

Progetto Lauree Scientifiche_2010

Corso di formazione per insegnanti- "Il Tempo"

La diffusione: un processo irreversibile



Symphony No. 101 in D Major
("The Clock"; 1793-4)
II

Andante

2 Flauti
2 Oboi
2 Clarinetti (A)
2 Fagotti
2 Cori (G)
2 Trombe (G)
Timpani (D, G)

Violini I
Violini II
Viola
Violoncelli
e Contrabbassi

Andante

1.
2.

1.
2.

10



L'equazione di Fourier

Un po' di Storia

Jean Baptiste Josef Fourier (1768-1830)

1807: Teoria della propagazione del calore nei solidi

1822: Teoria analitica del calore

<http://2020ok.com/books/5/the-analytical-theory-of-heat-44805.htm>

Il calore si manifesta in forma di Temperatura che necessita di essere **misurata** con accuratezza.

1714 - Invenzione del termometro: Gabriel Daniel Fahrenheit (1686-1736); già nel 1717 viene prodotto commercialmente.

La scienza del calore, la teoria dei potenziali e la teoria delle equazioni differenziali erano tutte nelle prime fasi del loro sviluppo al tempo in cui Fourier inizia il suo lavoro sulla conduzione del calore. La conduzione del calore dovuta al gradiente di temperatura (**Jean-Baptiste Biot (1774-1862)**) e l'accumulo di calore legato al calore specifico, erano stati sperimentalmente chiariti.

2 Risultati importanti:

Joseph Black (1728-1799)

$$1760 - \left(\begin{array}{l} \text{calore latente (fusione del ghiaccio)} \\ \text{calore specifico} \end{array} \right)$$

Per la misura di queste due grandezze bisogna attendere 23 anni; fu realizzata da

Antoine Laurent Lavoisier (1743-1794)

Pierre Simon Laplace (1749-1827).

La rappresentazione dei problemi dinamici nei mezzi continui grazie all'aiuto delle equazioni differenziali (es. la corda vibrante) e la loro soluzione tramite serie trigonometriche erano noti.

In effetti, l'equazione alle derivate parziali descrivente una corda vibrante fu risolta da **Daniel Bernoulli (1700-1782)**, che propose (sulla base di considerazioni fisiche) una soluzione in termini di serie trigonometrica. Sebbene non completamente soddisfatti del metodo, ne fecero largo uso successivamente **Leonard Euler (1707-1783)**, **John-Louis Lagrange (1736-1813)**. I quali, insieme al già citato Bernoulli ed a **Jean le Rond d'Alambert (1717-1783)**, svilupparono la **teoria delle equazioni differenziali**, sia ordinarie che parziali.

Fourier formula il problema della diffusione del calore in un continuo e propone la seguente equazione

$$\nabla \cdot k \nabla T = c \partial_t T,$$

k è la conducibilità termica, c è il calore specifico, T la temperatura.

Se $k = \text{cost}$, l'equazione si semplifica

$$k \nabla^2 T = c \partial_t T.$$

Matematicamente descrive la velocità di cambiamento della temperatura (T) in ogni punto all'interno del solido.

Fisicamente descrive la conservazione dell'energia (calore) per unità di volume in un elemento infinitesimo di volume del solido centrato nel punto di interesse.

Caso_1D

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{c}{k} \frac{\partial T}{\partial t},$$

$$\left[\frac{k}{c} \right] = \frac{M}{LT} \quad (\text{qui } T \text{ sta per tempo}).$$

Consideriamo una barra di lunghezza \mathcal{L} e sia $T(x,t)$ la sua temperatura nel punto x al tempo t . Inoltre, $0 \leq x \leq \mathcal{L}$ e $t \geq 0$. L'energia per unità di volume ϵ è proporzionale alla temperatura

$$\epsilon(x,t) = c(x)T(x,t),$$

la densità della barra è presa costante ed uguale ad 1, $c(x)$ è il calore specifico.

Facciamo l'ipotesi che non esistano sorgenti di calore interne lungo la barra; il calore può entrare solo attraverso gli estremi, ovvero la barra è coibentata lungo la sua lunghezza.

Conservazione dell'energia

La velocità di cambiamento dell'energia in ogni parte finita della barra è

uguale all'ammontare totale di calore che fluisce entro questa parte della barra. Indichiamo con $q(x,t)$ il flusso di calore e prendiamo una porzione di barra da x ad $x+\Delta x$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+\Delta x} c(z) T(z, t) dz = -q(x + \Delta x, t) + q(x, t)$$

stiamo adottando la convenzione per la quale $q(x, t) > 0$ se fluisce da sinistra verso destra.

Nel limite $\Delta x \rightarrow dx$

$$c(x) \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (1)$$

L'assunzione fondamentale che connette il flusso del calore alla temperatura:

Postulato: Il calore fluisce ad una velocità proporzionale alla variazione spaziale della temperatura

$$q(x,t) = -\kappa(x) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2)$$

inoltre si accetta che il calore fluisca sempre dalla zona calda a quella fredda. Il segno negativo garantisce che se la temperatura cresce con x , il flusso è minore di zero, ovvero \leftarrow , cioè da caldo a freddo.

Combinando la (1) e la (2) si ottiene:

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \kappa(x) \frac{\partial T}{\partial x} = c(x) \frac{\partial T}{\partial x} \quad 0 \leq x \leq \mathcal{L}$$

e se κ e c non dipendono da x

$$\gamma \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t},$$

dove $\gamma = \frac{\kappa}{c} > 0$.

L'equazione del calore ottenuta descrive l'evoluzione di T per un continuo 1D finito ed omogeneo, in assenza di sorgenti interne di calore e soggetto a qualche condizione iniziale ed al contorno. C'è bisogno di $T(x,0)=g(x)$ e di sapere come si trasmette il calore alle estremità della barra.

Esistono due tipi di condizioni al contorno fisicamente rilevanti:

Le condizioni di Dirichlet

rappresentano situazioni in cui la temperatura al bordo del dominio ha un andamento noto a priori (ad esempio perché la si tiene costante con un termostato)

$$T(\mathcal{L},t)=\alpha(t)$$

Le condizioni di Neumann

rappresentano situazioni in cui il flusso di calore sulla frontiera del dominio è noto a priori.

$$q(\mathcal{L},t)=\kappa(\mathcal{L}) \frac{\partial T}{\partial x}(\mathcal{L},t)=\beta(t).$$

Il flusso $q(x,t)$ è la quantità di calore che attraversa nell'unità di tempo l'unità di superficie, allora dalla (2)

$$q = \frac{dQ}{dSdt} = -\kappa \frac{dT}{dx}$$

che è un altro modo di scrivere l'equazione di Fourier.

Nota

L'equazione di Ohm $\mathbf{j}=\gamma\mathbf{E}$, dove γ è la conducibilità elettrica (inverso della resistività), \mathbf{j} è il flusso di carica ed \mathbf{E} il campo elettrico.

Allora $\mathbf{j}=\frac{dq}{dSdt}=\frac{di}{dS}$, mentre $\mathbf{E}=-\frac{dV}{dx}\mathbf{n}$ e dunque

$\frac{dq}{dSdt}=-\gamma\frac{dV}{dx}$, ovvero l'equazione di Fourier.

Fine Nota



Separazione delle Variabili

Assumiamo che $T(x,t)=u(x)\theta(t)$, in tal caso l'equazione di diffusione prende la seguente forma

$$u(x) \frac{d\theta}{dt} = \gamma \theta(t) \frac{d^2 u}{dx^2},$$

ovvero

$$\frac{\dot{\theta}}{\theta} = \gamma \frac{u''}{u}.$$

Dato che le variazioni sono indipendenti, i due membri dell'equazione devono essere uguali ad una costante, diciamo $-\lambda$.

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\lambda dt$$

e posto $\theta(0)=1$, si trova in definitiva

$$\theta = e^{-\lambda t} \rightarrow T(x,t) = u(x)e^{-\lambda t}.$$

Per quanto concerne l'equazione per la funzione spaziale $u(x)$

$$\gamma u'' = -\lambda u.$$

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{\gamma}$$

La soluzione dell'equazione è

```
DSolve[u''[x] + ω2 u[x] == 0, u[x], x]
```

```
{{u[x] → C[1] Cos[x ω] + C[2] Sin[x ω]}}
```

Le condizioni al contorno omogenee sono

$$T(0,t)=T(\mathcal{L},t)=0 \quad t \geq 0$$

$$T(x,0)=g(x) \quad 0 < x < \mathcal{L}$$

da cui segue $u(0)=u(\mathcal{L})=0$. Pertanto $C[1]=0$ e $u(x)=C[2] \sin(\omega x)$; sfruttando la condizione ad \mathcal{L} si ha

$u(\mathcal{L})=C[2] \sin(\omega \mathcal{L})=0$ che conduce alla relazione

$$\omega \mathcal{L} = n \pi \implies \omega = \frac{n \pi}{\mathcal{L}} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lambda_n = \gamma \left(\frac{n \pi}{\mathcal{L}} \right)^2.$$

In definitiva:

$$u_n(x) = \sin\left(\frac{n \pi}{\mathcal{L}} x\right).$$

La soluzione base dell'equazione di Fourier è allora

$$T_n(x,t) = e^{-\gamma \frac{n^2 \pi^2}{\mathcal{L}^2} t} \sin\left(\frac{n \pi}{\mathcal{L}} x\right)$$

e la più generale soluzione è una combinazione lineare delle $T_n(x, t)$

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(x, t),$$

posto che la serie converga.

La condizione iniziale stabilisce

$$T(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n \pi}{\mathcal{L}} x\right).$$

Quest'ultima è la serie seno di Fourier sull'intervallo $[0, \mathcal{L}]$ della funzione (condizione iniziale) $g(x)$.

$$\text{Inoltre } (u_n, u_m) = \int_0^{\mathcal{L}} u_n u_m dx = \frac{\mathcal{L}}{2} \delta_{nm}.$$

Calcoliamo

$$m \neq n; \int_0^{\mathcal{L}} \sin[n y] \sin[m y] dy$$

$$\frac{n \cos[n\pi] \sin[m\pi] - m \cos[m\pi] \sin[n\pi]}{m^2 - n^2}$$

Assuming [{n, m} ∈ Integers, Integrate[Sin[n y] Sin[m y], {y, 0, π}]]

0

Assuming [n ∈ Integers, Integrate[Sin[$\frac{n\pi}{L} y$]², {y, 0, L}]]

$\frac{L}{2}$

Allora

$$(u_k, g) = (u_k, \sum_n a_n u_n) = \frac{L}{2} \sum_n a_n \delta_{kn} = \frac{L}{2} a_k$$

e

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) dx.$$

◀ | ▶

Un Esempio

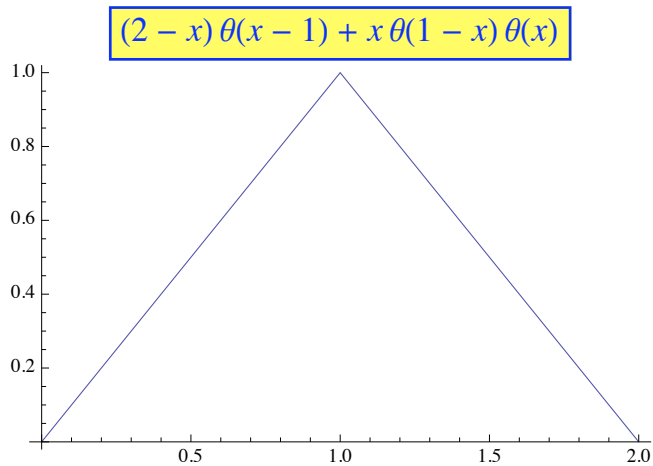
$$T(0,t)=T(2,t)=0$$

$$T(x,0)=g(x)= \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Barra omogenea di lunghezza $\mathcal{L}=2$

$$g[x_] := \text{UnitStep}[x] \text{UnitStep}[1-x] x + \text{UnitStep}[x-1] (2-x)$$

```
Plot[g[x], {x, 0, 2},
  PlotLabel -> Style[Framed[g[x]], 16, Blue, Background -> Lighter[Yellow]]]
```



Calcoliamo a_k

$$a_k = \int_0^2 g(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\mathcal{L}} x\right) dx.$$

```
Assuming[k ∈ Integers, Integrate[g[x] Sin[k π / 2 x], {x, 0, 2}]]
```

$$\frac{8 \sin\left[\frac{k\pi}{2}\right]}{k^2 \pi^2}$$

$k \in \mathbb{N}$; se k è pari il risultato è sempre nullo, se dispari $\sin\left[\frac{k\pi}{2}\right]$ alterna + a - e $\sin[k\pi]=0$. In definitiva

$$a_k = \frac{(-1)^k 8}{(2k+1)^2 \pi^2} \quad k=0, 1, 2, \dots$$

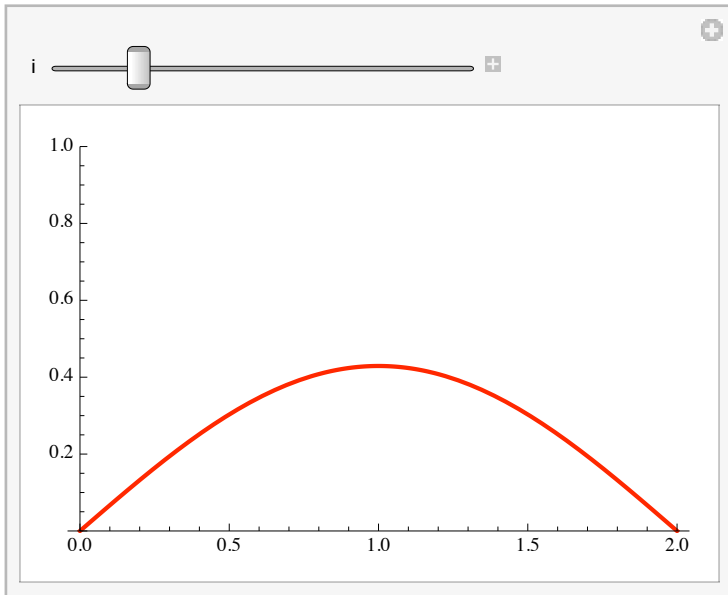
La soluzione per serie è allora

$$\text{In[1]:= } T[x_, t_] := 8 \sum_{n=0}^{50} \frac{(-1)^n}{\pi^2 (2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4} t} \text{Sin}\left[\frac{(2n+1)\pi}{2} x\right]$$

◀ | ▶

Vediamo l' andamento della soluzione

```
Manipulate[Plot[T[x, i], {x, 0, 2}, PlotRange -> {0, 1}, PlotStyle -> {Red, Thick}], {i, 0, 1.5}]
```



La funzione T è liscia per ogni valore del tempo. Inoltre se il profilo iniziale è integrabile (continuo a tratti) su $[0, 2]$ i coefficienti di Fourier sono uniformemente limitati

$$|a_k| \leq \int_0^2 |g(x) \sin(k\pi x)| dx \leq \int_0^2 |g(x)| dx \equiv M$$

da cui segue che $T(x, t)$ è limitata

$$|T(x, t)| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4} t}$$

ciò implica che la soluzione tende al profilo di temperatura nulla come diretta conseguenza del fatto che gli estremi della barra sono tenuti a temperatura nulla.

◀ | ▶

L'equazione di diffusione ed il tempo

I coefficienti di Fourier della $T(x,t)$ decadono esponenzialmente per $t \rightarrow \infty$, e la soluzione diviene liscia a dispetto del fatto che la distribuzione iniziale non lo sia (Smoothing Property). Al crescere del tempo le singolarità vengono addolcite (smoothed out by diffusion process).

Ciò implica, tuttavia, che **è impossibile ricostruire la distribuzione di temperatura iniziale misurando la distribuzione ad un qualche tempo successivo.**

L'equazione del calore non funziona per tempi negativi. Se si provasse a far funzionare l'equazione del calore per $t < 0$ (\leftarrow) si otterrebbe solo rumore a causa della crescita esponenziale dei coefficienti della serie.

$$T[x, t] = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 (2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4} t} \sin\left[\frac{(2n+1)\pi}{2} x\right]$$

L'equazione del calore per $t < 0$ è mal posta, ovvero è instabile.

Serie e Trasformazione di Fourier

(rese facili ed attraenti)

Sia $f(na)$ una funzione reale nell'intervallo $[0, L]$ definita su un insieme di punti discreti $x=an$, dove a è l'intervallo tra un punto e l'altro, $n=0,1, 2, \dots, P-1$ e $L=Pa$.

Consideriamo la seguente serie $\sum_{k=-M}^M e^{ik\theta} = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^M e^{-ik\theta} \right] - 1$

$$\sum_{k=0}^M e^{-i k \theta}$$

$$\frac{e^{-i M \theta} (-1 + e^{i \theta + i M \theta})}{-1 + e^{i \theta}}$$

Se la si razionalizza la si moltiplica per 2 e ci si sottrae 1 si ottiene

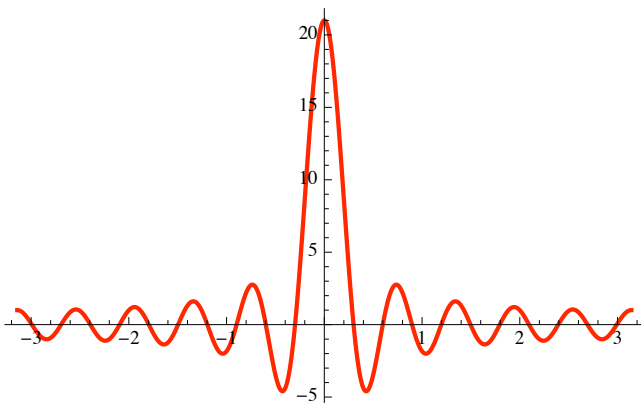
$$\frac{\operatorname{Cos}[M\theta] - \operatorname{Cos}[(M+1)\theta]}{1 - \operatorname{Cos}[\theta]} = \frac{\operatorname{Cos}[M\theta] - \operatorname{Cos}[M\theta] \operatorname{Cos}[\theta] + \operatorname{Sin}[M\theta] \operatorname{Sin}[\theta]}{1 - \operatorname{Cos}[\theta]}$$

$$= \operatorname{Cos}[M\theta] + \frac{\operatorname{Sin}[\theta]}{1 - \operatorname{Cos}[\theta]} \operatorname{Sin}[M\theta]$$

Facendo uso delle formule di bisezione

$$\operatorname{Cos}[M\theta] + \frac{\operatorname{Cos}[\theta/2]}{\operatorname{Sin}[\theta/2]} \operatorname{Sin}[M\theta] = \frac{\operatorname{Sin}[(2M+1)\theta/2]}{\operatorname{Sin}[\theta/2]} = \frac{\operatorname{Sin}[P\theta/2]}{\operatorname{Sin}[\theta/2]}, \text{ dove } P=2M+1.$$

```
M = 10; Plot[ $\frac{\operatorname{Sin}[(2M+1)\theta/2]}{\operatorname{Sin}[\theta/2]}$ , { $\theta$ , -Pi, Pi},
PlotRange -> All, PlotStyle -> {Red, Thick}]
```



Limite al continuo

Si vuole ottenere la rappresentazione di Fourier sull' intero intervallo $[0, L]$ e non su alcuni suoi punti, come nel caso precedente. Immaginiamo di dividere L in $P=2M+1$ intervalini a in modo che $x=na$, il limite al continuo implicherà $a \rightarrow 0$. Prima di procedere è necessaria una premessa

Protocollo di Integrazione

$$\sum_n f(na) = \sum_n \int f(q) \delta(q - na) dq = \int f(q) \sum_n \delta(q - na) dq$$

Cos'è $\sum_n \delta(q - na)$?

Integriamo $\sum_n \delta(q - na)$ tra q_1 e q_2

$$\int_{q_1}^{q_2} \sum_n \delta(q - na) dq = \sum_n \int_{q_1}^{q_2} \delta(q - na) dq = \sum_{na \in \Delta q} 1 = \text{numero di punti tra } q_1 \text{ e } q_2, \text{ ovvero in } \Delta q.$$

$$\sum_n \delta(q - na) \text{ è la densità degli stati. In effetti se } a$$

è la separazione tra due punti contigui la densità sarà

$$\frac{1}{a}. \text{ In modo più formale: } \sum_n \int_{q_1}^{q_1+a} \delta(q - na) dq = 1 \text{ e se } a \ll 1,$$

possiamo confondere a con il differenziale e scrivere

$$\sum_n a \delta(q - na) \Rightarrow \sum_n \delta(q - na) = \frac{1}{a}. \text{ In definitiva,}$$

$$\sum_n f(na) = \frac{1}{a} \int f(q) dq, \text{ ovvero, poiché } q = na,$$

$$a \sum_n f(na) = \int f(na) a dn.$$

il limite

Dobbiamo procedere con $a \rightarrow 0$ e $P \rightarrow \infty$ in modo che $Pa=L$. La rappresentazione di Fourier finita diviene una serie infinita

$$f(na) = \sum_{m=-M}^M a_m e^{i k_m n} \rightarrow f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{i \frac{2\pi m}{Pa} na} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{i \frac{2\pi m}{L} x};$$

corrispondentemente

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{P} \sum_{n=-M}^M e^{-i k_m n} f(na) \\ &= \frac{a}{aP} \sum_{n=0}^{P-1} e^{-i \frac{2\pi m}{Pa} na} f(na) \rightarrow \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-i \frac{2\pi m}{L} x} dx \end{aligned}$$

La magenta è lo sviluppo di Fourier di una funzione su un intervallo finito. La somma è uguale a $f(x)$ nell'intervallo $[0, L]$ al di fuori riproduce la f con periodo L .

Trasformazione integrale di Fourier

Se la funzione che si vuole rappresentare è estesa a tutto

\mathbb{R} bisogna usare la rappresentazione integrale di Fourier. Dalla serie di Fourier nell' intervallo $[-L/2, L/2]$, si ha

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{\frac{2\pi i m}{L} x}, \quad a_m = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-\frac{2\pi i m}{L} x} dx. \text{ Adesso}$$

rendiamo L molto grande in modo che $k_m = \frac{2\pi m}{L}$ diviene così piccola

da poter essere considerata una variabile continua k e

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dm = L \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi};$$

$a_m L$ rimane finito e diviene una funzione, $\hat{f}(k)$ sicché

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}$$

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

ovvero la trasformata di Fourier (rossa) e la sua inversa (viola).

Diffusione Stocastica

Ci sono due modi per introdurre la diffusione, il primo fenomenologico parte dalle leggi di Fick e le loro soluzioni, il secondo atomistico considera la **passeggiata casuale**.

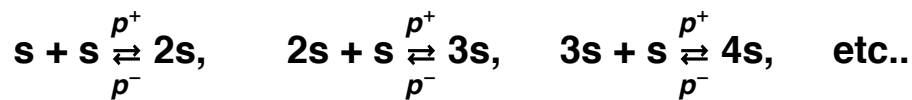
Teoria del suono (Rayleigh(1880))

Scopo: Stimare l'ampiezza (& intensità) risultante dal mescolamento di n vibrazioni di uguale periodo ed ampiezza ognuna dotata di fase propria casuale.

Rayleigh dimostrò che la risultante soddisfa, in media, l'equazione del calore di Fourier quando $n \gg 1$.

Consideriamo il seguente processo aleatorio. Partendo dalla coordinata $x=0$ si aggiunga un segmento s di lunghezza $\mathcal{L}=1$ con probabilità p^+ e se ne sottragga uno con probabilità p^- . Nel caso in cui non ci sia niente da sottrarre non accade nulla ovvero $x \geq 0$.

