Riflessioni sulla Teoria della Relatività Speciale

NOTE ESCUSIVAMENTE PER DISTRIBUZIONE INTERNA

Corso di formazione "IL TEMPO"

March 10, 2010

Massimo Bianchi

Dipartimento di Fisica, Università di Roma "Tor Vergata"
I.N.F.N. Sezione di Roma "Tor Vergata"
Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy

Piano della Lezione

- Introduzione
- Relatività Galileiana
- Relatività Speciale
- Formulazione Manifestamente Covariante
- Tempi Moderni

1 Introduzione

Poco più di cento anni fa, nel 1905, Einstein pubblicò la teoria della Relatività Speciale, che pose le basi delle moderene teorie relativistiche sfatando una volta per tutte il mito che il tempo fosse una grandezza universale. Nello stesso anno, Einstein pubblicò altri due lavori fondamentali. Uno sull'effetto fotoelettrico, che – suo malgrado – pose le basi della Meccanica Quantistica. L'altro sul moto Browniano. Per ricordare questo *annus mirabilis*, il 2005 è stato proclamato Anno Mondiale della Fisica. In quell'occasione la nostra Università ha promosso numerose iniziative per stimolare l'interesse del grande pubblico verso la Fisica ed ha conferito la Laurea *Honoris Causa* a tre scienziati di grande prestigio internazionale: Sergio Ferrara (CERN) per la Fisica Teorica, a Michele Parrinello (ETH) per la Fisica della Materia, a Joe Silk (Oxford) per l'Astrofisica.

Uno dei punti di vista da cui si può esaminare il sorgere e il modo di svilupparsi delle teorie fisiche è quello dell'esigenza di unità proprio della ricerca scientifica. Naturalmente anche la teoria della Relatività Speciale o Ristretta di Einstein può essere interpretata in quest'ottica. Infatti, anche se il suo risultato più evidente fu quello di risolvere la questione dei sistemi di riferimento rispetto ai quali la velocità della luce fosse costante, non si può sottovalutare che, insieme alla Meccanica Quantistica, abbia permesso la ri-unificazione della fisica della materia, ossia la Meccanica, basata su ipotesi corpuscolari, con la fisica dell'energia, ossia l'Elettro-magnetismo, basato sulla teoria ondulatoria.

La separazione cominciò a delinearsi quando Maxwell elaborò la teoria elettromagnetica, attribuendo una caratteristica di continuità all'energia, e si completò quando cadde definitivamente la teoria dell'etere, l'ipotetico riferimento rispetto al quale la velocità della luce assumeva il valore

$$c = 2.997925 \times 10^8 \ m/s \approx 300000 \ Km/s \tag{1}$$

La velocità della luce c, infatti, appare esplicitamente nelle equazioni di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \qquad , \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad , \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{j} \tag{3}$$

nelle quali $\vec{E}$ e $\vec{B}$ indicano il campo elettrico e magnetico, mentre ρ e $\vec{j}$ denotano la densità di carica e di corrente elettrica e soddisfano l'equazione di continuità

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

ossia la conservazione locale della carica elettrica. Similmente per la densità di energia

$$w = \frac{1}{2}(E^2 + B^2) \tag{5}$$

si trova
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \tag{6}$$
nella quale
$$\vec{S} = c\, \vec{E} \times \vec{B} \tag{7}$$
è il vettore di Poynting che rappresenta il flusso di energia e-m mentre il membro di sinistra rappresenta la potenza trasferita dal campo elettrico alle cariche. Il campo magnetico non compie lavoro in quanto la forza di Lorentz
$$\vec{F} = \frac{q}{c}\, \vec{u} \times \vec{B} \tag{8}$$
è sempre ortogonale alla velocità della particella. Introducendo il potenziale vettore $\vec{A}$ ed il potenziale scalare V per cui
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{9}$$
si può dedurre l'equazione delle onde e-m nel vuoto
$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0 \tag{10}$$
dalla quale si ricava
$$c = \lambda \nu \tag{11}$$
per onde piane monocromatiche, avendo indicato con λ la lunghezza d'onda e con ν la frequenza. La funzione ϕ rappresenta qualsiasi componente del campo e-m o dei potenziali. Questi ultimi sono determinati a meno di *trasformazioni di gauge*
$$\vec{A} \quad \rightarrow \quad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \quad , \quad V \quad \rightarrow \quad V' = V - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \tag{12}$$

Il principio di invarianza di gauge è stato poi elevato a principio costruttivo per tutte le teorie moderne delle interazioni fondamentali, dall'Elettrodinamica Quantistica (QED), alla teoria elettro-debole, che tramite Meccanismo di Higgs descrive i bosoni W e Z, alla Cromodinamica Quantistica (QCD), che descrive le interazioni nucleari forti fra gli adroni e fra quark e gluoni al loro interno. Infine, anche la Relatività Generale si basa sul principio di *covarianza generale*, ossia di invarianza per trasformazioni locali arbitarie, in un certo senso di gauge, delle coordinate.

