un punto della curva e s la lunghezza dell'arco OP. In questo modo $x=x(s)$ e $y=y(s)$ risulteranno delle funzioni di s e viceversa s sarà una funzione di P cioè di x e y . In particolare $x(0)=0$. Ricordiamo che le derivate di queste funzioni rispetto ad s danno le componenti del vettore tangente alla curva in P .

Sia $\vec{T}(s)$ la tensione della catena nel punto P . Il vettore $\vec{T}(s)$ è un vettore tangente alla curva e, se $|\vec{T}(s)|=T(s)$ è il modulo di questo vettore, allora le sue due componenti orizzontale e verticale sono date da

$$\vec{T}(s) = (T(s)\frac{dx}{ds}, T(s)\frac{dy}{ds})$$

dato che, come abbiamo detto,

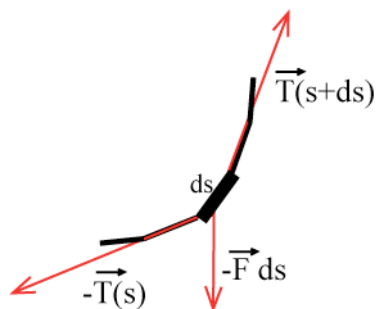
$$(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds})$$

sono le componenti del versore tangente alla curva nel punto P .

Sull'elemento ds della catena agiscono tre forze: la tensione $\vec{T}(s)$ nel punto P , che tira verso O , la tensione $\vec{T}(s+ds)$ nel punto P' che tira nel verso opposto e la forza peso $-\vec{F}ds$ dell'elemento ds che tira verso il basso. $\vec{F}$ è un vettore la cui componente nella direzione orizzontale è nulla e quella verticale è il peso specifico p (o la densità) dell'elemento ds . Nel caso della catenaria si suppone che la catena sia di materiale omogeneo ed eterogeneo e che quindi la densità p sia costante. Un caso diverso molto

interessante, come vedremo si ottiene quando p cresce proporzionalmente con l'ascissa di P .

Queste tre forze si devono equilibrare in ogni punto s della catena:



$$\vec{T}(s+ds) - \vec{T}(s) - \vec{F}ds = 0$$

Dividendo per ds troviamo la condizione di equilibrio

$$\frac{d}{ds} \vec{T}(s) = \vec{F}$$

che scritta per componenti dà le due equazioni

$$\frac{d}{ds} \left(T(s) \frac{dx}{ds} \right) = 0 \quad , \quad \frac{d}{ds} \left(T(s) \frac{dy}{ds} \right) = p$$

integrando otteniamo

$$T(s) \frac{dx}{ds} = \text{costante} \quad , \quad T(s) \frac{dy}{ds} = \int_0^P p ds$$

La prima equazione ci dice che la tensione orizzontale è costante per tutta la lunghezza della catenaria, mentre la seconda equazione, supponendo che p sia costante (e in questo caso l'integrale è semplicemente ps) ci dice che la tensione verticale cresce, a partire dal punto più basso O , proporzionalmente alla lunghezza s dell'arco da O a P .

Facciamo ora, nel caso della catenaria (quando cioè p si suppone costante), il rapporto tra queste equazioni. La tensione sparisce (si semplifica) e, chiamando p_c la costante relativa alla prima equazione, troviamo $c dy = s dx$ che, unita alla relazione $ds^2 = dx^2 + dy^2$, fornisce le relazioni

$$\begin{aligned} c dy &= s dx \\ ds^2 &= dx^2 + dy^2 \end{aligned}$$

Queste equazioni legano tra loro i differenziali delle quantità x , y , s e il problema si riduce a quello di calcolare le funzioni che verificano queste relazioni.

Eliminando dy troviamo

$$c ds = \sqrt{c^2 + s^2} dx$$

Questa relazione che lega x , s e i loro differenziali, se integrata, permette di trovare la dipendenza di x da s e viceversa.

$$x(s) - x(0) = x(s) = \int_0^P \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{c^2}}} = c \int_0^P \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad t = \frac{s}{c}$$

L'integrale può essere esplicitamente calcolato con un po di astuzia tramite il logaritmo naturale.

$$\int_0^P \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \log\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right) \Big|_0^P = \log\left(\frac{s}{c} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{c^2}}\right)$$

questo calcolo ci permette di trovare l'espressione esplicita della funzione incognita $x(s)$:

$$\frac{x(s)}{c} = \log\left(\frac{s}{c} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{c^2}}\right)$$

Questa funzione ha una espressione complicata mentre la sua inversa, che esprime s in funzione di x , ha una forma più semplice. Si tratta di una nuova funzione di grande interesse e semplicità che nasce come funzione inversa di un integrale, situazione questa che si ripresenta nello studio degli integrali ellittici e non del tutto nuova se pensiamo che

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin(t)$$

è la funzione inversa della funzione $\sin(t)$.