Possiamo scrivere la catena di reazioni



< | >

Sia $f(n, m)$ la probabilità che il segmento
sia lungo n dopo m eventi (**evento** \equiv **somma** $+1 \vee -1$)

$$f(n, m+1) - f(n, m) = p^+ f(n-1, m) + p^- f(n+1, m) - p^- f(n, m) - p^+ f(n, m);$$

in altri contesti, analoghe equazioni prendono il nome di equazioni di velocità.

$$\text{Posto } J_n = p^+ f(n-1, m) - p^- f(n, m),$$

che è il flusso effettivo di formazione di un segmento lungo n , si può scrivere

$$f(n, m+1) - f(m, n) = J(n, m) - J(n+1, m),$$

ovvero, passando al continuo,

$$\frac{\partial f}{\partial m} = -\frac{\partial J}{\partial n}. \quad (\#)$$

Possiamo riscrivere il flusso

$$J_n = p^+ [f(n-1, m) - f(n, m)] + \Delta p f(n, m),$$

$$\text{con } \Delta p = p^+ - p^-. \text{ Nel continuo } J(n) = -p^+ \frac{\partial f}{\partial n} + \Delta p f(n, m),$$

così l'equazione (#) diviene

$$\frac{\partial f}{\partial m} = p^+ \frac{\partial^2 f}{\partial n^2} - \Delta p \frac{\partial f}{\partial n} \quad (\natural)$$

$$\text{Ovviamente se } p^+ = p^-, \frac{\partial f}{\partial m} = p \frac{\partial^2 f}{\partial n^2}.$$

$$\text{La } (\natural) \text{ è la seconda equazione di Fick: } \frac{\partial \phi}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right),$$

dove Q è, ad esempio, la sezione della barra o del contenitore. Se $Q = \text{cost}$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = K \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Barra infinita

Con le condizioni iniziali $f(x,0)=\delta(x)$ ed $-\infty < x < \infty$, la soluzione è

$$y(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \quad (\$)$$

Il valor medio dell'intensità è

$$\text{Integrate} \left[\frac{x^2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \{x, -\infty, \infty\}, \text{Assumptions} \rightarrow \text{Re}[t] > 0 \right]$$

t

ovvero $\langle n^2 \rangle = m$. (segmento lungo n dopo m eventi)

Questo importante risultato mostra che sommando n fasori (onde o passi) orientati casualmente l'intensità dipende linearmente dal loro numero, mentre (si ricorderà) nel caso ci fosse una differenza di fase costante (interferenza e diffrazione) l'intensità del segnale sarebbe proporzionale al quadrato del numero dei fasori.

Determiniamo la soluzione (\$).

< | >

Equazione di diffusione

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

il dato iniziale è $\phi(x, t=0)$ e la sua trasformata di Fourier

$$\phi(x, t=0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(k) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}$$

inoltre

$$\phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(k, t) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione di diffusione si ha

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} = -\kappa k^2 \hat{\phi}$$

la cui soluzione è $\hat{\phi}(k, t) = \hat{\phi}(k, 0) e^{-\kappa k^2 t}$ e pertanto

$$\phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(k, 0) e^{-\kappa k^2 t} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}.$$

Possiamo antitrasformare $\hat{\phi}(k, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi, 0) e^{-ik\xi} d\xi$ e sostituirlo nell'ultima relazione

$$\phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi, 0) e^{-ik\xi} d\xi \right\} e^{-\kappa k^2 t} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi) - \kappa k^2 t} \frac{dk}{2\pi} \right\} \phi(\xi, 0) d\xi$$

=

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \phi(\xi, 0) d\xi,$$

dove si è posto

$$G(x, \xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi) - \kappa k^2 t} \frac{dk}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}}.$$

In particolare, se $\phi(x, 0) = \delta(x)$,

$$\phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \delta(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}};$$

$G(x, \xi, t)$ rappresenta l'allargamento di un impulso dovuto alla diffusione.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - k^2} \frac{dk}{2\pi}$$

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}$$

InverseFourierTransform[e^{-k^2} , k , x]

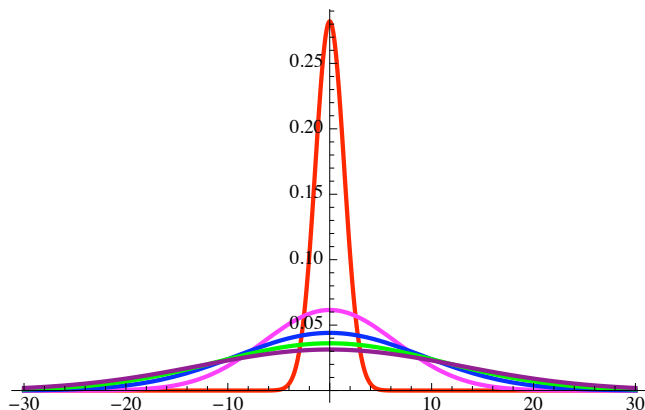
$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{2}}$$

**col = {Directive[Red, Thick],
Directive[Magenta, Thick], Directive[Blue, Thick],
Directive[Green, Thick], Directive[Purple, Thick]};**

Gp1 = Table [

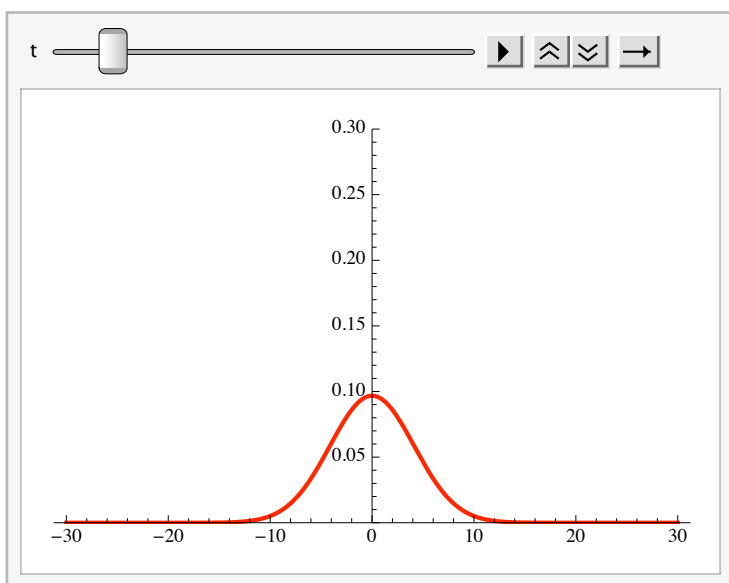
Plot [$\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$, { x , -30, 30}, **PlotStyle** → **col**[[$(t - 1) / 20 + 1$]],

PlotRange → **All**], { t , 1, 90, 20}]; **Show**[{**Gp1**}]



Animazione

```
Animate[Plot[ $\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}$ , {x, -30, 30},  
PlotRange -> {0, .3}, PlotStyle -> {Red, Thick}], {t, 1, 90, .5}]
```



Esempio 1 : Passeggiata dell' ubriaco

(*Diffusione di 1 particella su una superficie piana di area (ncorn x ncorn);
nexpe= n di esperimenti

ntot= n di particelle (in questo caso =1);

ndiff= n di passi di diffusione della singola particella;

ncorn=lato della cornice che delimita l'area di diffusione;

pf=coordinate (x,y) iniziali degli adatomi(1 in questo caso);

pf1= coordinate (x,y) degli adatomi dopo diffusione(1 in questo caso);

topo1=n. di adatomi con coordinata (x,y),(1 in questo caso);

ldiffx=

cammino di diffusione (insieme delle posizioni occupate dalla particella diffondente);

mldiffx=insieme dei cammini di diffusione degli nexpe esperimenti*)

(*La funzione "Cardinale" muove il pto (x,y)= di pf1 in (x1,y1). La lista

Topo1 è associata univocamente a pf1 e fornisce l'occupazione dei siti

(x,y). Se il sito di arrivo è vuoto le coordinate (x,y) sono cambiate in (x1,y1);

se il sito è occupato il sito iniziale (x,y) è cancellato da pf ,

mentre in Topo1 si cancella la posizione del sito di

partenza e si accresce di una unità la posizione del sito di arrivo.

La funzione cardinale si attiva solo se il sito (x,y) ha occupazione =1 *)

(*La funzione karman pone le condizioni al contorno periodiche sulla cornice *)

```
karman[x_] := Do[
  If[x[[i, 1]] == 0 && x[[i, 2]] != 0, pf1[[i, 1]] = ncorn - 1,];
  If[x[[i, 2]] == 0 && x[[i, 1]] != 0, pf1[[i, 2]] = ncorn - 1,];
  If[x[[i, 1]] == ncorn, pf1[[i, 1]] = 1,];
  If[x[[i, 2]] == ncorn, pf1[[i, 2]] = 1,];
  If[x[[i, 1]] == 0 && x[[i, 2]] == 0, topo1[[i]] = 0,], {i, 1, ntot}]
```

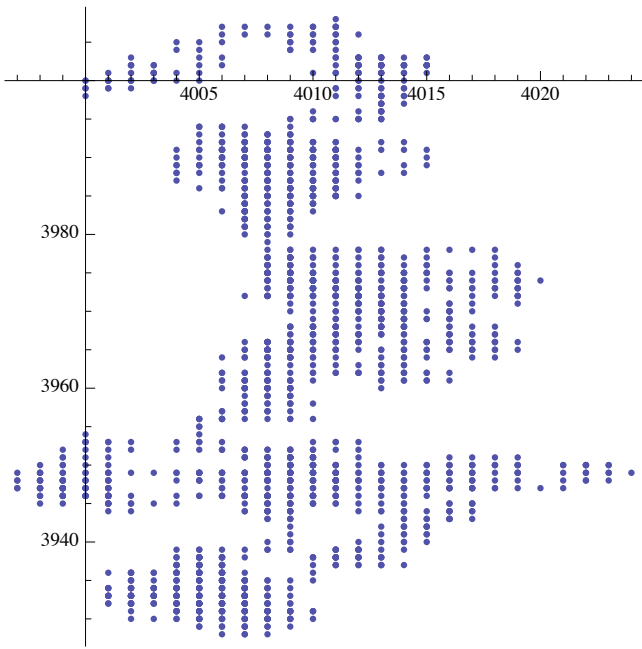
```
cardinale[{x_, y_}] := (x1 = .; y1 = .; r = RandomInteger[{0, 3}];
  If[r == 0, x1 = x; y1 = y + 1,
  If[r == 1, x1 = x - 1; y1 = y,
  If[r == 2, x1 = x; y1 = y - 1, x1 = x + 1; y1 = y]]]);
```

```

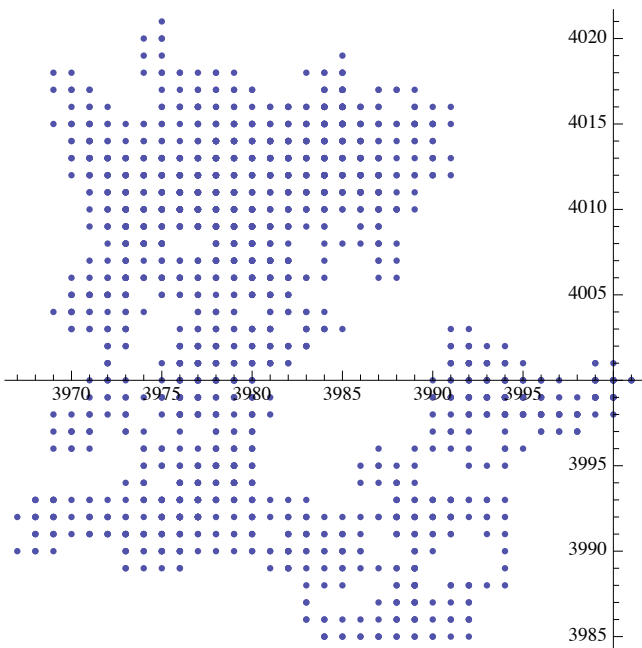
nexpe = 100;
ndiff = 2000;
ldiffx = Table[{0, 0}, {ndiff + 1}];
ncorn = 8000;
ntot = 1;
pf = Table[{0, 0}, {ntot}];
pf1 = Table[{0, 0}, {ntot}];
pf[[1]] = { $\frac{\text{ncorn}}{2}$ ,  $\frac{\text{ncorn}}{2}$ };
ldiffx[[1]] = { $\frac{\text{ncorn}}{2}$ ,  $\frac{\text{ncorn}}{2}$ };
mldiffx = Table[{0, 0}, {nexpe ndiff + nexpe}];
m = 50;
fractm = Table[0, {m}];

Do[
  pf1 = pf;
  topol = Table[1, {ntot}];
  Do[
    Do[If[topol[[i]] ≠ 1, Goto[nexti],];
      cardinale[pf1[[i]]]; presol = 0;
      If[MemberQ[pf1, {x1, y1}] == True,
        presol = Flatten[Position[pf1, {x1, y1}]][[1]];
        pf1[[i]] = {0, 0}; topol[[i]] = 0;
        topol[[presol]] = topol[[presol]] + 1, pf1[[i]] = {x1, y1}];
      Label[nexti]
    , {i, 1, ntot}];
    karman[pf1]; j = i + 1; ldiffx[[j]] = {x1, y1}, {i, 1, ndiff}];
  mldiffx = Drop[Union[mldiffx, ldiffx], 1];
  a = ListPlot[ldiffx, AxesOrigin → { $\frac{\text{ncorn}}{2}$ ,  $\frac{\text{ncorn}}{2}$ }, AspectRatio → 1,
    PlotRange → All]; Print[l]; Print[a], {1, 1, nexpe}];

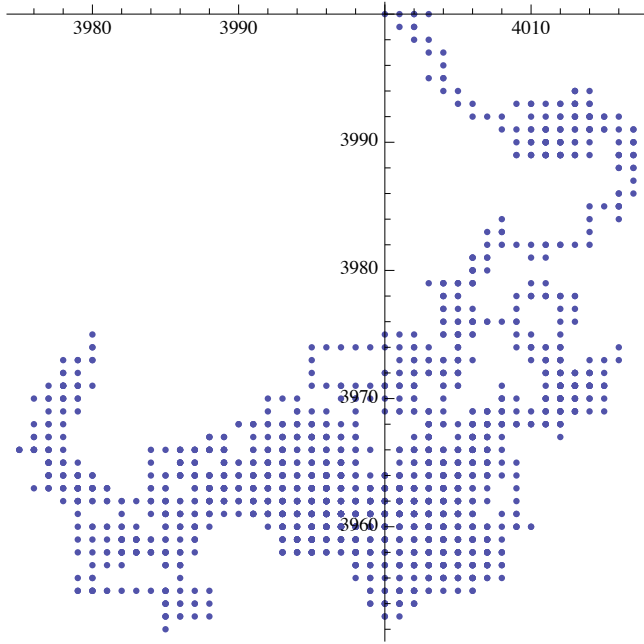
```