Mentre la Meccanica Quantistica ha portato unificazione arrivando ad attribuire alla materia e all'energia le stesse caratteristiche di continuità e discontinuità, la Teoria della Relatività ha aperto una nuova strada tramite la relazione di scambio fra massa ed energia ed ha trovato il modo di rendere invarianti rispetto alle stesse trasformazioni sia le leggi della Meccanica sia quelle dell'Elettro-magnetismo. Si può aggiungere che sia la Meccanica Qauntistica sia la Teoria della Relatività hanno allargato il campo di applicazione della Fisica Classica a fenomeni di cui non si poteva dare una corretta interpretazione con le teorie allora esistenti. Si tratta di fenomeni in cui sono implicati scambi di energia per durate temporali tali da essere confrontabili con il quanto d'azione (costante di Planck)

$$\hbar = h/2\pi = 1.0545919 \times 10^{-27} erg \cdot s = 6.582183 \times 10^{-16} eV \cdot s \tag{13}$$

e dei fenomeni che avvengono a velocità prossime alla velocità della luce c.

2 Relatività Galileiana

La separazione fra Meccanica ed Elettro-magnetismo si manifestava principalmente nel diverso comportamento delle due rispetto alle trasformazioni galileiane. Le coordinate di due sistemi di riferimento inerziali S e S', che traslino l'uno rispetto all'altro lungo l'asse comune x con velocità v, sono collegate dalle trasformazioni

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{14}$$

Tali equazioni esprimono la legge di Relatività Galileiana secondo la quale non si riesce a rilevare il moto inerziale di un riferimento tramite osservazioni di fenomeni meccanici. Le tre leggi della Dinamica si possono enunciare come segue

- Definizione di Sistemi Inerziale: in un sistema di riferimento inerziale un corpo non soggetto all'azione di forze esterne permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme

- Legge di Newton: un corpo di massa m, soggetto a gorze esterne la cui risultante sia $\vec{F}$ subisce un'accelerazione $\vec{a}$ data da

  $$\vec{F} = m\vec{a} \tag{15}$$

  La massa *inerziale* misura quindi l'inerzia di un corpo a cambiare le condizioni di moto.

  Il Principio di Equivalenza fra massa *inerziale* e massa *gravitazionale* è una delle basi della Relatività Generale.

- Definizione dei Sistemi Isolati: in un sistema isolato la forza esercitata dalla particella i sulla particella j è uguale e contraria a quella esercitata dalla particella j sulla particella i

  $$\vec{F}_{i \to j} = -\vec{F}_{j \to i} \tag{16}$$

Contrariamente alle leggi della Meccanica, che risultavano invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo, le equazioni di Maxwell dell'elettro-dinamica richiedevano l'esistenza di un sistema di riferimento *privilegiato* nel quale la velocità della luce c fosse costante. In effetti, in base alla legge classica di composizione delle velocità

$$\vec{u'} = \vec{u} - \vec{v} \tag{17}$$

in qualsiasi altro sistema di riferimento c avrebbe dovuto essere composta con la velocità v di traslazione.

Lo stesso avviene in fenomeni relativistici quali la velocità apparente del vento per una barca a vela in regata, la direzione apparente della pioggia quando passeggiamo o corriamo con un ombrello, l'effetto Doppler per cui le frequenze osservate sono più acute o più basse quando la sorgente si avvicina a o si allontana dall'osservatore.

Dunque le leggi dell'Elettro-magnetismo non risultavano invarianti per trasformazioni galileiane e perciò gli effetti elettromagnetici dovevano risultare differenti per differenti osservatori inerziali.

Esistevano quindi tre possibilità:

- bisognava definire una volta per tutte, sperimentandone la validità, la teoria dell'etere e perciò rimanevano valide le trasformazioni di Galileo per la Meccanica, mentre nel campo dei fenomeni Elettro-magnetici si poteva parlare di un riferimento *privilegiato*;
- continuavano ad essere valide le trasformazioni galileaiane sia per la Meccanica sia per l'Elettromagnetismo, in tal caso le equazioni di Maxwell richiedevano una correzione poiché si sarebbe dovuta notare l'incoerenza fra teoria elettro-magnetica e risultati sperimentali;
- si poteva ipotizzare l'incoerenza delle leggi della Meccanica e, quindi, la necessità di correzioni che avrebbero dovuto essere evidenziate tramite l'incompatibilità fra teoria e risultati sperimentali. In tal caso sarebbe stato necessario formulare una nuova e più ampia legge della Relatività, quindi altre relazioni di trasformazione.