Calcoliamo esplicitamente s in funzione di x . Cominciamo col togliere il logaritmo usando la sua funzione inversa, abbiamo

$$e^{\frac{x}{c}} = \frac{s}{c} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{c^2}}$$

con facili calcoli,

$$\left(e^{\frac{x}{c}} - \frac{s}{c}\right)^2 = 1 + \frac{s^2}{c^2}, \quad e^{2\frac{x}{c}} - 2\frac{s}{c}e^{\frac{x}{c}} = 1$$

e quindi, ricavando s , otteniamo la funzione cercata

$$s(x) = c \frac{e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}}{2}$$

Questa funzione è molto importante e le si dà un suo nome proprio. Per ragioni di strettissima parentela con la funzione *seno*, ragioni che vedremo più avanti, questa funzione si chiama *seno iperbolico* e si indica con $\sinh$.
Abbiamo quindi

$$s(x) = c \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \quad \text{dove} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Questa funzione esprime la lunghezza s dell'arco di catenaria che va da O al punto P di ascissa x .

Non è difficile vedere che la sua derivata, che chiamiamo *coseno iperbolico*, è data da

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Ci sono molte analogie con le funzioni trigonometriche standard tra cui

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \quad \text{per ogni } t$$

e quindi i punti di coordinate $(\cosh(t), \sinh(t))$ si trovano tutti sull'iperbole equilatera di equazione

$$X^2 - Y^2 = 1$$

Altre analogie, introducendo ad esempio la funzione $\tanh(t)$, possono essere trovate direttamente dagli studenti. La differenza essenziale con le funzioni trigonometriche (dette anche circolari) è tutta in un segno!

Tornando alla catenaria, se vogliamo trovare l'espressione di y in funzione di x basta tener conto del fatto che $c \, dy = s \, dx$: sostituendo il valore di s che abbiamo trovato risulta

$$dy = \frac{s}{c} \, dx = \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \, dx$$

da cui, integrando

$$y(x) - y(0) = \int_0^P \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \, dx = c \int_0^P \sinh(t) \, dt = c \frac{e^t + e^{-t}}{2} \Big|_0^P = c \frac{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}{2} - c$$

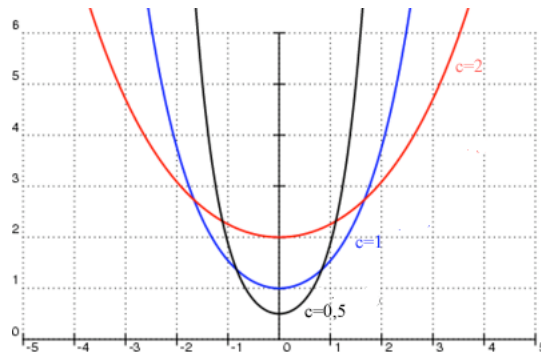
in definitiva, se prendiamo l'origine del sistema di riferimento in modo che l'ordinata del punto O sia c , l'equazione della catenaria è semplicemente un coseno iperbolico

$$y(x) = c \frac{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}{2} = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

mentre la lunghezza di un arco di catenaria dal punto O a un punto P di ascissa x è data da

$$s(x) = c \frac{e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}}{2} = c \sinh\left(\frac{x}{c}\right)$$

Questa equazione può essere facilmente tabulata anche con un foglio elettronico e il suo grafico può essere tracciato per vari valori del parametro c .



Si nota come man mano che il parametro c aumenta la catenaria si allarga sempre più.

E' interessante notare la forma della curva quando la catena non sia omogenea ma il suo peso aumenti proporzionalmente a x nella direzione orizzontale.

In questo caso

$$\int_0^x p \, ds = kx \quad , \quad (k \text{ costante})$$

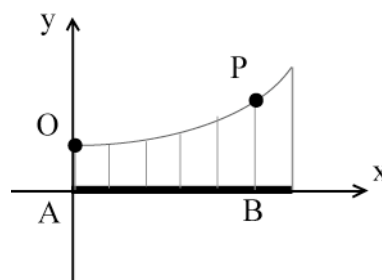
e l'equazione della curva diventa, aggiustando opportunamente le costanti,

$$c \, dy = x \, dx$$

che integrata fornisce l'equazione di una parabola (come sosteneva Galileo Galilei)

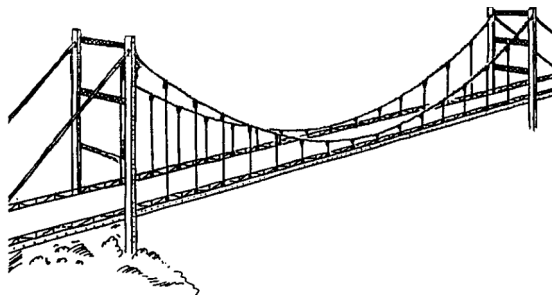
$$y(x) = \frac{x^2}{2c}$$

La situazione in cui il carico della struttura è proporzionale alla distanza in orizzontale dal punto O è molto facile da realizzare:



Nel caso descritto dalla figura la curva OP sostiene con dei tiranti verticali, una struttura orizzontale AB molto più pesante. Supponendo che i fili con cui sono fatti i tiranti e la linea OP siano molto più leggeri del tratto orizzontale AB , abbiamo che la tensione verticale cresce in proporzione alla distanza AB .

Molti ponti sono costruiti in questa maniera soprattutto quelli più primitivi fatti di liane e tavole.



Famoso è il ponte di San Francisco in California la cui curva sovrastante non è una catenaria ma una parabola!