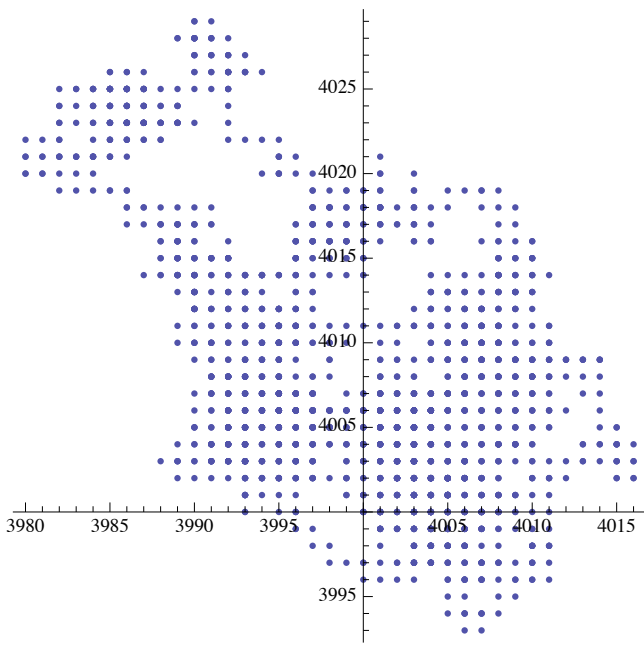
2



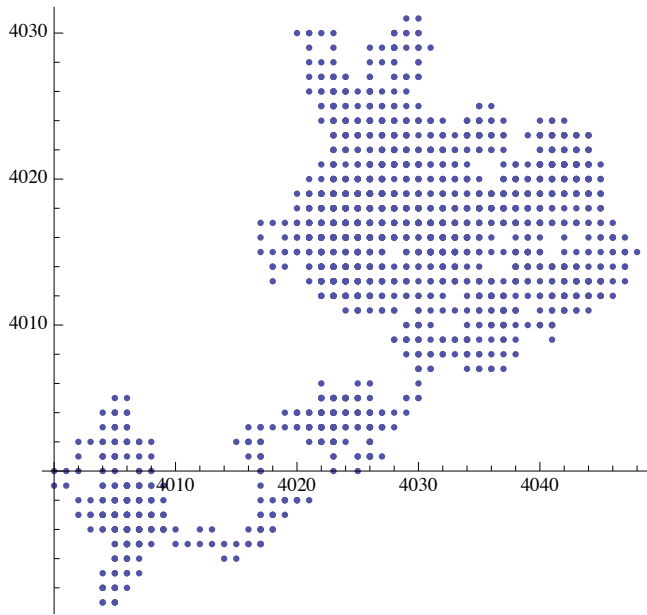
3



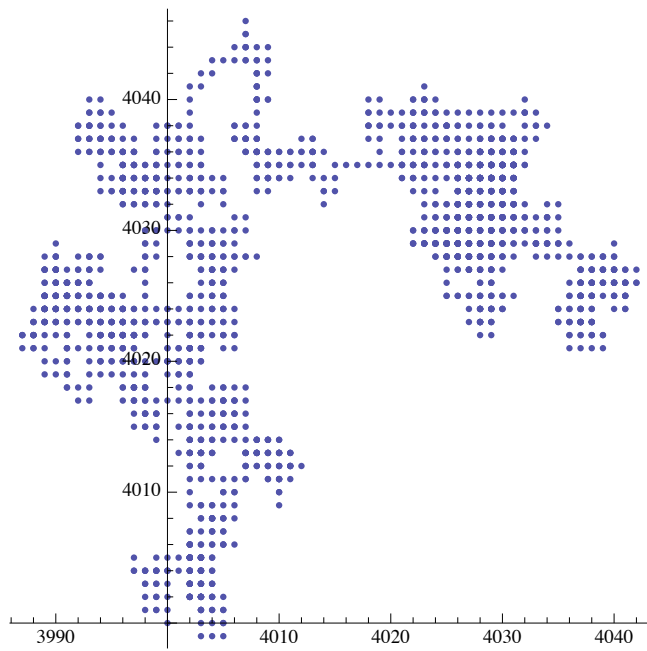
4



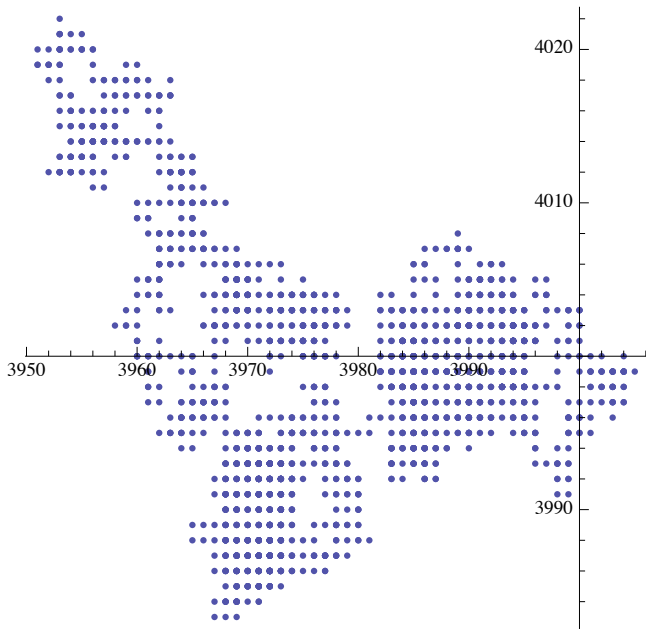
5



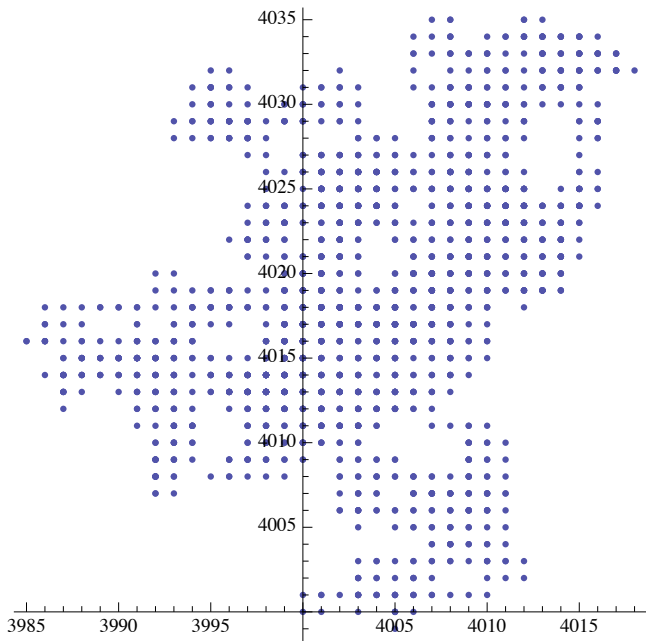
6



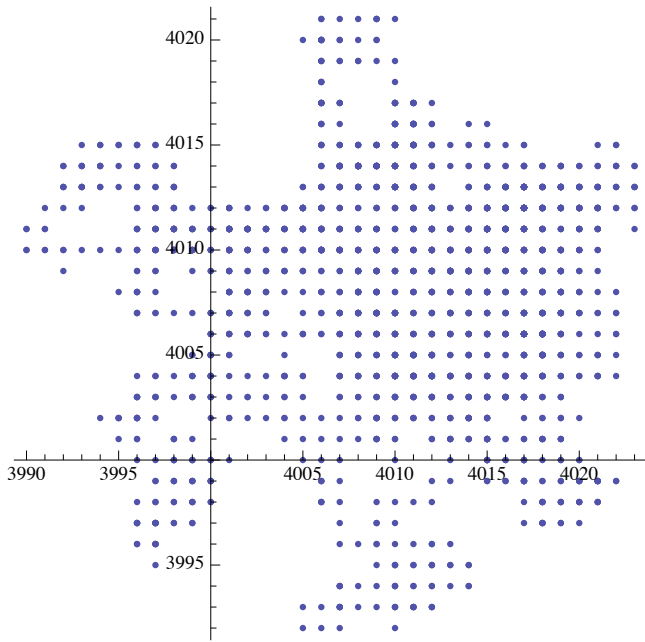
7



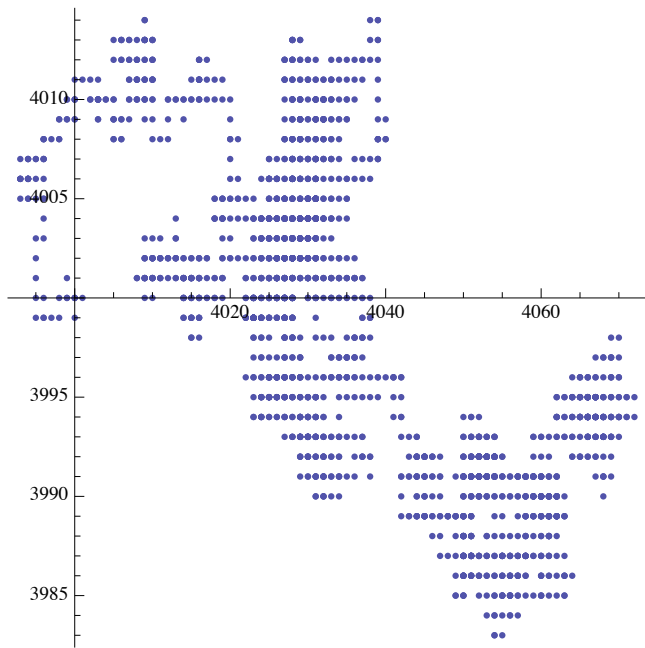
8



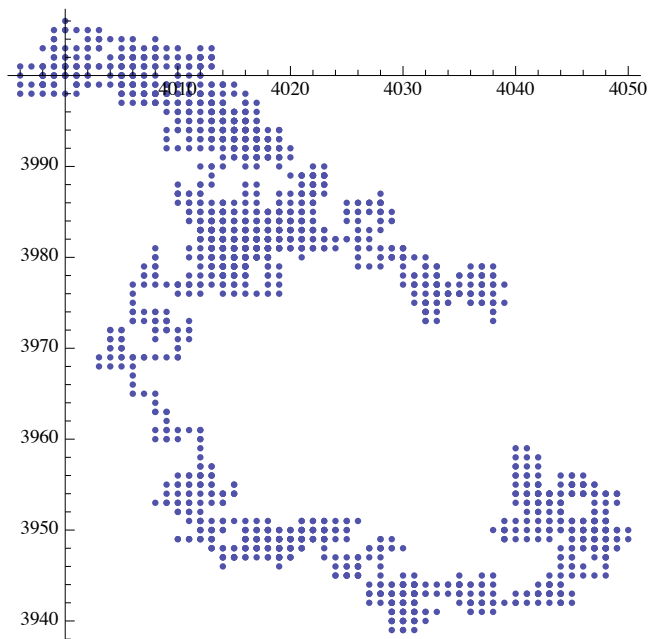
9



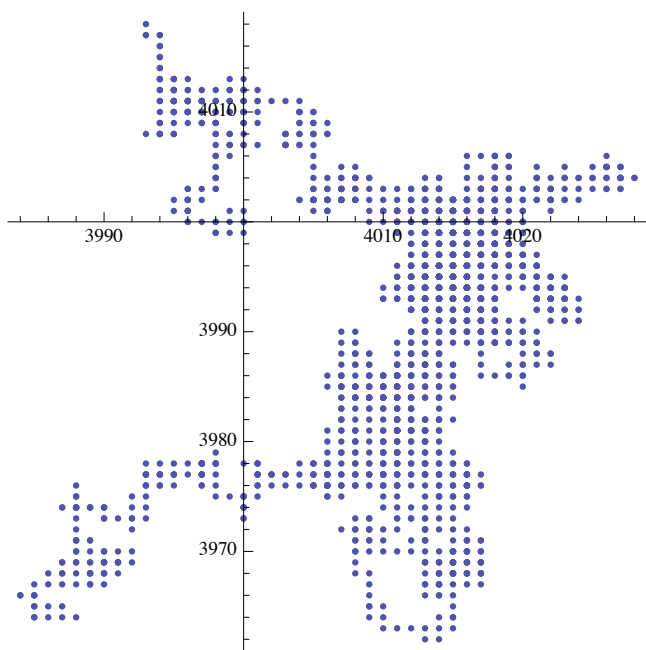
10



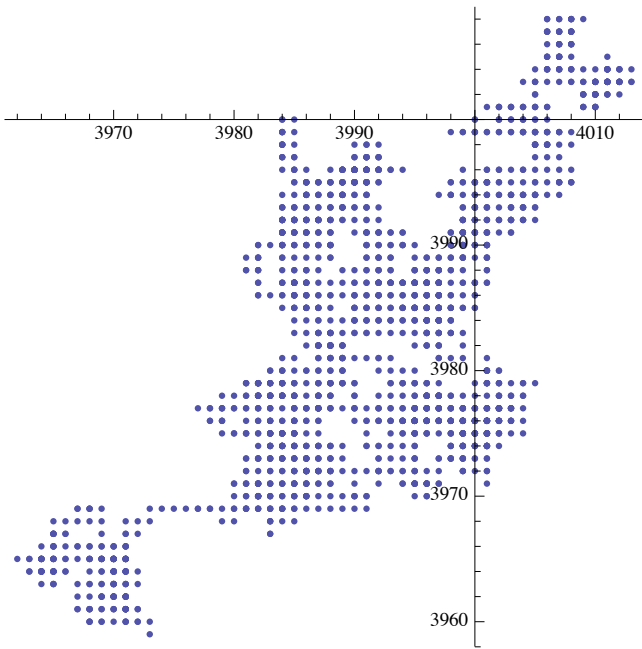
11



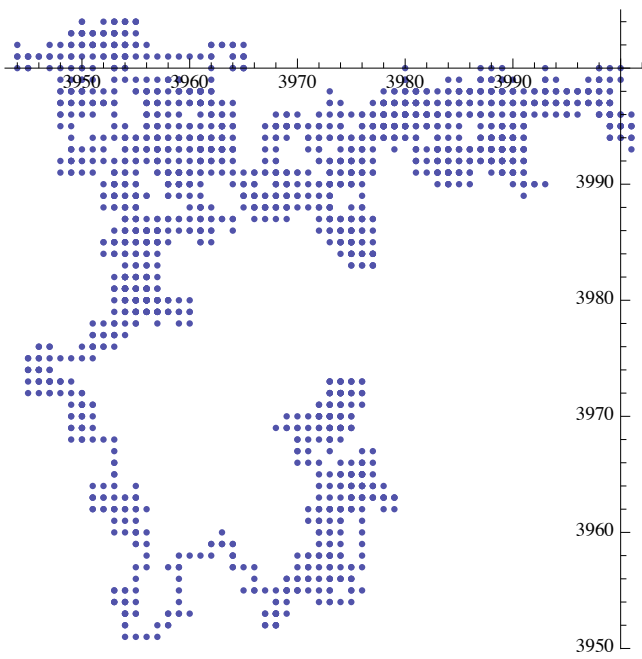
12



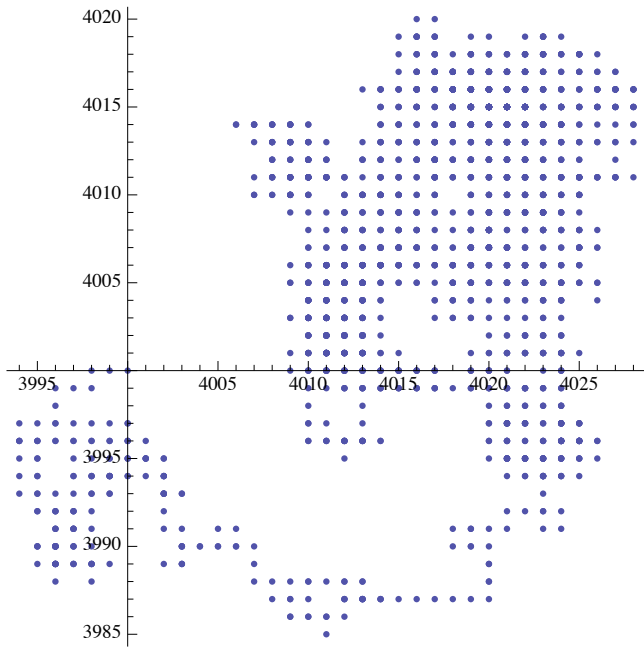
13



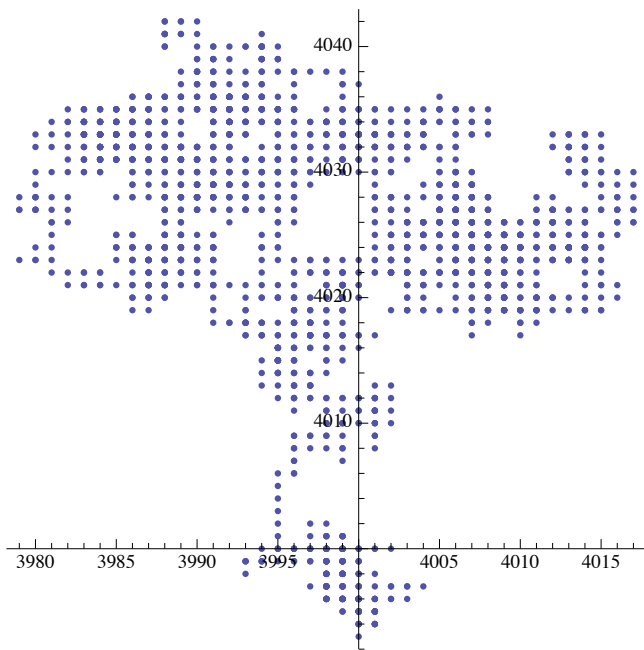
14



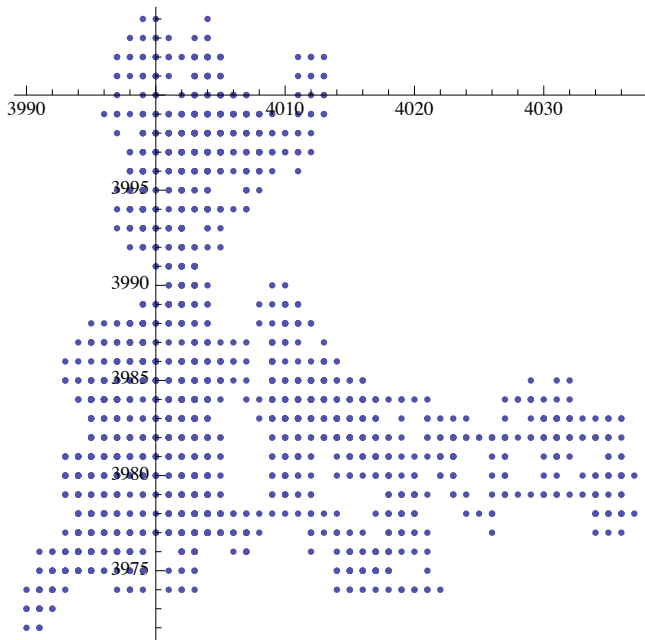
15



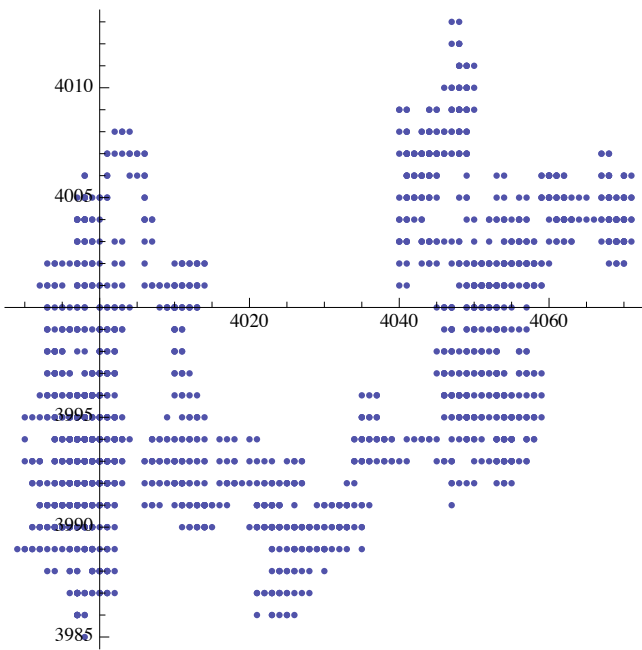
16



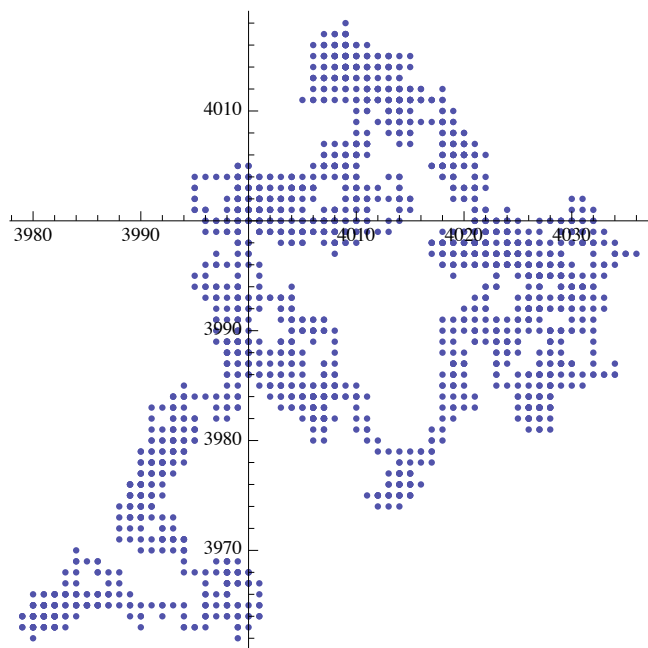
17



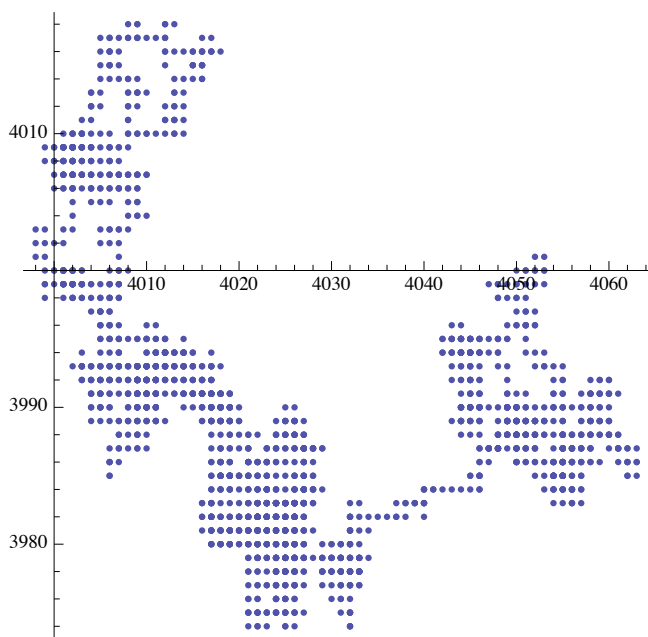
18



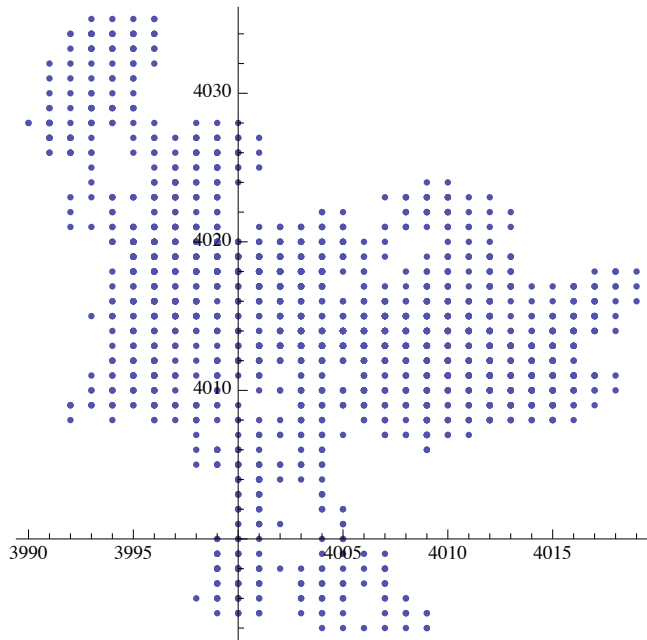
19



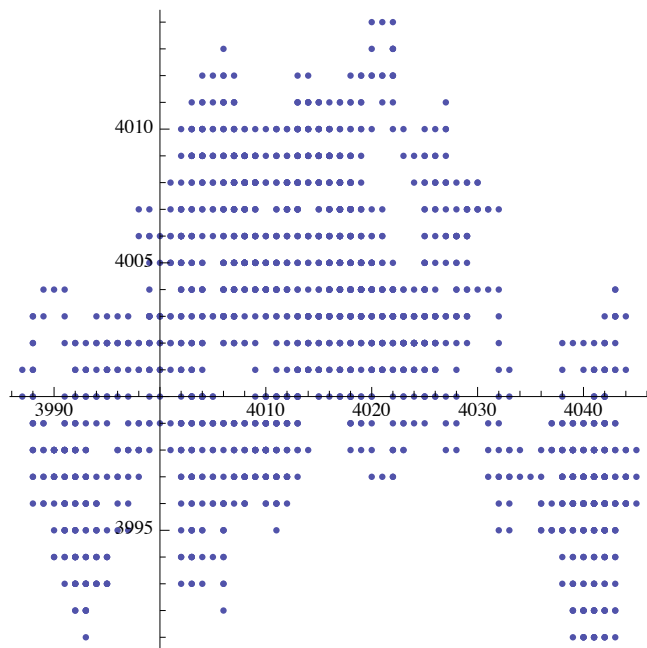
20



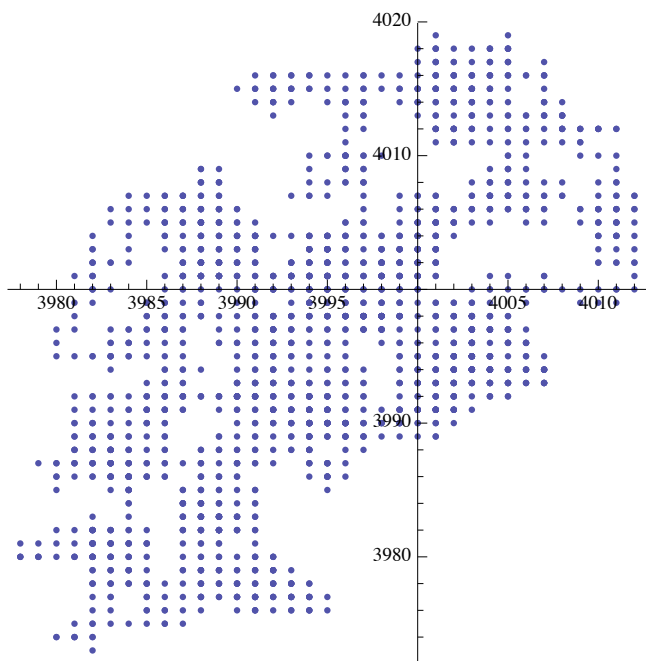
21



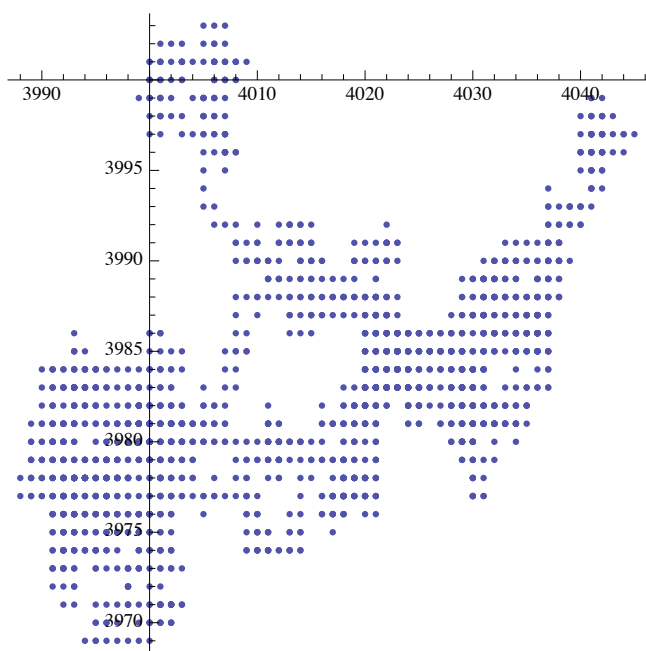
22



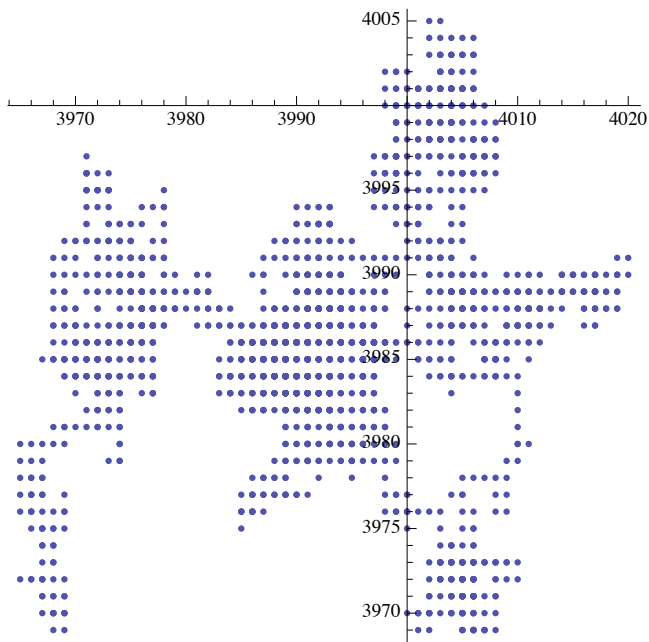
23



24



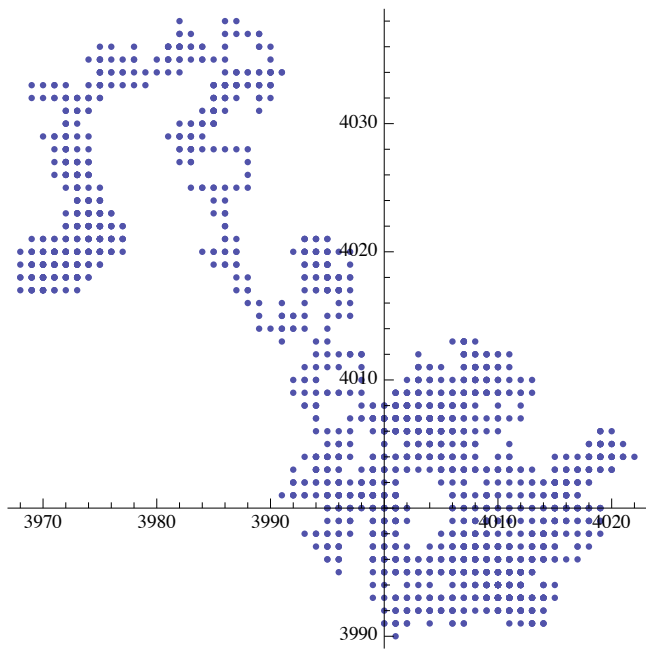
25



26



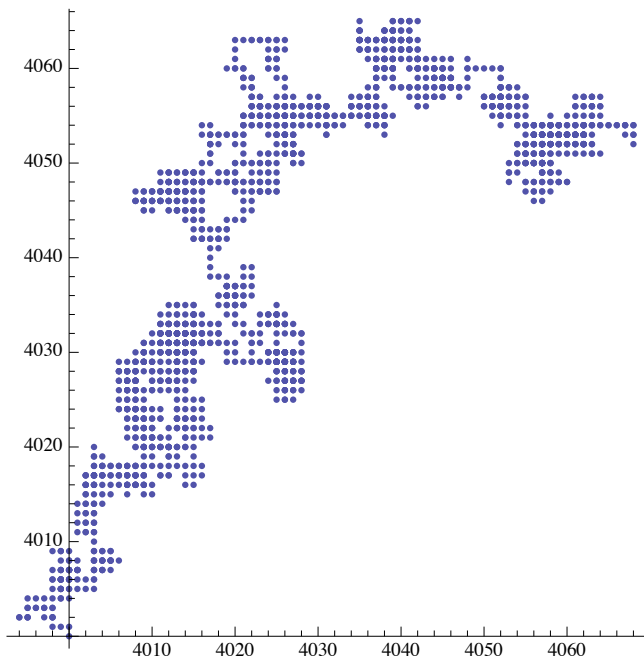
27



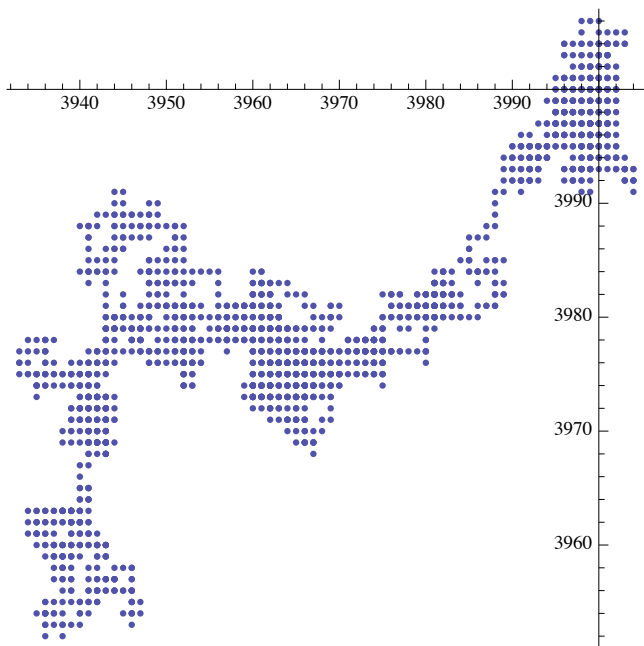
28



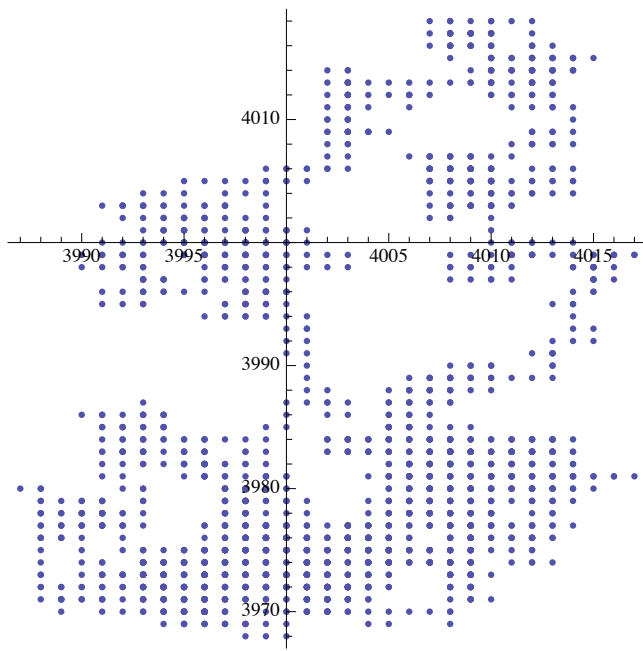
29



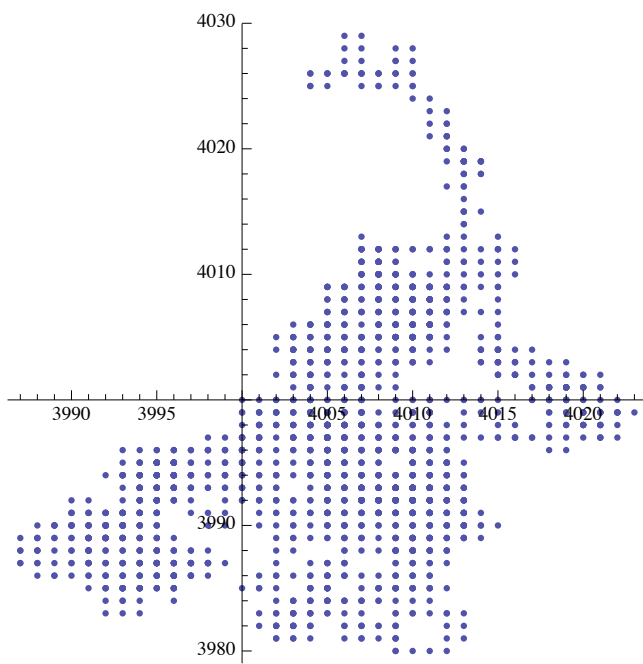
30



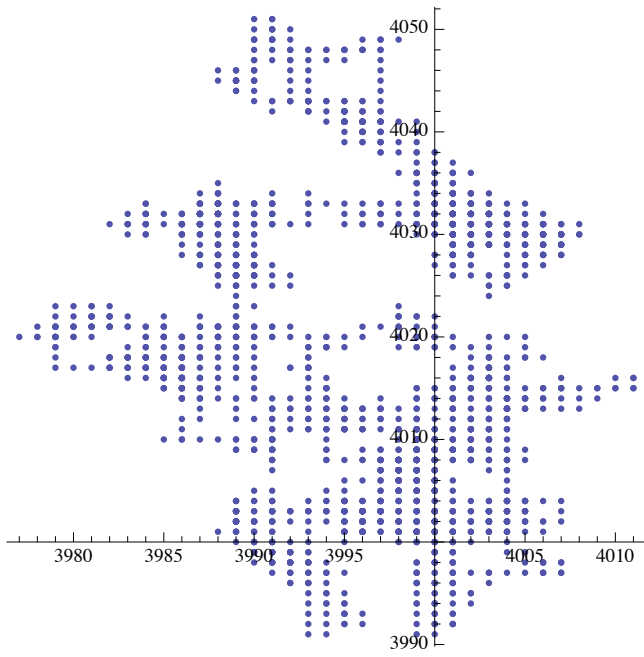
31



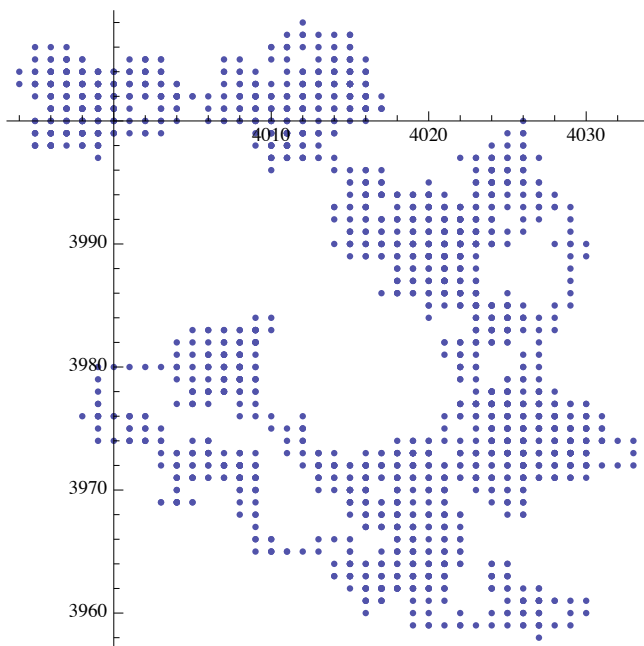
32



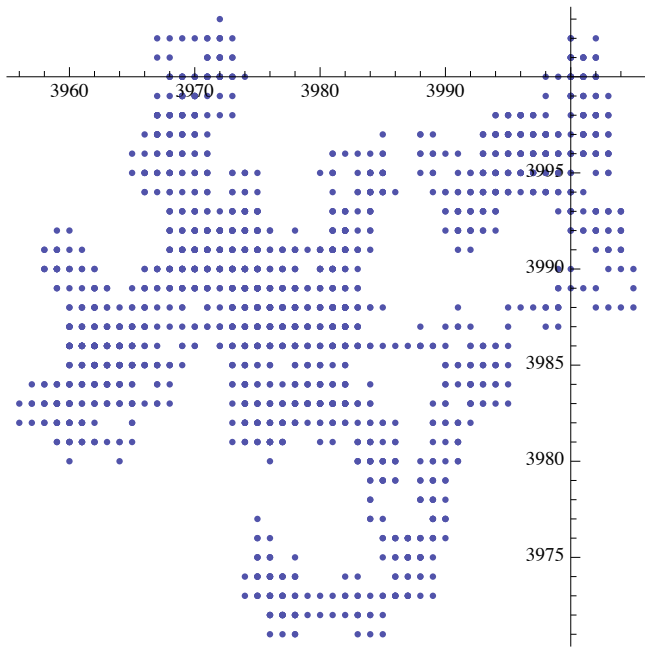
33



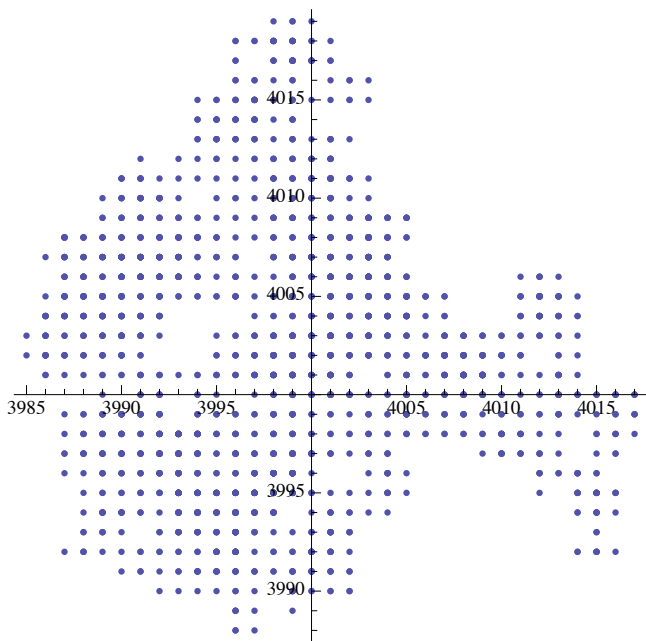
34



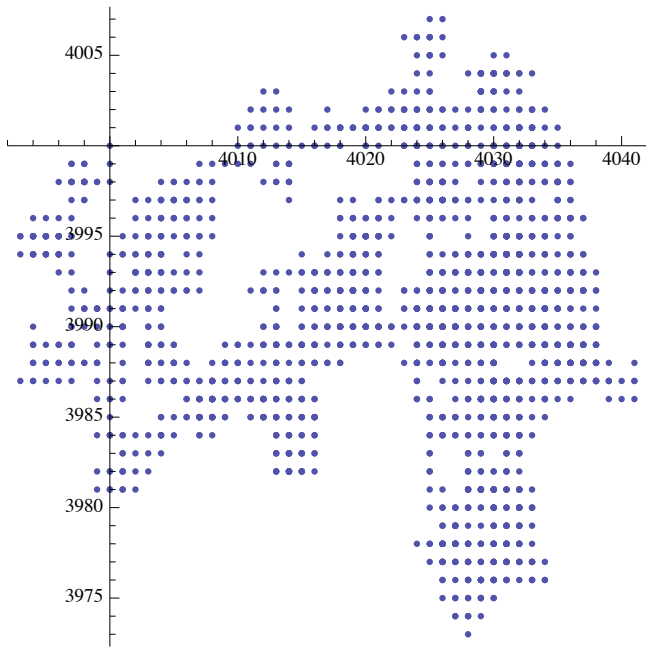
35



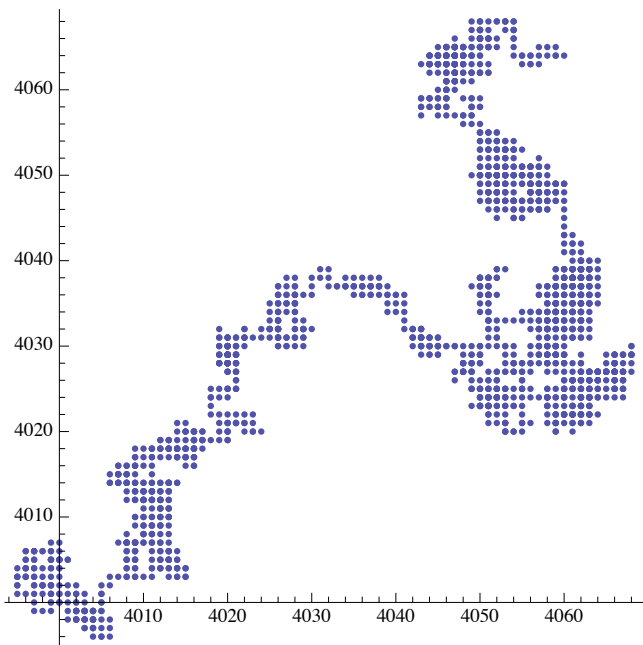
36



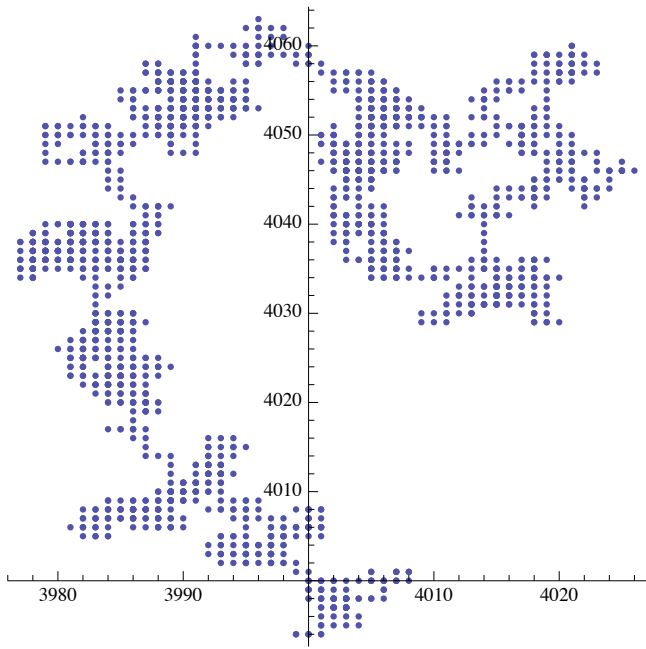
37



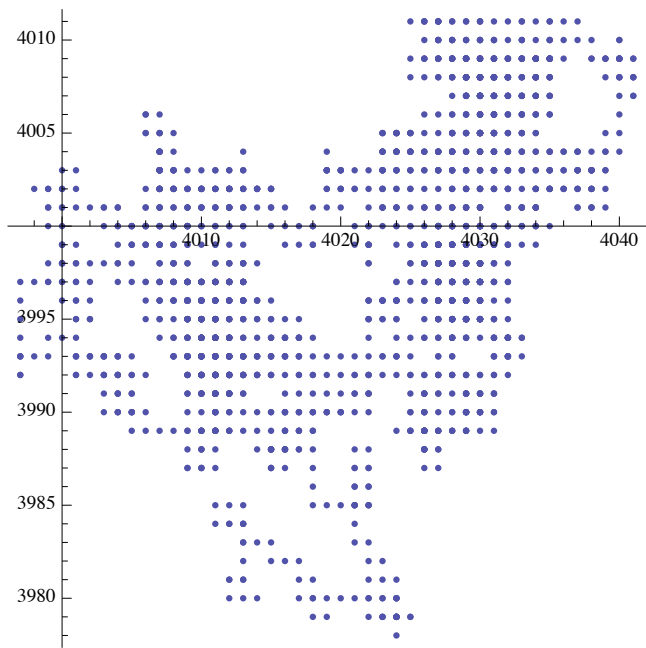