La prima possibilità venne esclusa dal risultato negativo, nel 1887, dell'esperimento di Michelson e Morley, che dimostrò l'impossibilità di rivelare il moto della Terra rispetto all'etere, facendo cadere del tutto la teoria dell'etere.

L'esperimento utilizza l'interferometro di Michelson, in cui un raggio luminoso e separato in due raggi da uno specchio semi-riflettente. Il raggio che prosegue lungo la direzione iniziale, parallela al moto della Terra con velocità $v \approx 30\ Km/s$, rispetto all'etere, dovrebbe impiegare più tempo a tornare indietro, una volta riflesso su uno specchio posto a distanza L, nei confronti del raggio riflesso a 90 gradi rispetto alla direzione iniziale, anch'esso riflesso su uno specchio posto a distanza L. Secondo la composizione classica delle velocità si avrebbe

$$t_1 = \frac{L}{c+v} \quad \text{e} \quad t_2 = \frac{L}{c-v} \tag{18}$$

per l'andata ed il ritorno dei raggi paralleli, mentre

$$2t_3 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \tag{19}$$

per i raggi perpendicolari. Pertanto dovrebbe risultare

$$t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} \neq \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 2t_3 \tag{20}$$

che comporterebbe uno sfasamento e quindi uno spostamento delle frange di interferenza rispetto all'apparato in quiete o all'apparato ruotato. Essendo comunque $u^2/c^2 \approx 10^{-8}$, l'esperimento richiede un numero elevato di riflessioni o posizionamenti differenti rispetto all'etere per poterne escludere l'esistenza.

Tale fallimento eliminò anche l'ultimo pericolante tratto di unione fra Meccanica ed Elettro-magnetismo, rappresentato dal *meccanicismo*, ossia la tendenza ad ipotizzare l'esistenza di una qualche forma di materia ovunque si manifestasse un fenomeno fisico. Bisogna mettere in rilievo che la possibilità di ritrovare unità al di fuori del meccanicismo era già stata suggerita dallo stesso Einstein nel 1900, anno nel quale elaborò la teoria dei campi, che attraverso l'ipotesi di *spazio perturbabile* permise di spiegare il modo di agire delle cosiddette *forze a distanza*, le quali erano diventate inspiegabili in seguito alla caduta della teoria dell'etere.

La seconda possibilità fu abbandonata per l'impossibilità di evidenziare una qualsiasi discrepanza fra legge dell'Elettro-magnetismo e dati sperimentali.

Rimaneva quindi valida solo la terza alternativa, poiché potevano essere effettivamente messe in evidenza alcune lacune delle leggi della Meccanica riguardo fenomeni coinvoilgenti velocità prossime a c.

3 Relatività Speciale o Ristretta

La correzione delle leggi della Meccanica si basa su due argomenti, consistenti con i risultati sperimentali, sui quali Einstein elaborò la Teoria della Relatività Speciale che avrebbe sostituito la relatività classica, preservando l'unità della Fisica. Tali argomenti si possono enunciare nella forma

- Le leggi della Fisica sono le stesse in qualunque sistema di riferimento inerziale
- La velocità delle onde elettro-magnetiche nel vuoto è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziale, qualunque sia la velocità relativa dell'osservatore e della sorgente

Operando su questa base si possono formulare le nuove leggi di trasformazione fra due riferimenti inerziali S e S' che traslino con velocità relativa v lungo l'asse comune x.

Tali trasformazioni, detti *boosts* furono proposte da Lorentz e assumono la forma

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma(x - \beta ct)$$

$$
\begin{aligned}
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv \frac{1}{c}\gamma(ct - \beta x)
\end{aligned}
\tag{21}
$$

con $\beta = v/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Come si può verificare, c è una velocità limite, poiché per v che tende a c, β tende a 1 e γ tende ad infinito. Nel limite opposto, ossia nel caso in cui la velocità v sia molto minore di c, le trasformazioni di Lorentz hanno il pregio di ridursi a quelle di Galileo. E' questa la ragione per la quale la relatività galileiana si è rivelata corretta nella descrizione dei fenomeni fisici a scala *umana*. Contrariamente alle trasformazioni di Galileo, le trasformazioni di Lorentz prevedono che lo spazio ed il tempo non siano più indipendenti l'uno dall'altro, ma che costituiscano un *crono-topo* quadri-dimensionale le cui proprietà sono state esaurientemente analizzate da Minkowski.

Cercando di interpretare le trasformazioni di Lorentz, si può osservare che dalla quarta equazione discende che non esista un tempo unico assoluto per ogni riferimento inerziale, ma che due fenomeni che risultino simultanei per un osservatore a riposo in S non siano tali per un osservatore a riposo in S'.