38



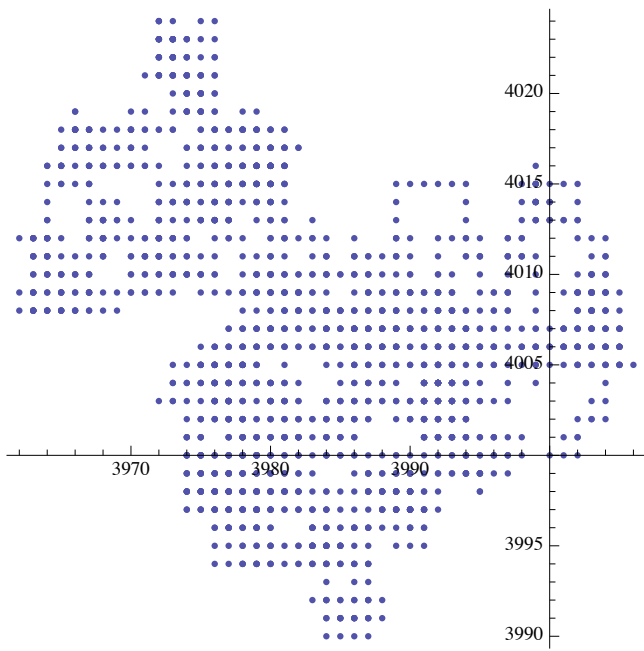
39



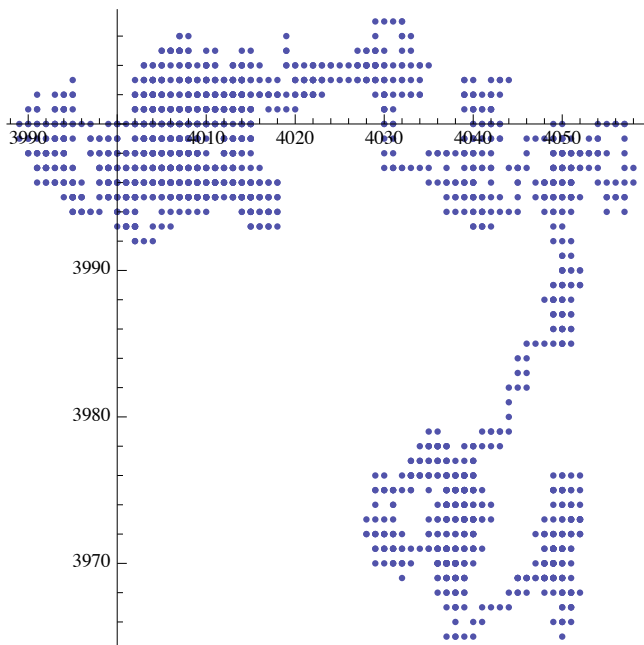
40



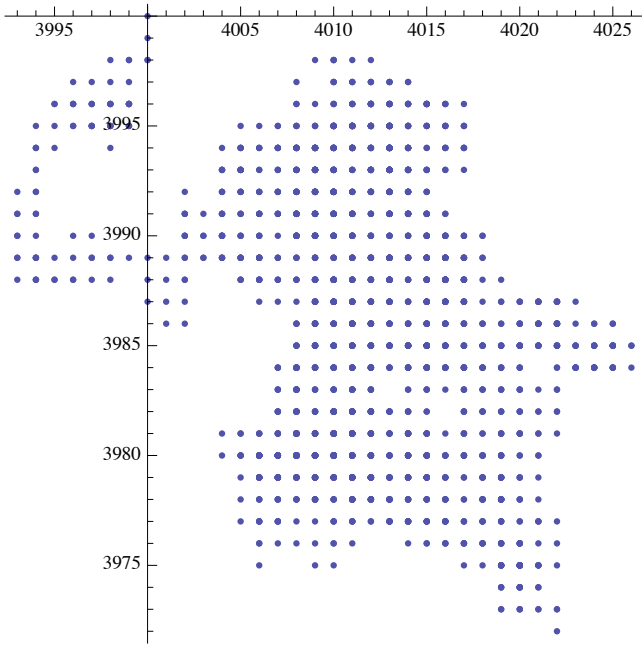
41



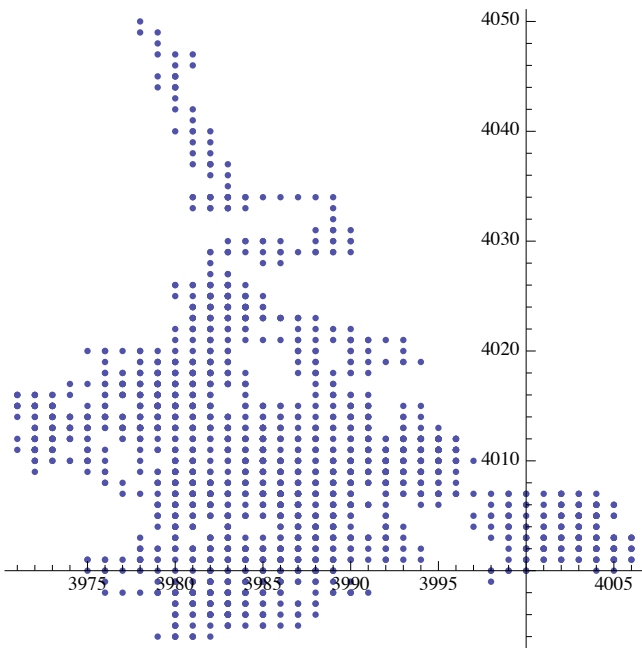
42



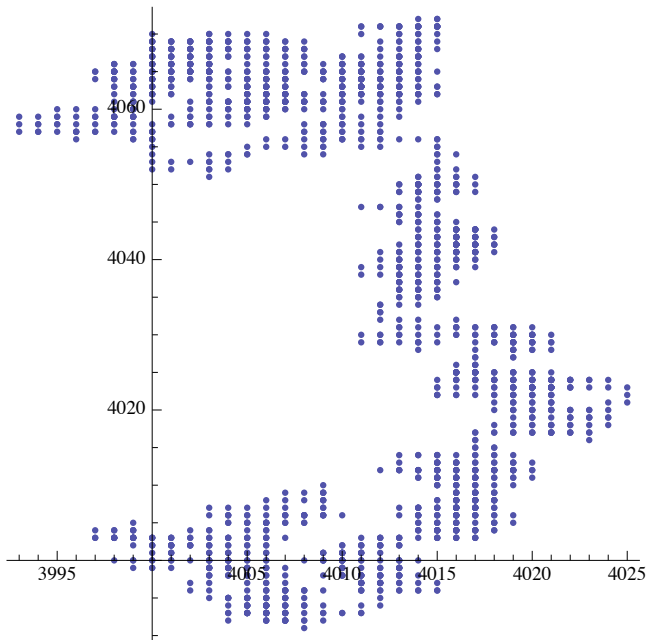
43



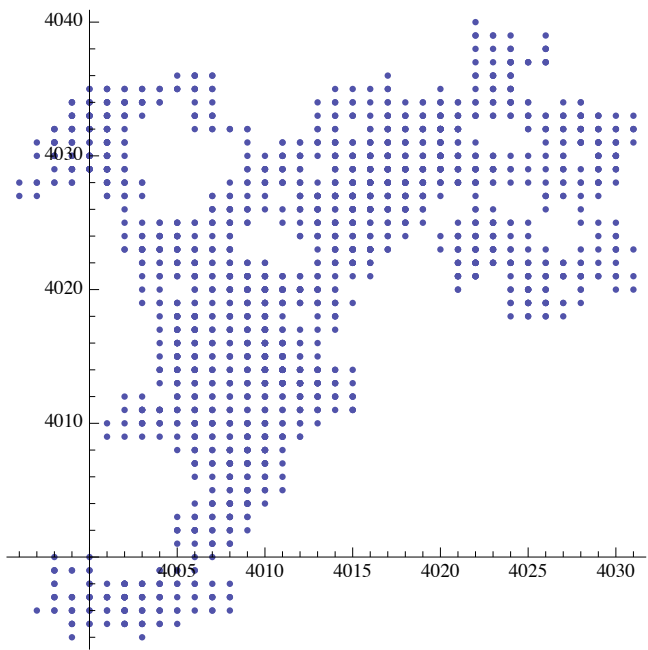
44



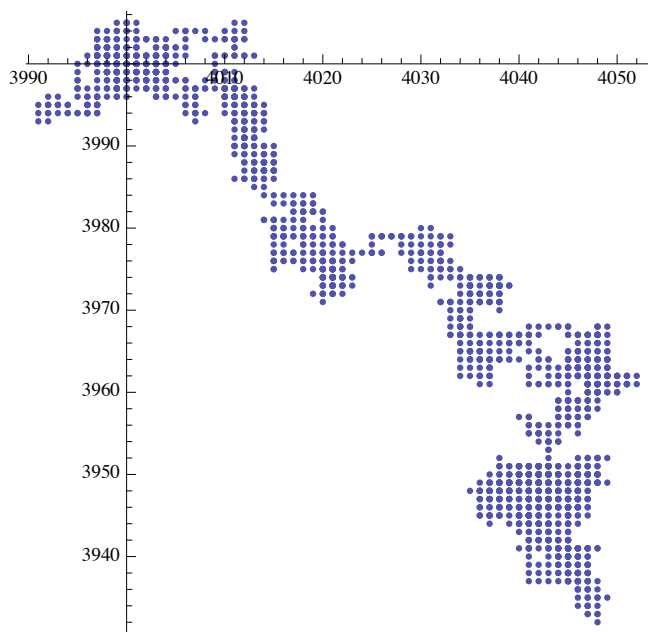
45



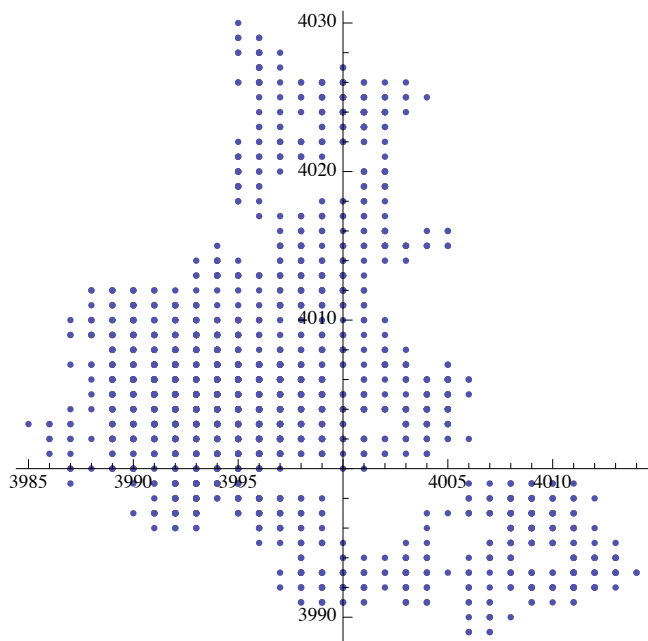
46



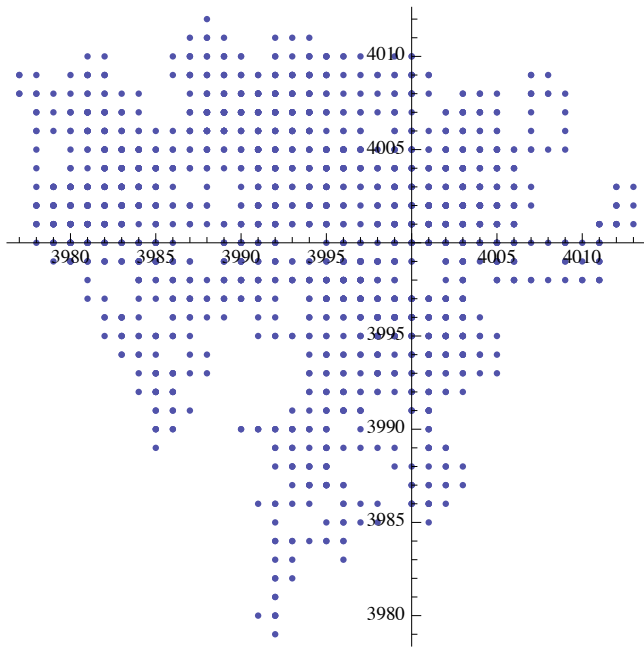
47



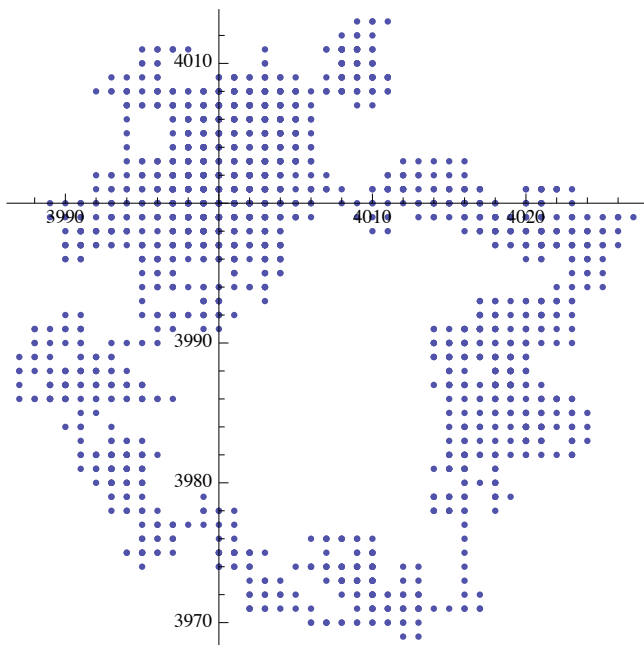
48



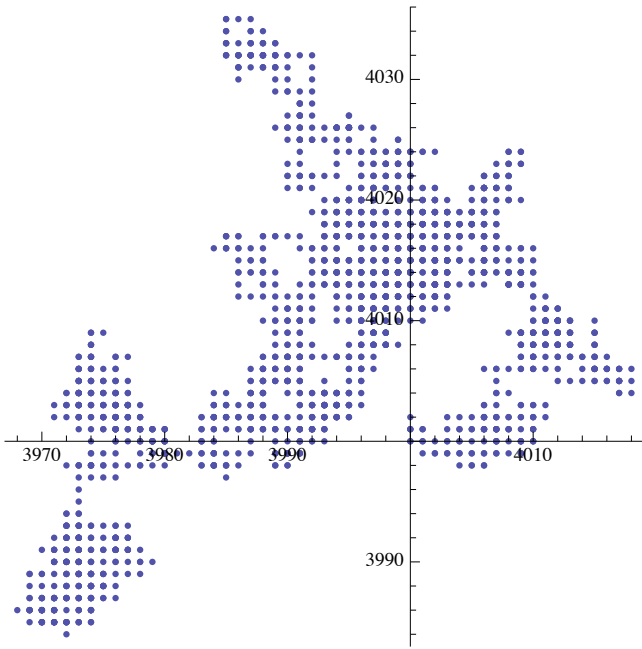
49



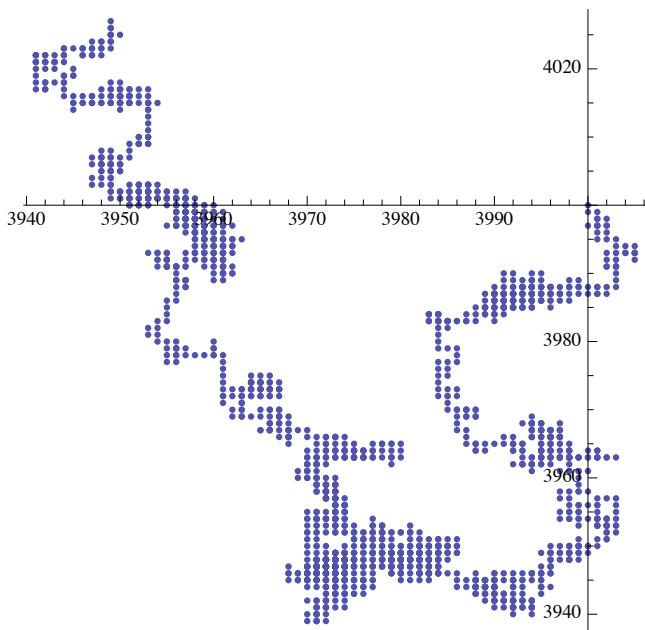
50



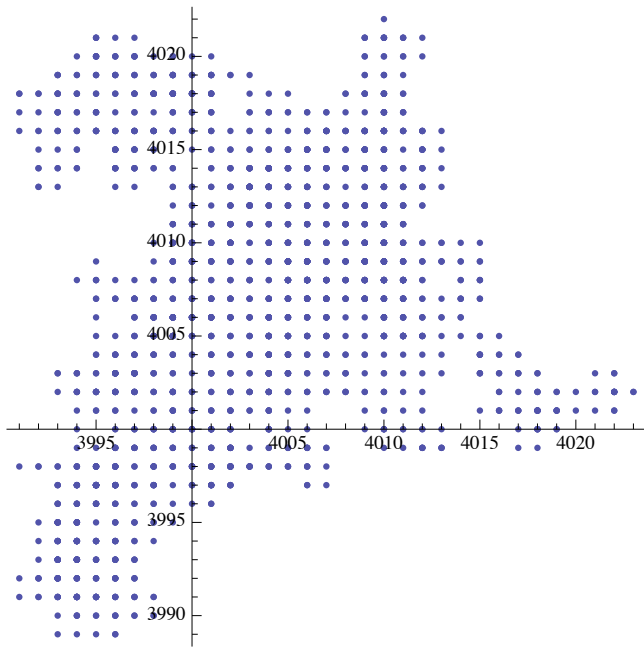
51



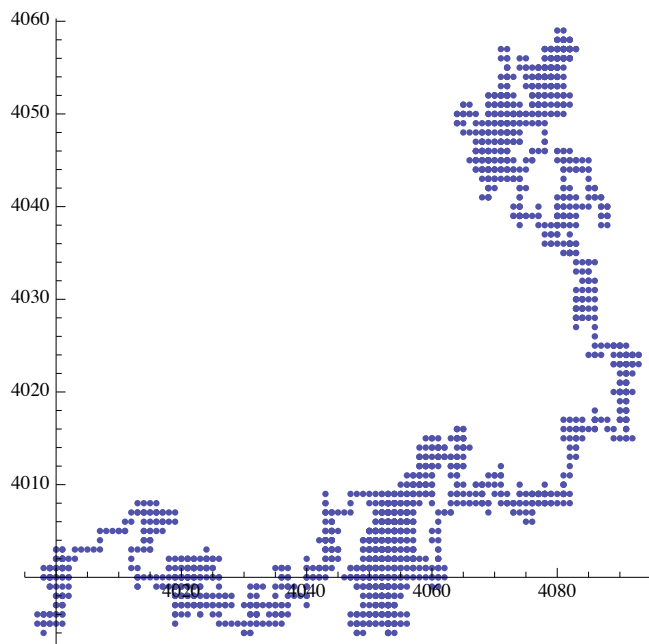
52



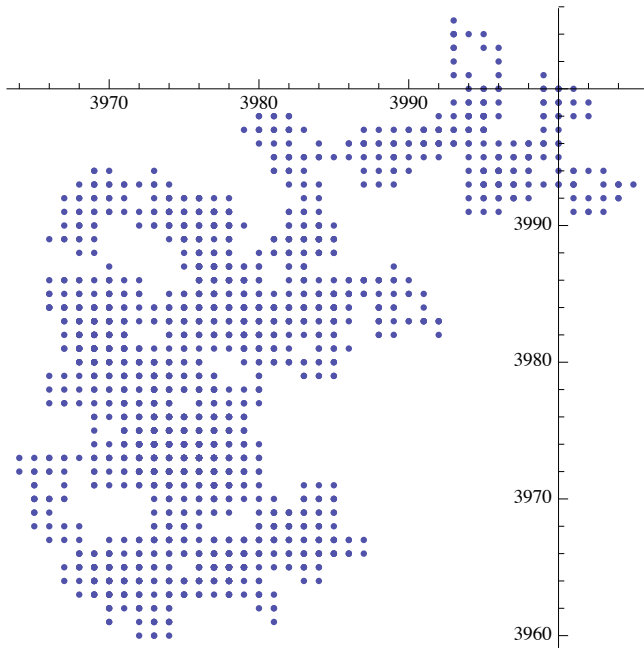
53



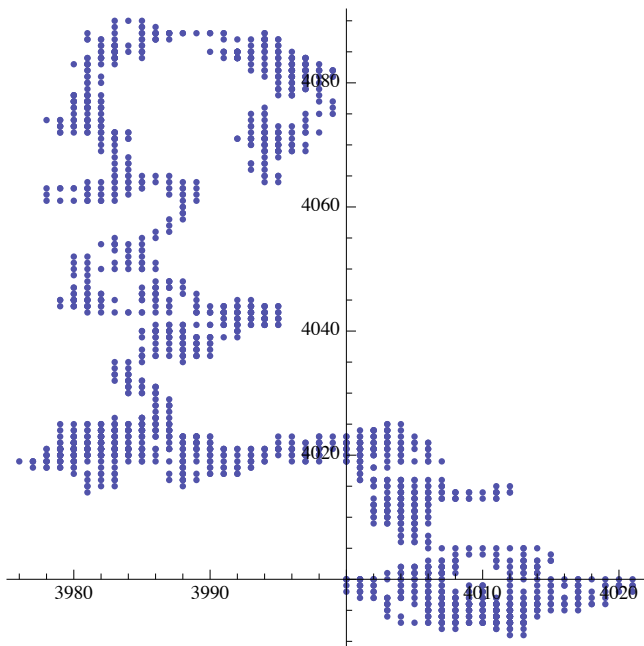
54



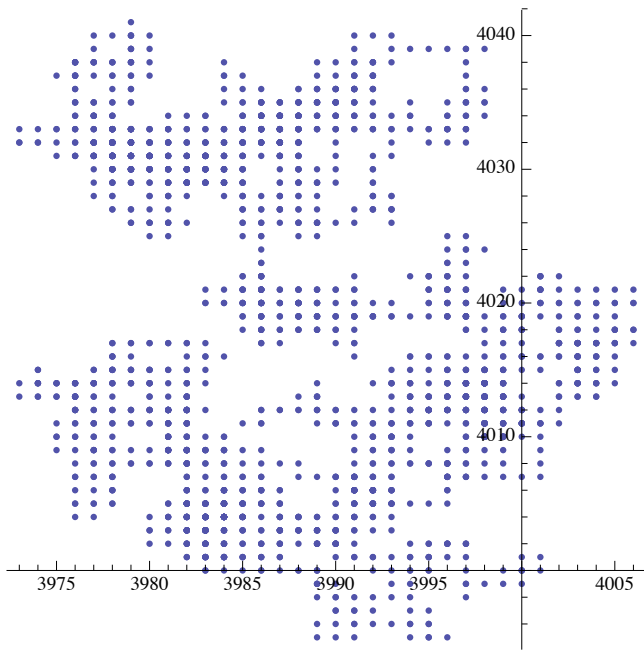
55



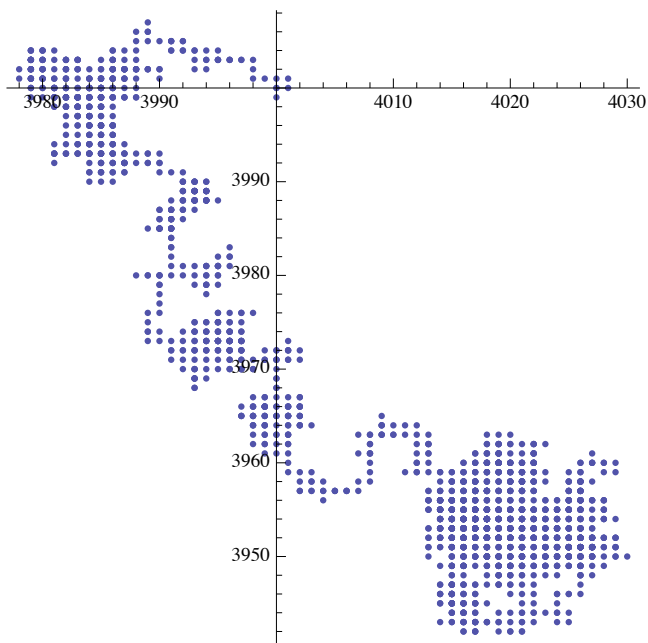
56



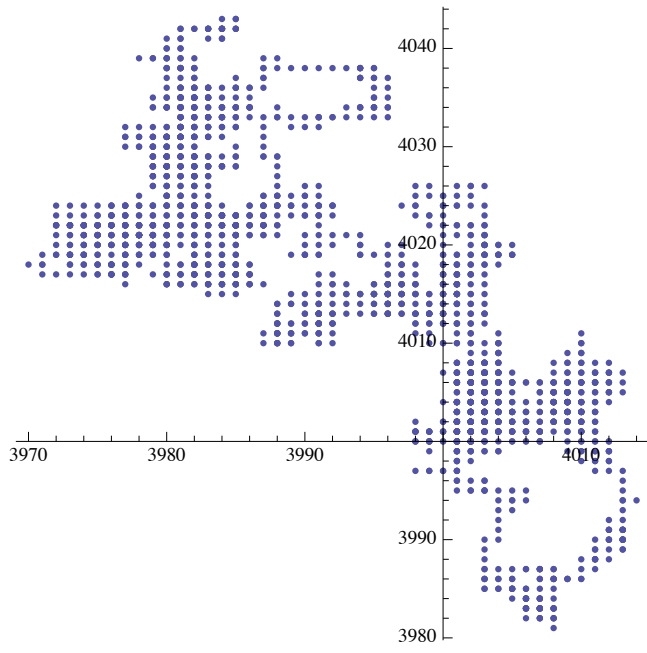
57



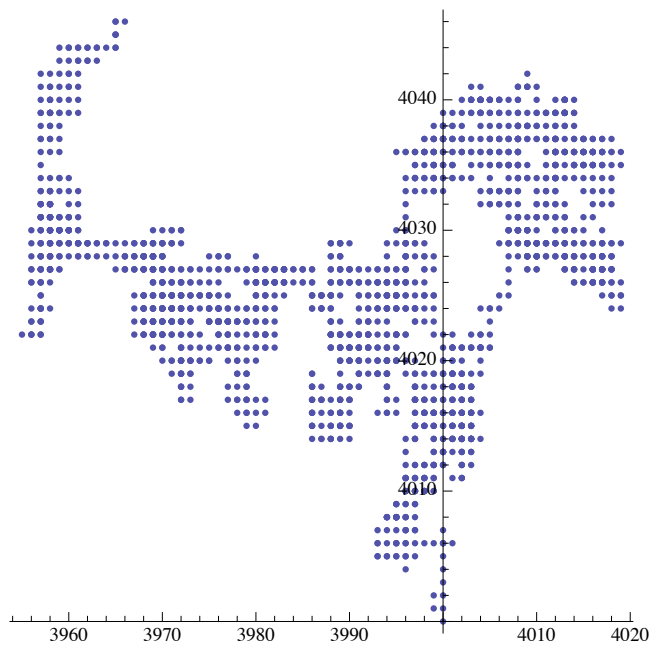
58



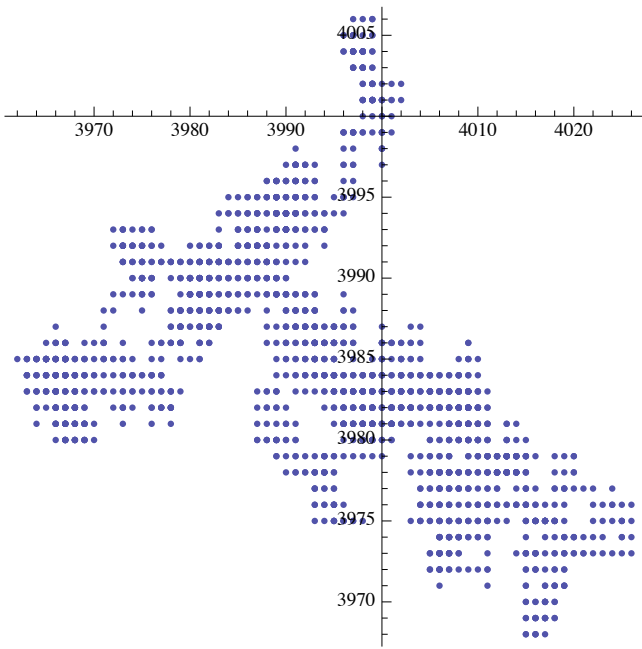
59



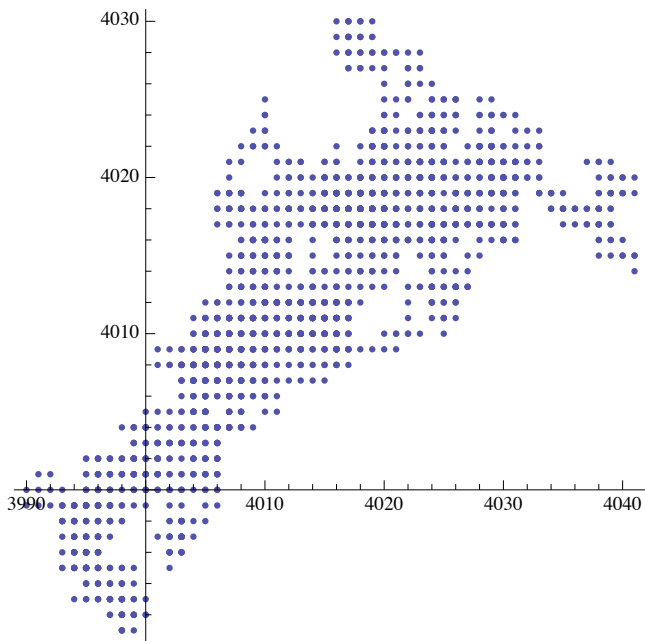
60



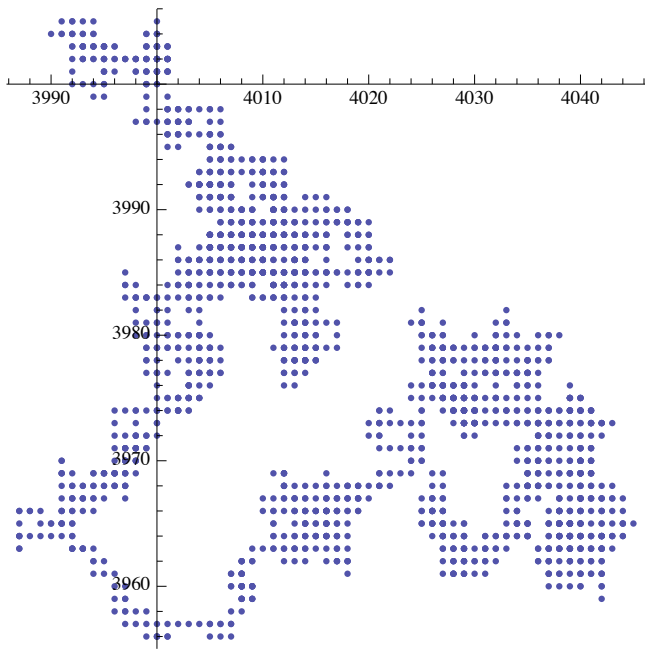
61



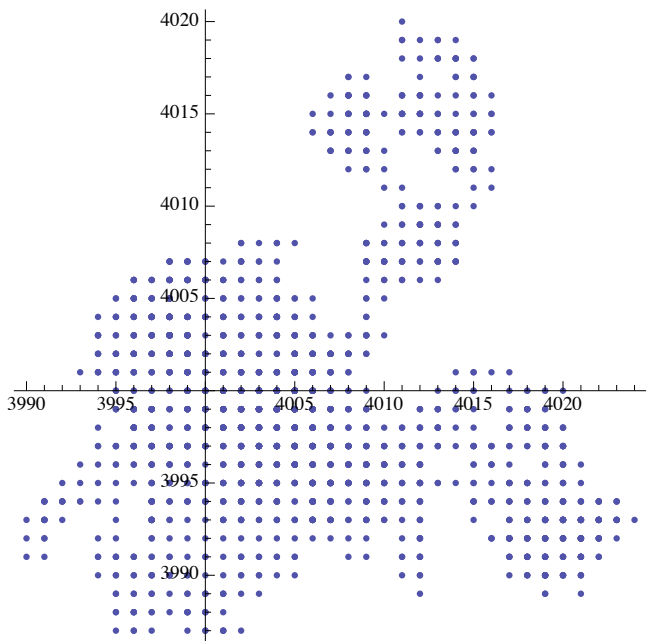
62



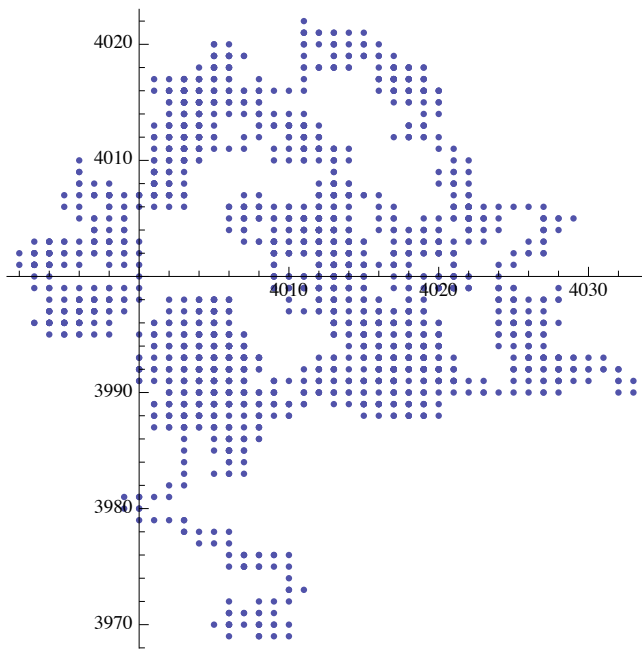
63



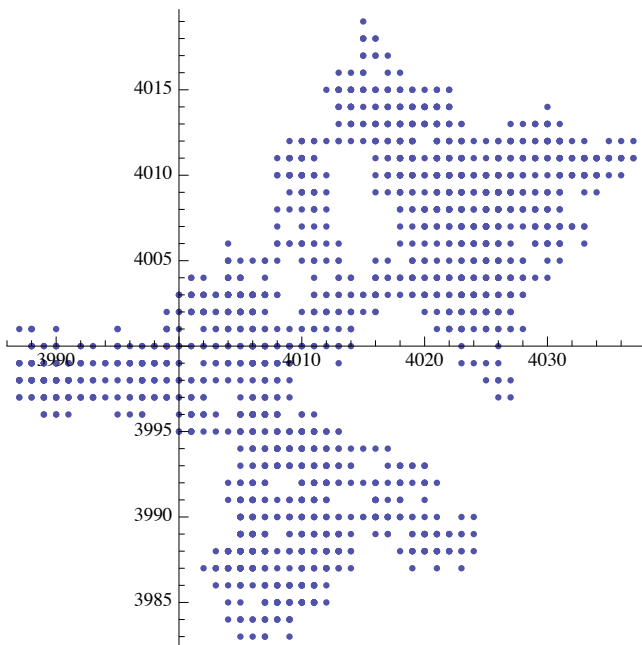
64



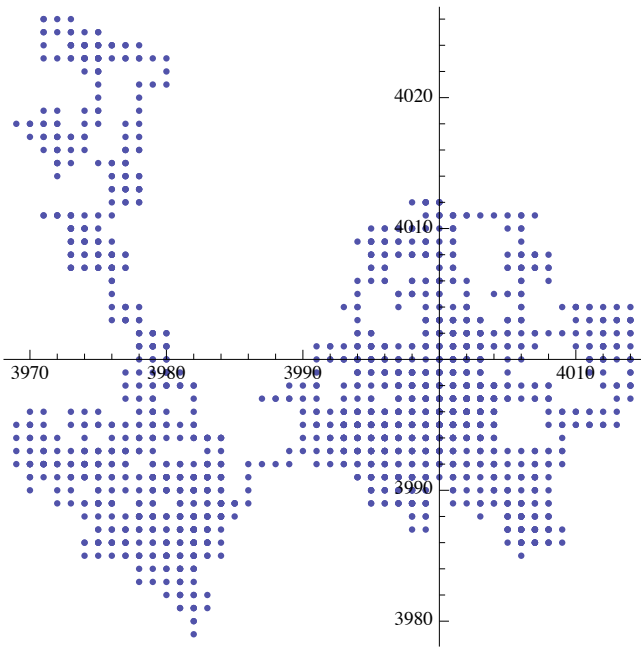
65



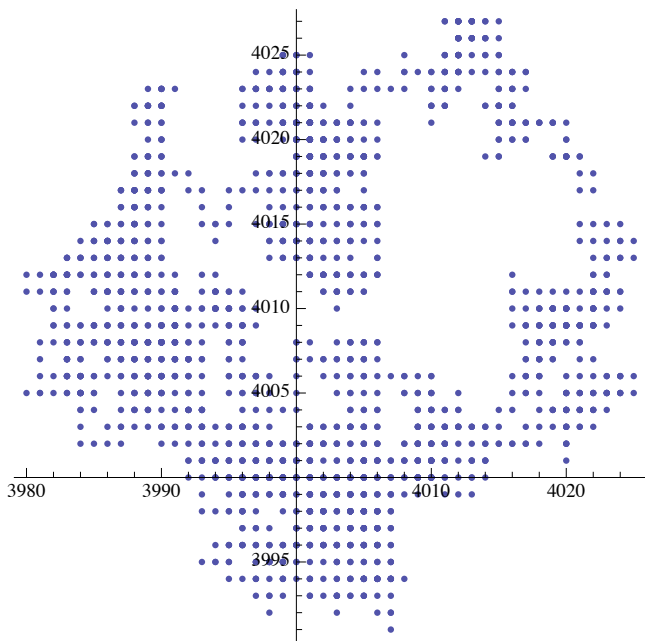
66



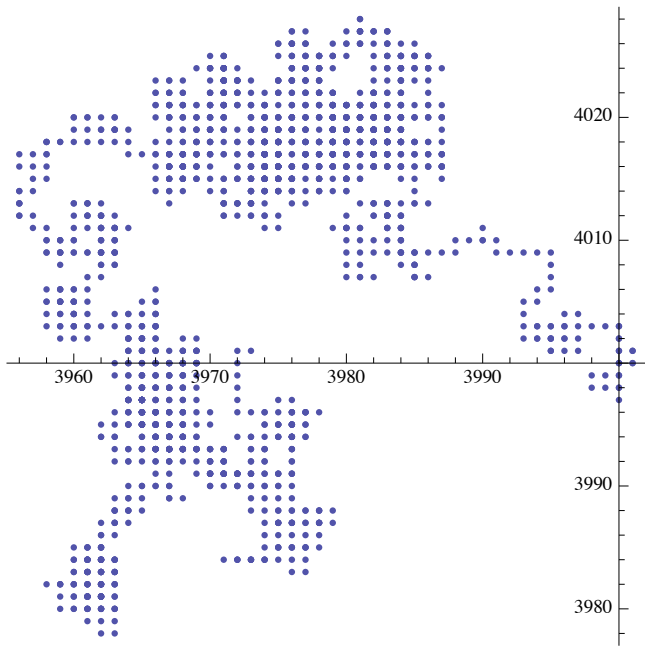
67



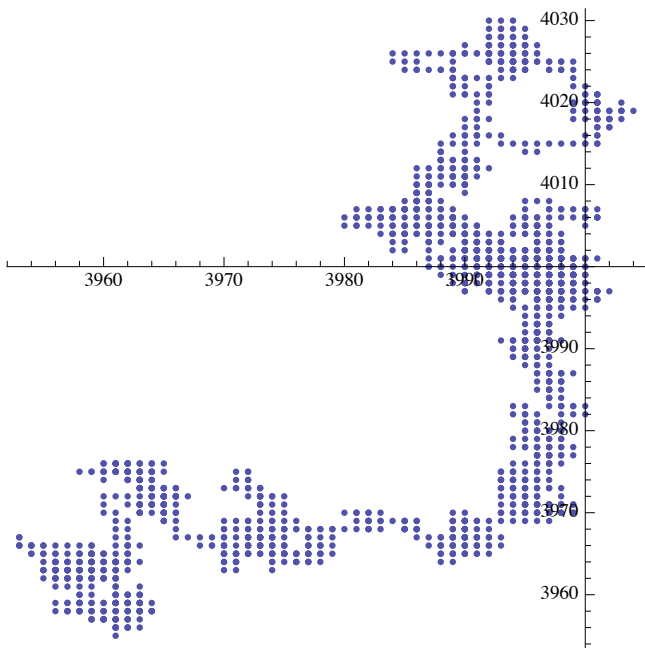
68



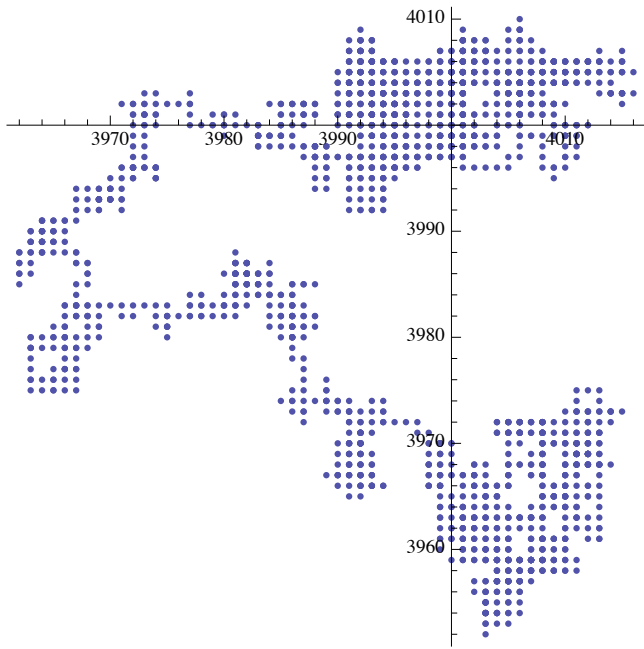
69



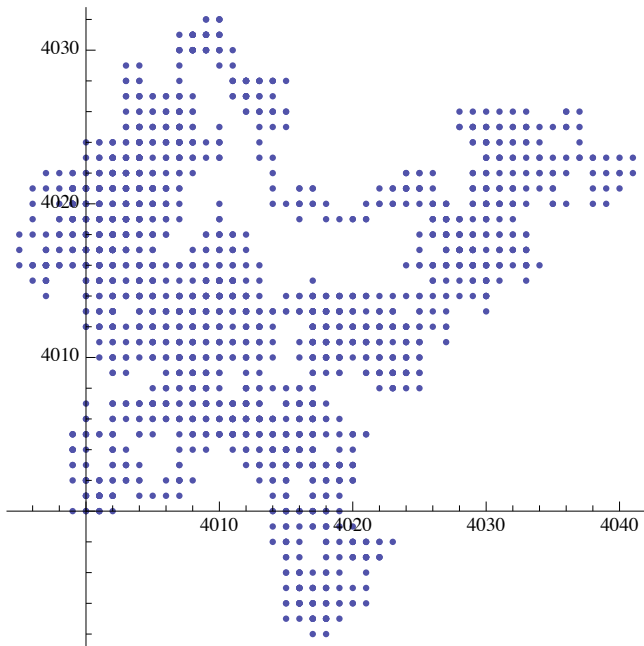
70



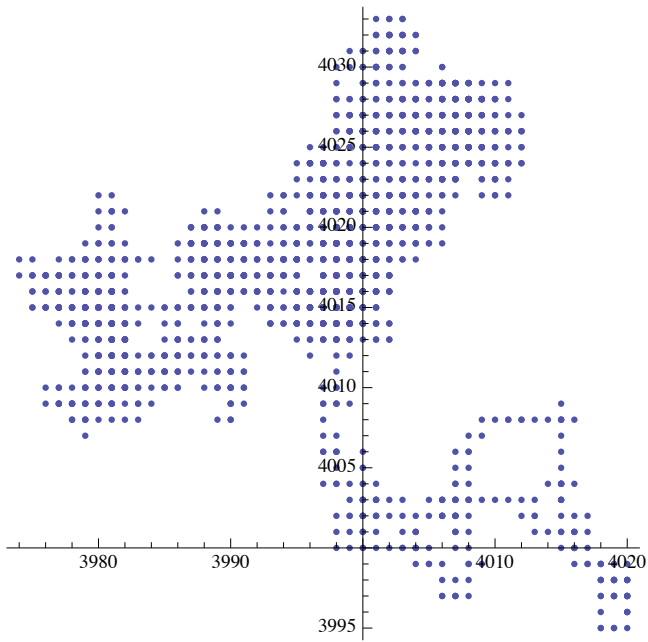
71



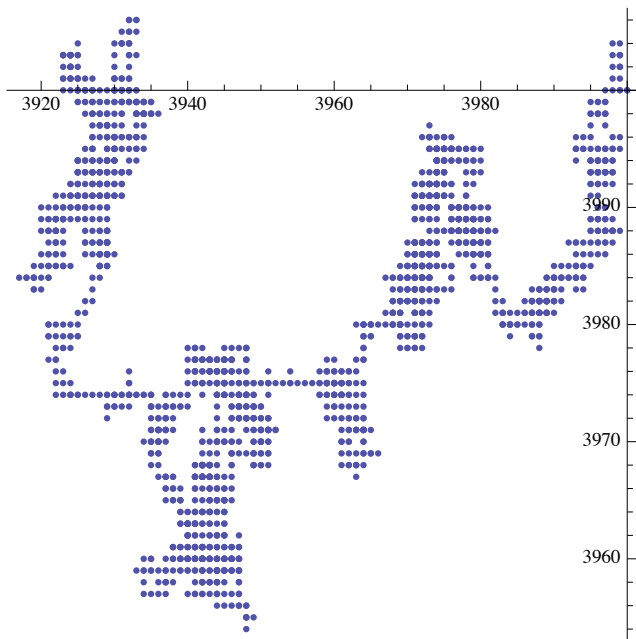
72



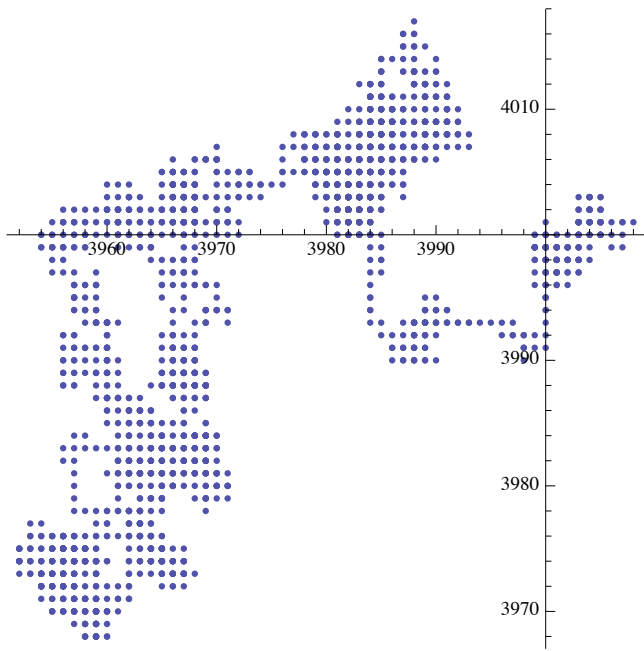
73



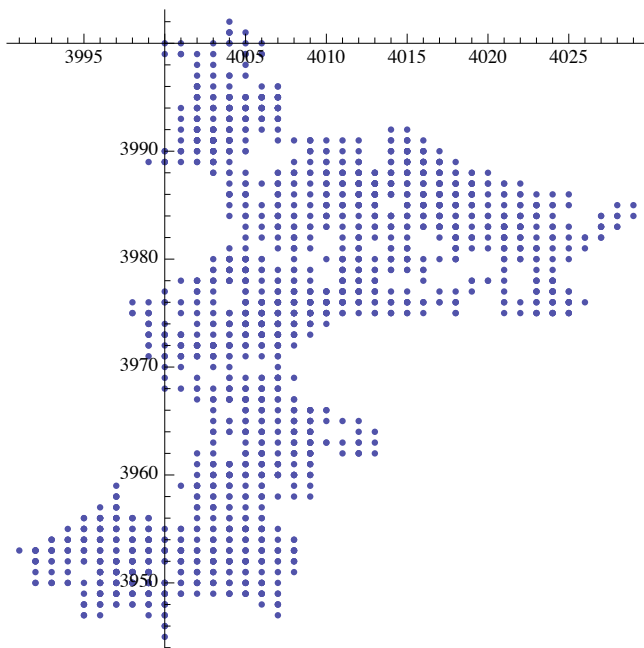
74



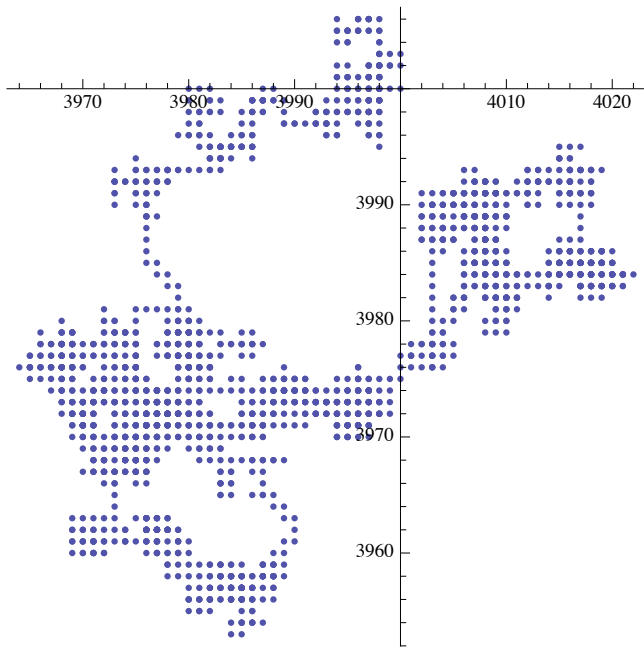
75



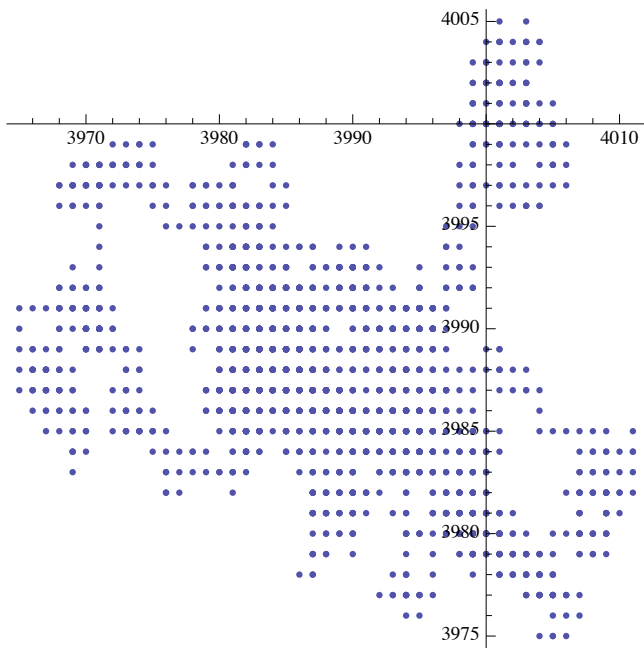
76



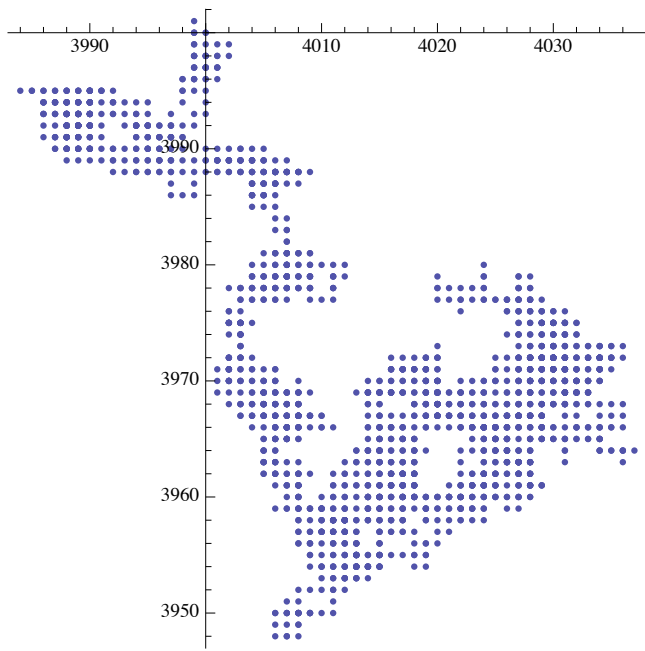
77



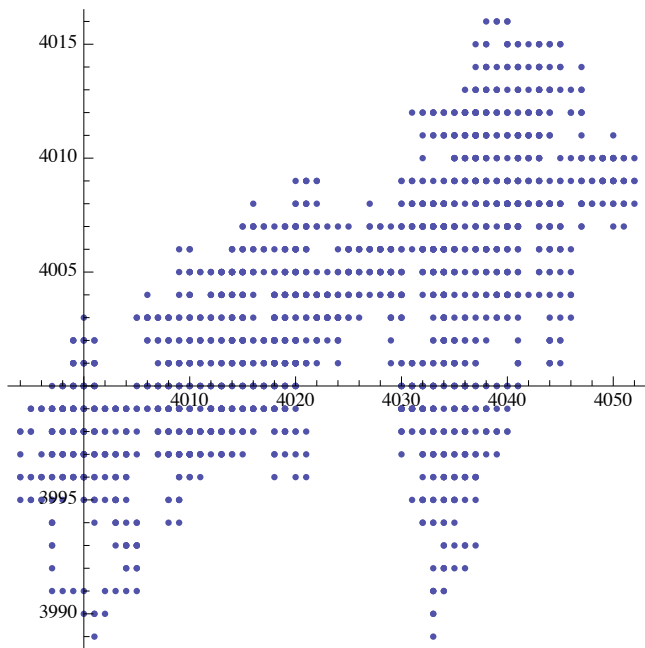
78



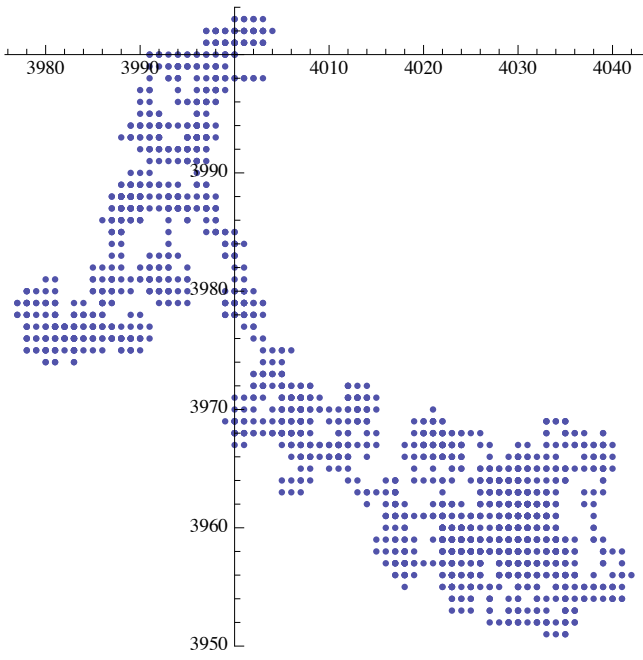
79



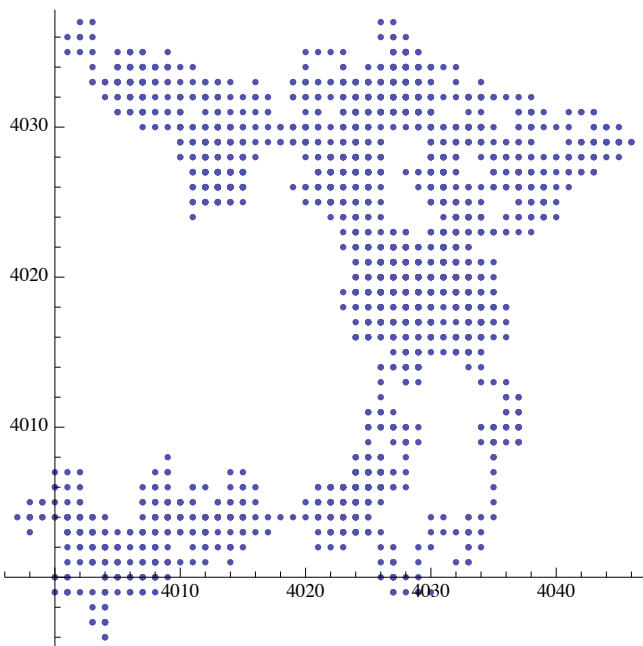
80



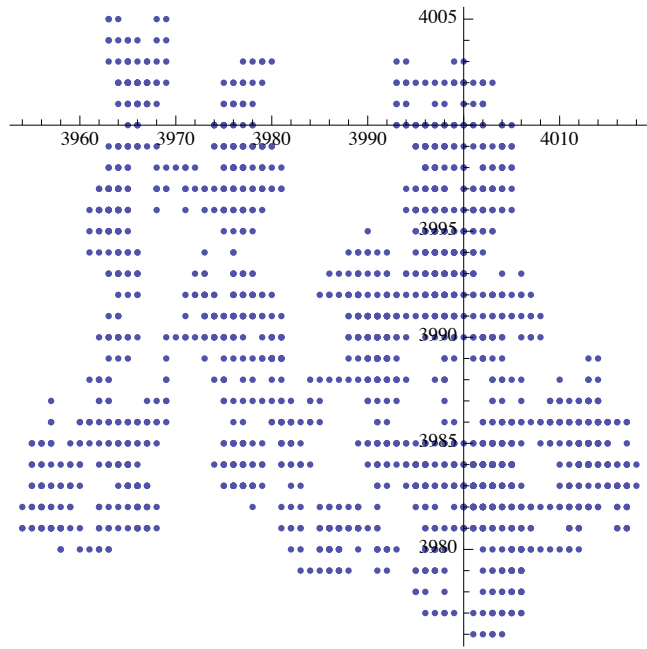
81



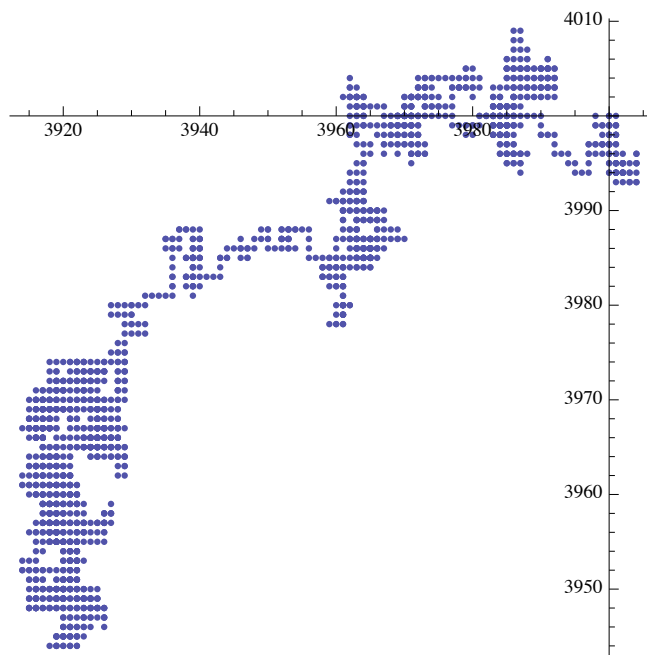
82



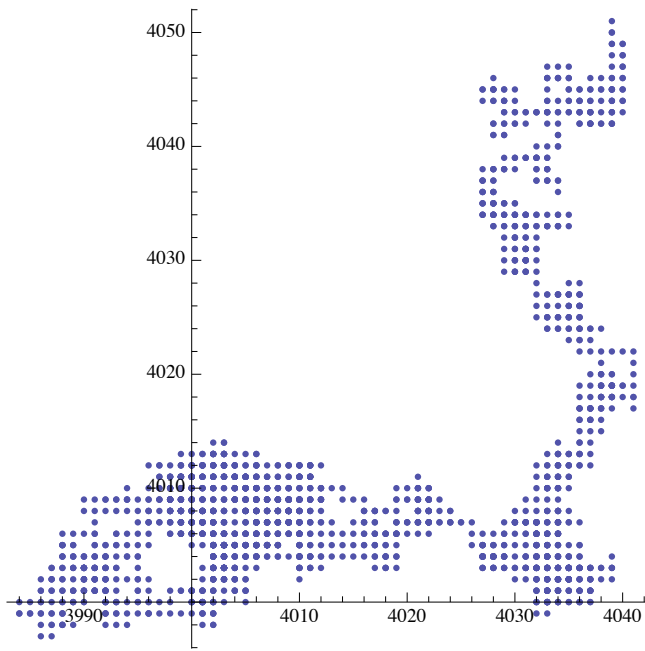
83



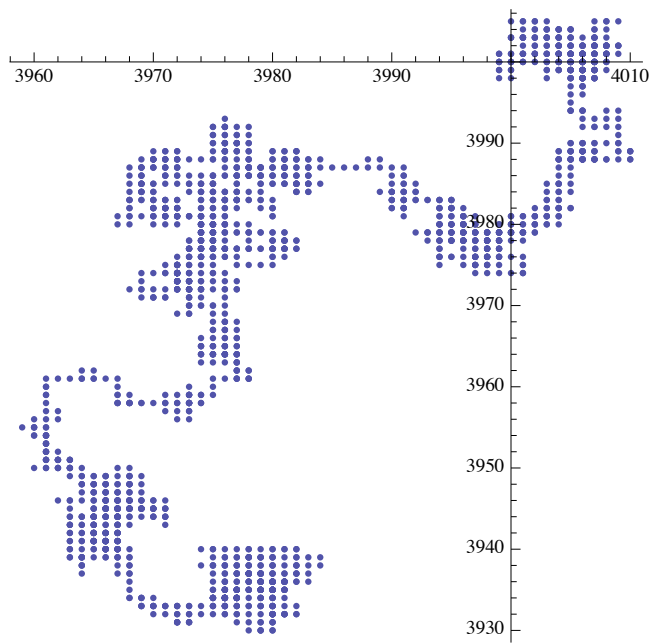
84



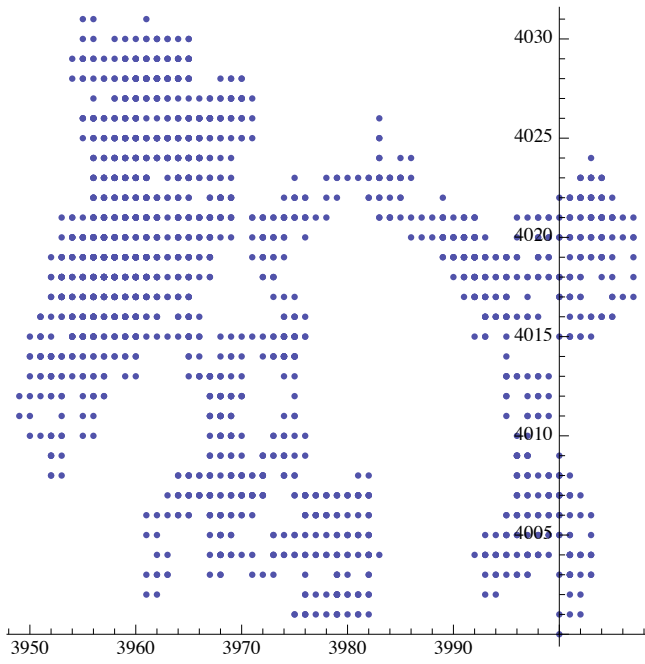
85



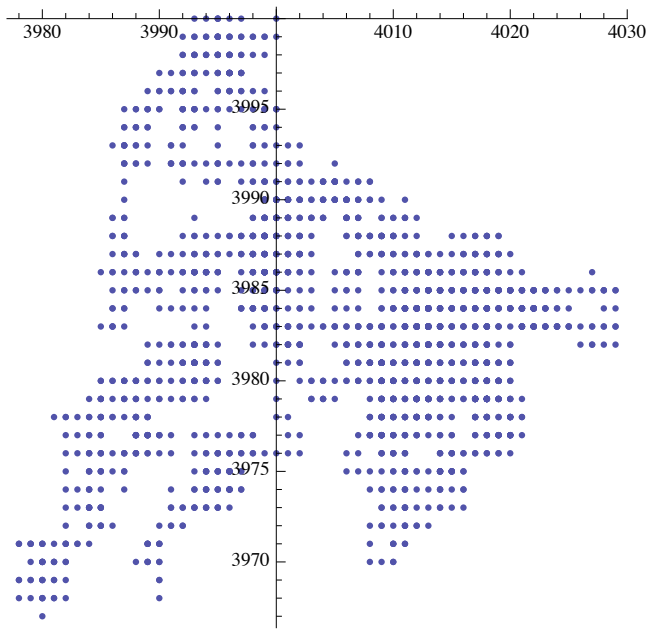
86



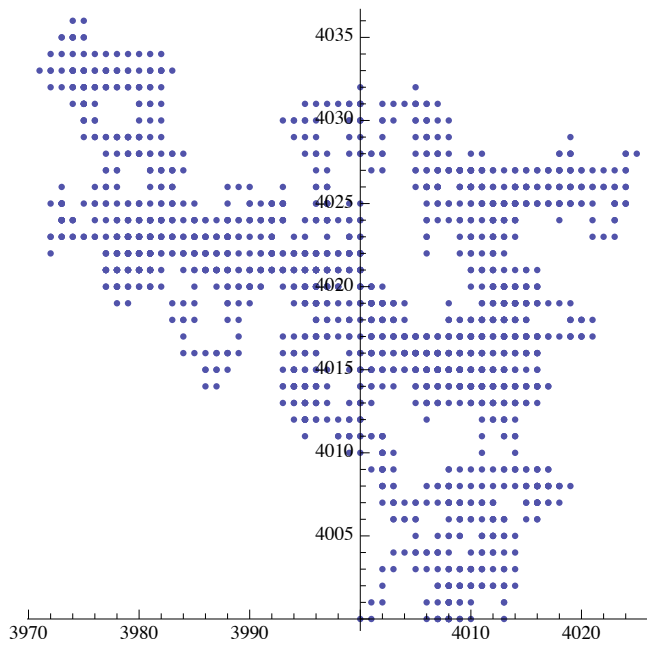
87



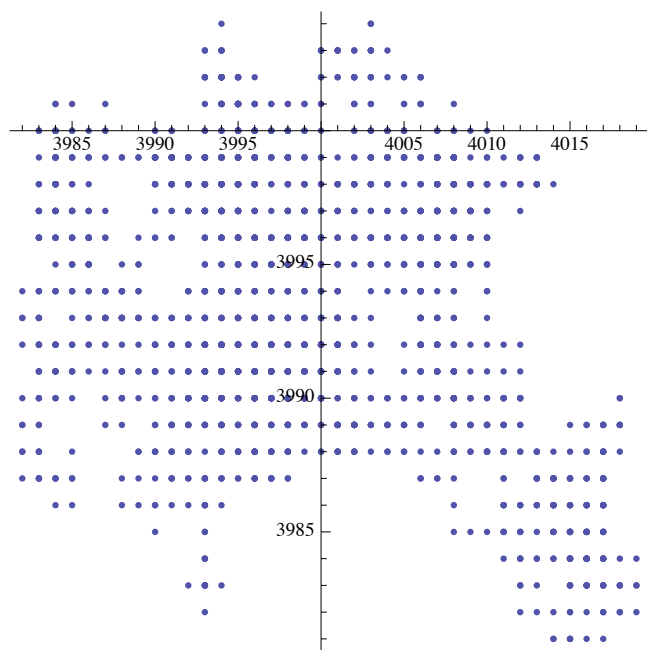
88



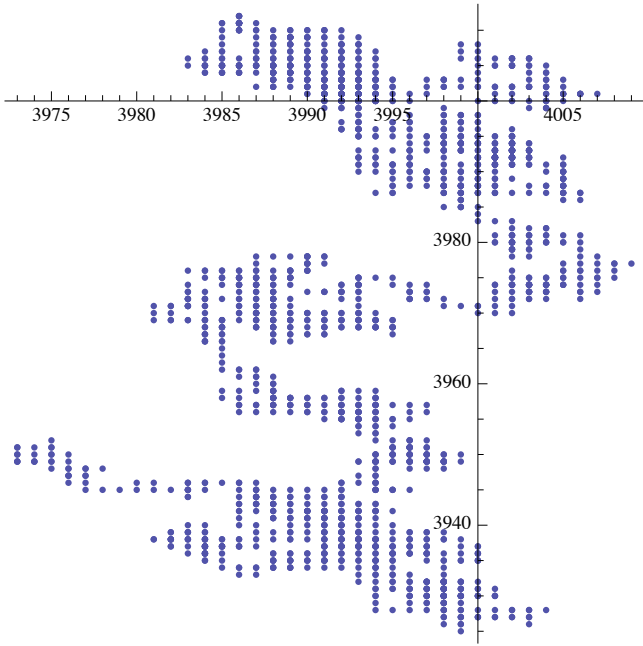
89



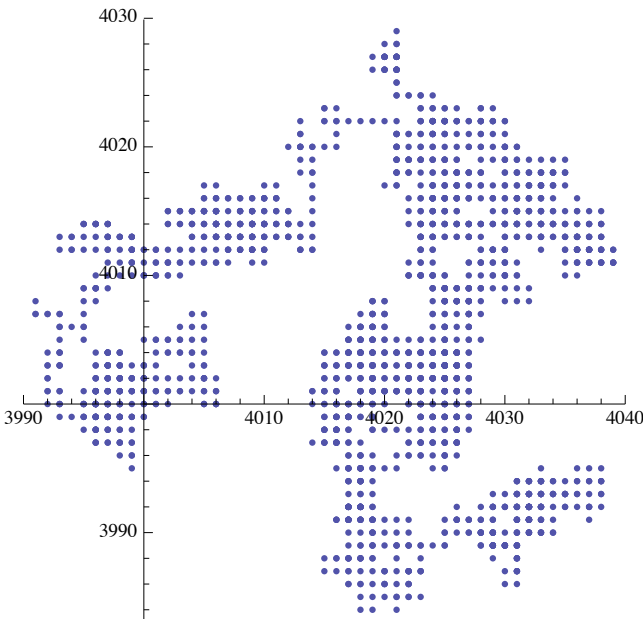
90



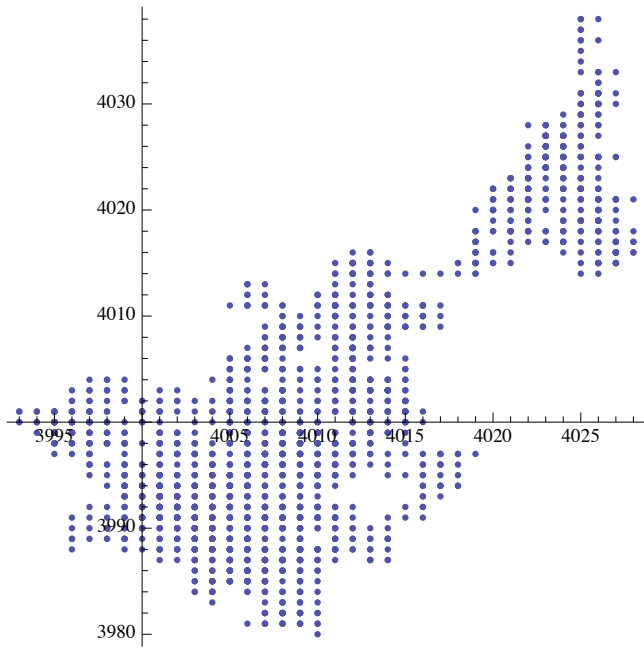
91



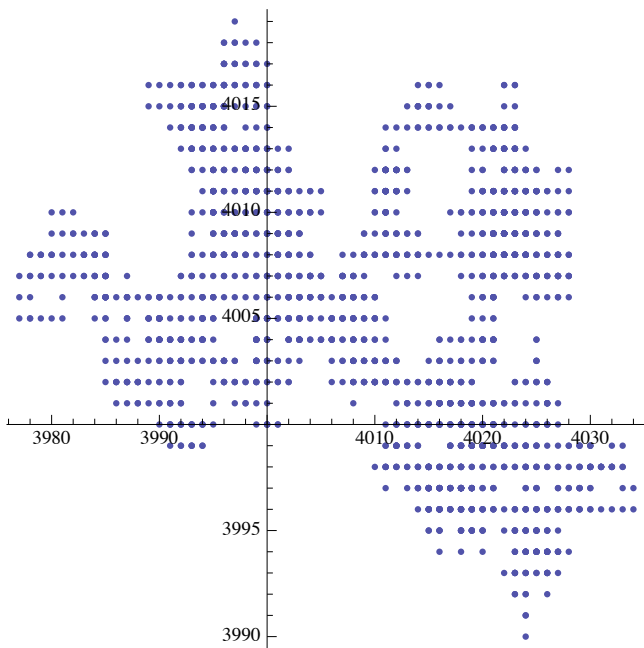
92



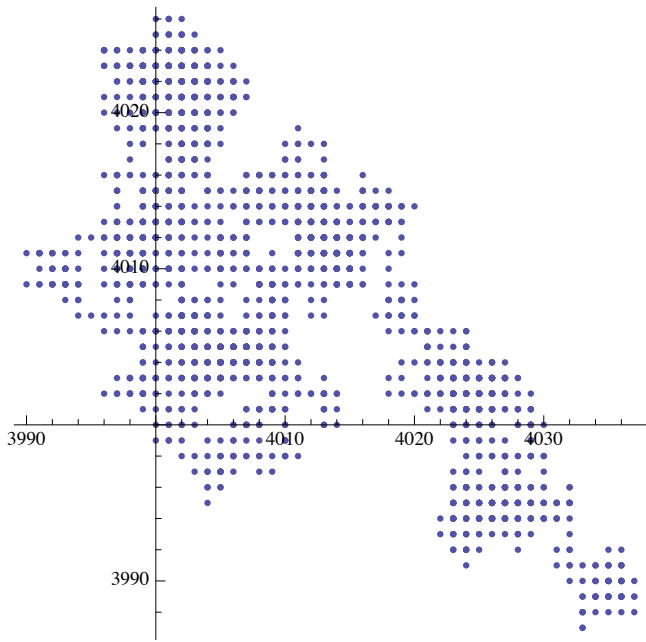
93



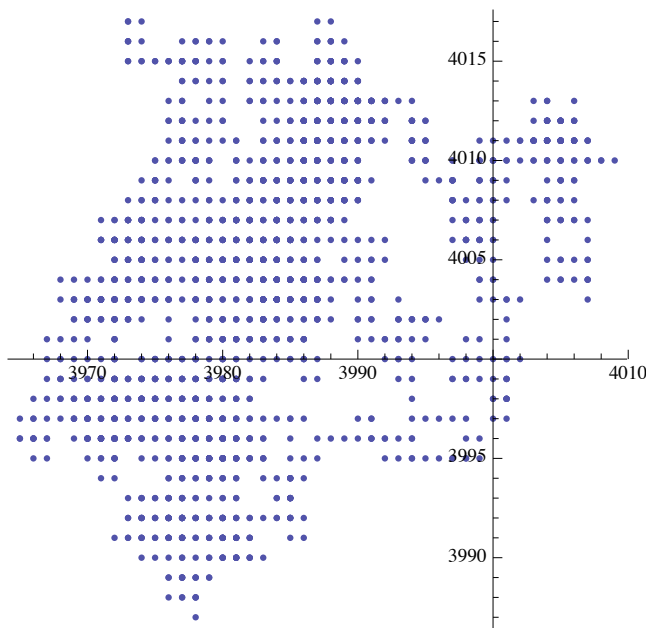
94



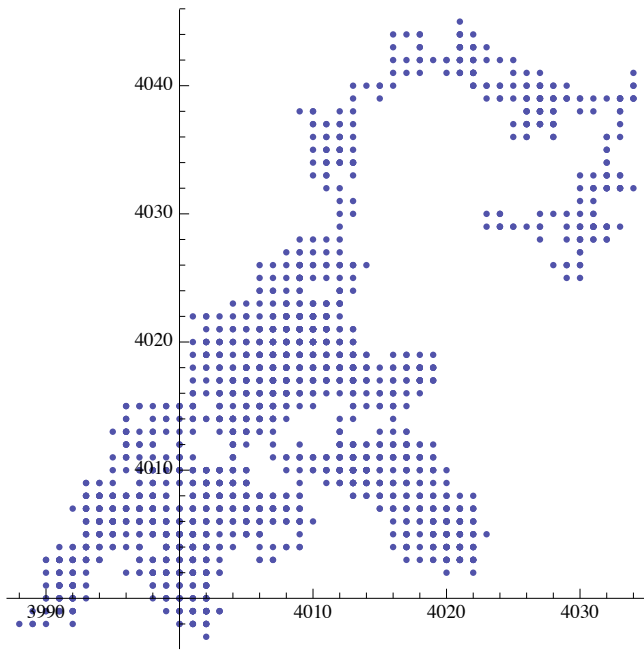
95



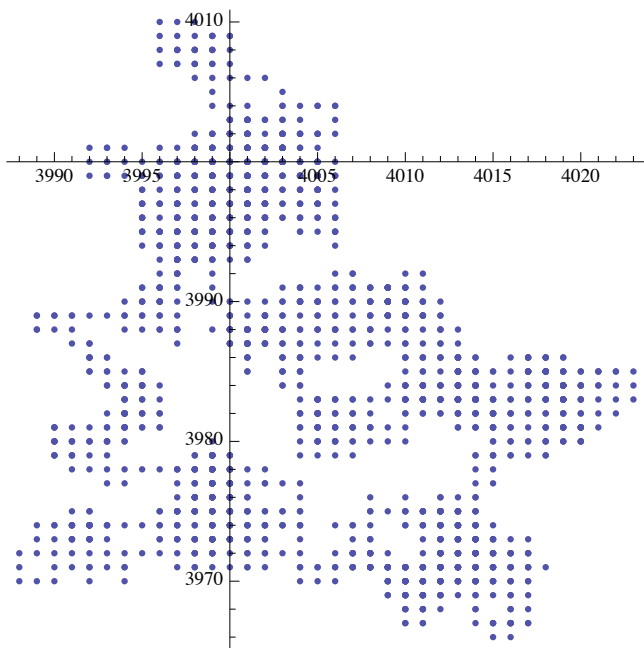
96



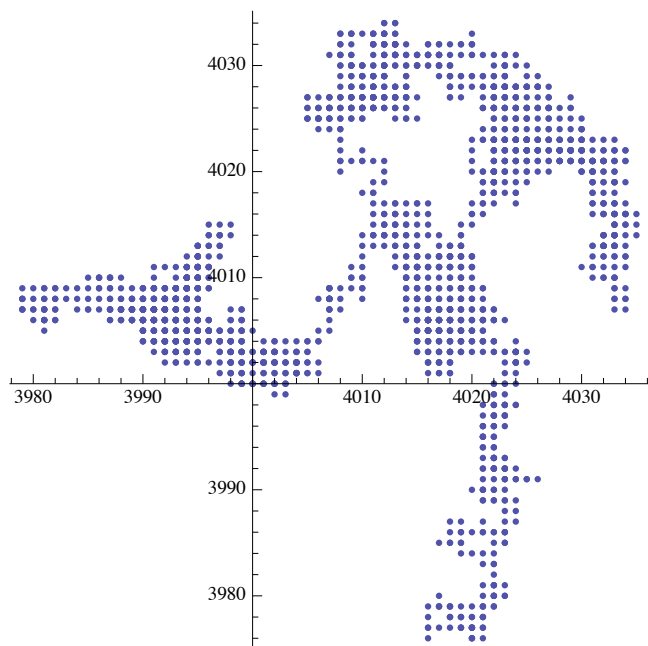
97



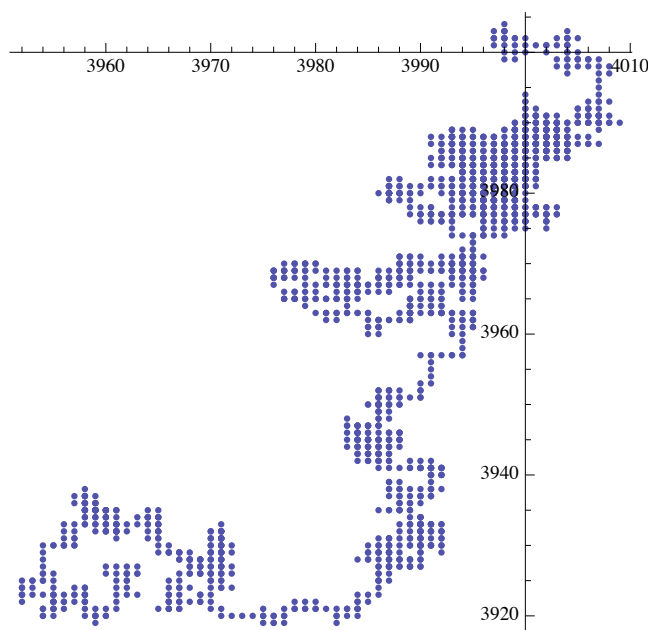
98



99



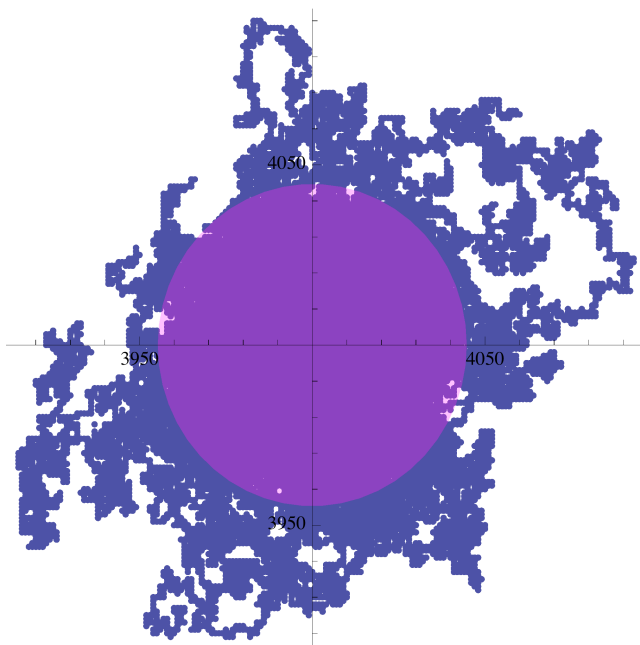
100



(*di seguito sono graficate, per ciascuno degli nexpe esperimenti, le posizioni (ldiffx) occupate dalla particella che diffonde a partire dalla sua posizione iniziale {ncorn/2, ncorn/2})

(*di seguito è graficato l'insieme delle posizioni occupate dalla particella negli nexp esperimenti (mldiffx); è anche graficato un cerchio di raggio $\sqrt{\text{ndiff}}$ *)

```
p = ListPlot[mldiffx, AxesOrigin -> { $\frac{\text{ncorn}}{2}$ ,  $\frac{\text{ncorn}}{2}$ },
  AspectRatio -> 1, PlotRange -> All];
Show[p, Graphics[{Opacity[0.3], Magenta,
  Disk[{ $\frac{\text{ncorn}}{2}$ ,  $\frac{\text{ncorn}}{2}$ },  $\sqrt{\text{ndiff}}$ ]}]]]
```



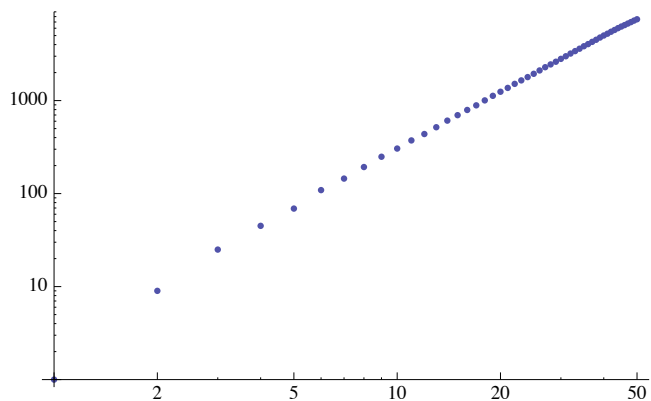
Dimensione frattale

(*qui è contato (fract) e graficato il numero dei siti occupati dalla particella all' interno di cerchi di raggio crescente da 0 a m centrati sulla posizione iniziale*)

```
fract = Table[Length[
  Select[mldiffx, 0 ≤ Norm[{ $\frac{\text{ncorn}}$ ,  $\frac{\text{ncorn}}$ } - #] < j &]], {j, 1, m}];
ray = Table[j, {j, 1, m}];
data = Transpose[{ray, fract}]
```

```
ListLogLogPlot[Transpose[{ray, fract}], PlotRange → All]
```

```
{1, 1}, {2, 9}, {3, 25}, {4, 45}, {5, 69}, {6, 109}, {7, 145}, {8, 193},
{9, 249}, {10, 305}, {11, 373}, {12, 437}, {13, 517}, {14, 609}, {15, 697},
{16, 793}, {17, 889}, {18, 1005}, {19, 1125}, {20, 1245}, {21, 1369}, {22, 1513},
{23, 1649}, {24, 1789}, {25, 1941}, {26, 2109}, {27, 2285}, {28, 2449}, {29, 2617},
{30, 2809}, {31, 2997}, {32, 3205}, {33, 3405}, {34, 3613}, {35, 3841}, {36, 4049},
{37, 4280}, {38, 4508}, {39, 4763}, {40, 5009}, {41, 5239}, {42, 5499}, {43, 5745},
{44, 6008}, {45, 6253}, {46, 6483}, {47, 6734}, {48, 6982}, {49, 7244}, {50, 7488}
```

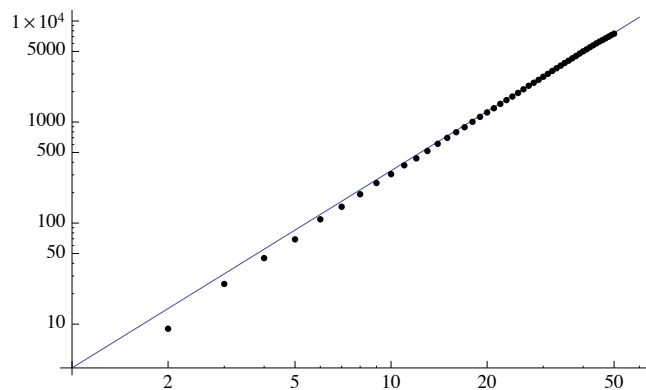


(*qui "fract" è confrontato con un andamento esponenziale*)

```

model =  $\beta x^\alpha$ ;
fittot = FindFit[data, model, { $\beta$ ,  $\alpha$ }, x]
LogLogPlot[Evaluate[model /. fittot],
  {x, 1, 60}, Epilog -> Map[Point, Log[data]]]
{ $\beta \rightarrow 3.68579$ ,  $\alpha \rightarrow 1.95177$ }

```



```

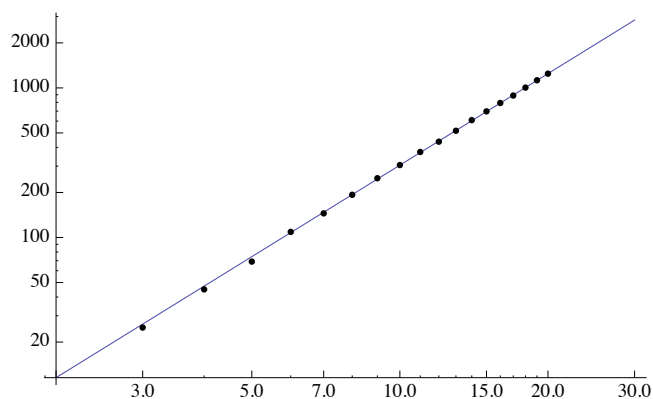
ridotto = {{1, 1}, {2, 9}, {3, 25}, {4, 45}, {5, 69}, {6, 109},
  {7, 145}, {8, 193}, {9, 249}, {10, 305}, {11, 373},
  {12, 437}, {13, 517}, {14, 609}, {15, 697}, {16, 793},
  {17, 889}, {18, 1005}, {19, 1125}, {20, 1245}};

```

```

fit = FindFit[ridotto, model, { $\beta$ ,  $\alpha$ }, x]
LogLogPlot[Evaluate[model /. fit],
  {x, 2, 30}, Epilog -> Map[Point, Log[ridotto]]]
{ $\beta \rightarrow 2.82566$ ,  $\alpha \rightarrow 2.03251$ }

```



Esempio 2: DLA (Diffusion Limited Aggregation)

La funzione **cardinale** muove un pto; $r = 0 \rightarrow N$; $r = 1 \rightarrow W$; $r = 2 \rightarrow S$; $r = 3 \rightarrow E$

```
cardinale[x_, y_] := (r = RandomInteger[{0, 3}];
```

```
  If[r == 0, x1 = x; y1 = y + 1,
```

```
    If[r == 1, x1 = x - 1; y1 = y,
```

```
      If[r == 2, x1 = x; y1 = y - 1,
```

```
        x1 = x + 1; y1 = y]]]);
```

La funzione **bvk** rende torico lo spazio.

```
bvk[x_, y_] :=
```

```
(If[x == 0 && y == 0,
```

```
  x1 = M; y1 = M,
```

```
  If[x == M + 1 && y == 0,
```

```
    x1 = 1; y1 = M,
```

```
    If[x == 0 && y == M + 1, x1 = M; y1 = 1,
```

```
      If[x == M + 1 && y == M + 1,
```

```
        x1 = 1; y1 = 1, If[x == 0, x1 = M; y1 = y,
```

```
          If[x == M + 1, x1 = 1; y1 = y,
```

```
            If[y == 0, x1 = x; y1 = M,
```

```
              If[y == M + 1, x1 = x; y1 = 1, x1 = x; y1 = y]]]]]]]);
```

La funzione **diffu** diffonde il pto fino a che non si lega al cluster.

```

diffu[x_] := For[i = 1;

  If[i == 1, {x1, y1} = x;
    nf = Nearest[cluster]; pv = nf[{x1, y1}][[1]],

  If[Abs[pv - {x1, y1}] == {0, 1} ∨
    Abs[pv - {x1, y1}] == {1, 0}, False, True],

  i++,

  cardinale[x1, y1]; bvk[x1, y1]; pv = nf[{x1, y1}][[1]]];

M = 500; cluster = {{ $\frac{M}{2}$ ,  $\frac{M}{2}$ }};
Do[

  pm = {Random[Integer, {1, M}], Random[Integer, {1, M}]};

  If[MemberQ[cluster, pm], Continue[],];

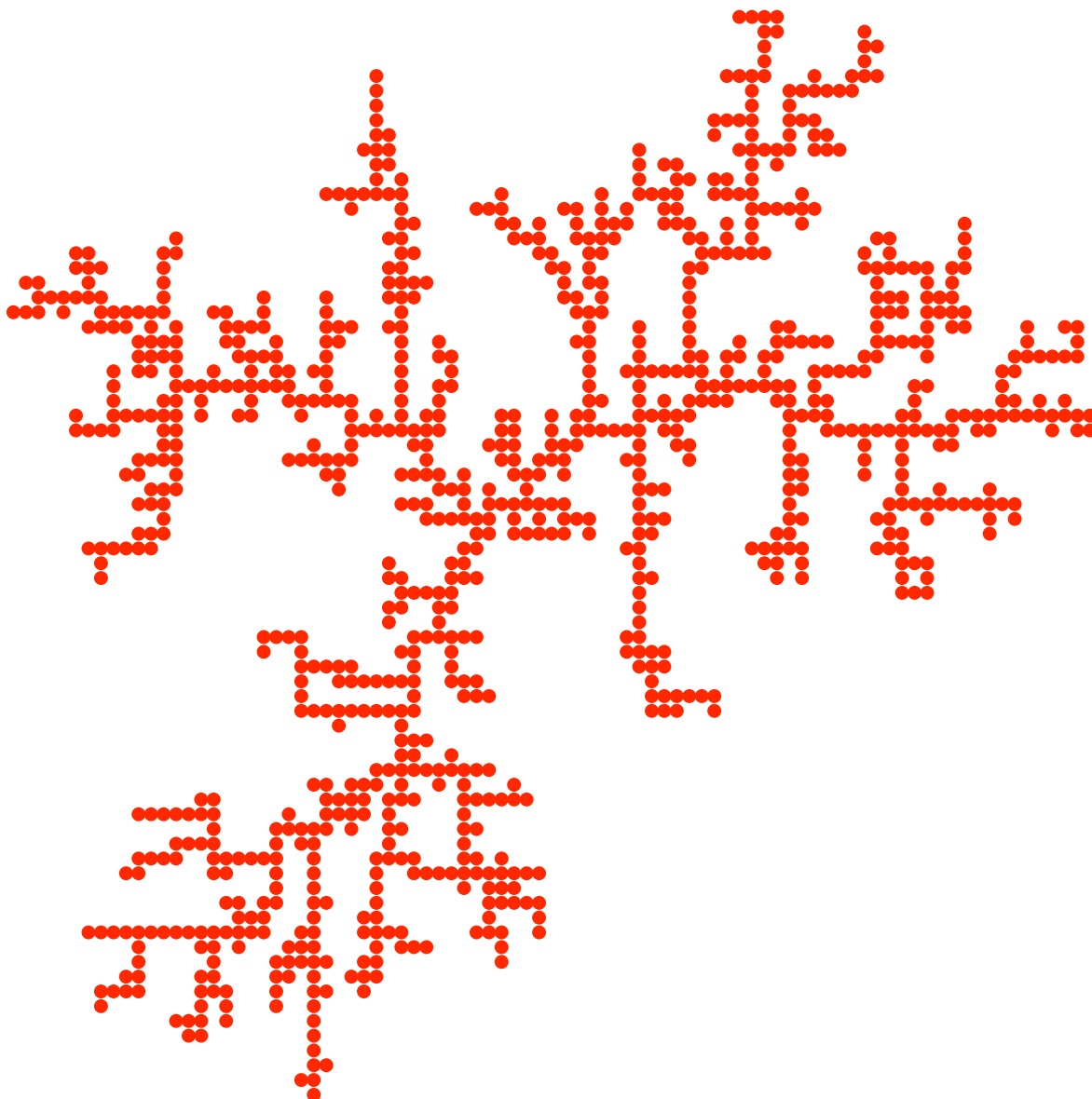
  diffu[pm];

  cluster = Append[cluster, {x1, y1}]

  , {i, 1, 1000}]

ListPlot[cluster, AspectRatio → 1, Axes → False,
  PlotStyle → {Red, PointSize[Large]}, PlotRange → All]

```



```
ray = Table[j, {j, 1, 30}];
```

```
fract = Table[Length[
  Select[cluster, 0 ≤ Norm[cluster[[1]] - #] < j &]], {j, 1, 30}]
```

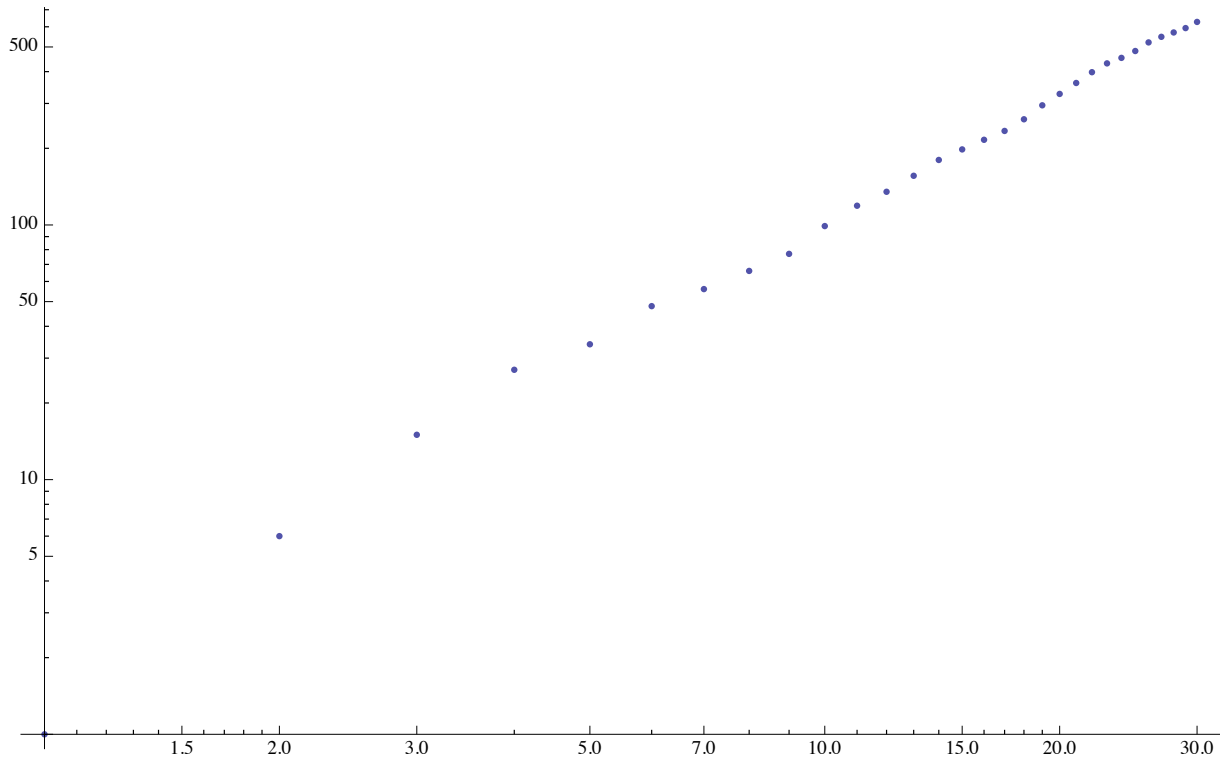
```
{1, 6, 15, 27, 34, 48, 56, 66, 77, 99, 119, 135, 156, 180, 198,
  216, 234, 260, 295, 327, 361, 398, 431, 453, 482, 521, 548, 570, 593, 627}
```

```

data = Transpose[{ray, fract}]
{{1, 1}, {2, 6}, {3, 15}, {4, 27}, {5, 34}, {6, 48}, {7, 56},
 {8, 66}, {9, 77}, {10, 99}, {11, 119}, {12, 135}, {13, 156},
 {14, 180}, {15, 198}, {16, 216}, {17, 234}, {18, 260}, {19, 295},
 {20, 327}, {21, 361}, {22, 398}, {23, 431}, {24, 453}, {25, 482},
 {26, 521}, {27, 548}, {28, 570}, {29, 593}, {30, 627}}

```

```
ListLogLogPlot[Transpose[{ray, fract}]]
```

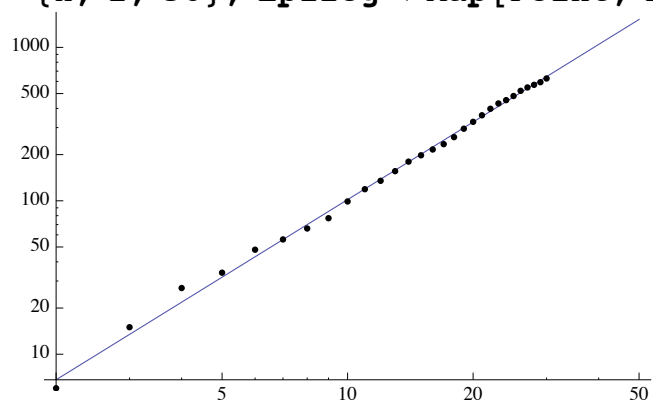


```
model =  $\beta x^\alpha$ ;
```

```
fit = FindFit[data, model, { $\beta$ ,  $\alpha$ }, x]
```

```
{ $\beta \rightarrow 2.12642$ ,  $\alpha \rightarrow 1.68003$ }
```

```
LogLogPlot[Evaluate[model /. fit],  
{x, 2, 50}, Epilog → Map[Point, Log[data]]]
```



◀ | ▶