Come esempio di relatività della simultaneità si possono considerare due lampi che avvengano simultaneamente ma in due punti diversi A e B per un osservatore a riposo su una banchina ferroviaria. Gli stessi lampi non vengono percepiti come simultanei per un viaggiatore seduto in un treno che si muove a velocità costante rispetto alla banchina, diciamo allontandaosi da A, o meglio A' nel suo riferimento, ed avvicinandosi a B, o meglio B'.

Per quanto riguarda la misura di intervalli di tempo, si può quindi concludere che non si può stabilire un valore assoluto ma si deve parlare di *tempo relativo* al sistema di riferimento ovvero all'osservatore considerato. La relazione fra le misure di intervalli di tempo effettuate da due osservatori in moto relativo fra di loro con velocità v, si traduce nell'equazione

$$
\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma \Delta t' \tag{22}
$$

che esprime quella che viene indicata come *dilatazione del tempo*, nel senso che per l'osservatore in S' il tempo scorre più lentamente di quanto succeda per l'osservatore in S. Bisogna notare che l'intervallo di tempo $\Delta t'$ è proprio in quanto misurato da uno stesso orologio, mentre non è tale l'intervallo Δt poichè misurato da orologi diversi posti a distanza fra di loro.

Dimostrazione: usando le trasformazioni di Lorentz ed imponendo $x' = 0$ si ottiene, con lo scorrere del tempo, $x = -v\Delta t$, che sostituita nella legge di trasformazione del tempo fornisce la relazione desiderata. *QED*

Una conseguenza sperimentalmente verificata della dilatazione del tempo riguarda le particelle instabili, che hanno una *vita media* più lunga in un sistema di riferimento in cui decadono in moto piuttosto che in quello di quiete. La dilatazione porta anche al *paradosso dei gemelli*. Se un gemello rimane sulla Terra mentre l'altro parte per una lunga missione spaziale in un'astro-nave che viaggi a velocità molto elevate, al ritorno il tempo trascorso per i due gemelli risulterà notevolmente differente. Il paradosso consiste nel fatto che apparentemente se si può dire che il gemello astronauta abbia viaggiato rispetto al gemello a Terra cosi' pure si potrebbe dire il contrario. Come si risolve il paradosso? Semplicemente osservando che per tornare indietro il gemello astronauta ha sicuramente dovuto subire qualche accelerazione. Quindi in effetti il sistema di riferimento in cui si è trovato non è potuto sempre essere inerziale, contrariamente a quello del gemello a Terra. La situazione non è quindi veramente simmetrica. Insomma come quasi sempre non c'è alcun paradosso.

In modo analogo, possiamo dedurre il confronto fra misure di lunghezza effettuate da osservatori in moto relativo fra di loro con velocità v. Supponendo che sia ℓ la misura di un regolo campione a riposo in S ed ℓ' la misura effettuata da un osservatore posto in S', che si muove parallelamente al regolo, la relazione cui si perviene è

$$\ell' = \ell\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \equiv \frac{\ell}{\gamma} \tag{23}$$

Essa esprime la cosiddetta *contrazione di Lorentz*, secondo la quale la lunghezza di un oggetto risulta contratta per un osservatore in moto rispetto ad esso. Nel caso in esame, ℓ è la lunghezza a riposo del regolo. Questo effetto relativistico, significativo per moti con velocità prossime a c, priva di significato il concetto classico di corpo rigido.

Dimostrazione: indicando con $\ell = \Delta x$ la misura effettuata nel riferimento di quiete, si ottiene $\ell' = \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$. L'intervallo di tempo Δt è determinato imponendo $\Delta t' = 0$ e quindi $\Delta t = v\Delta x/c^2$. Sostituendo si ottiene la relazione desiderata. *QED*

A partire dalle trasformazioni di Lorentz si può derivare il teorema relativistico di composizione delle velocità, che esprime la dipendenza della velocità $\vec{u}'$ nel riferimento S' dalla velocità $\vec{u}$ nel riferimento S e dalla velocità $\vec{v}$ del riferimento S' rispetto al riferimento S. In forma vettoriale, il teorema si traduce nell'equazione

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} - \vec{v}\gamma\left[1 - \frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right]}{\gamma\left[1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right]} \tag{24}$$

Dimostrazione: scegliendo un *boost* lungo l'asse x, le trasformazioni per i differenziali delle coordinate spaziali sono

$$dx' = \gamma(dx - \beta ct) \quad , \quad dy' = dy \quad , \quad dz' = dz \tag{25}$$

Dividendo poi per $cdt' = \gamma(cdt - \beta x)$ si ottiene

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad , \quad u'_y = \frac{1}{\gamma}\frac{u_y}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad , \quad u'_z = \frac{1}{\gamma}\frac{u_z}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \tag{26}$$

Combinando le tre componenti ed osservando che $u_x v = \vec{u} \cdot \vec{v}$ e che

$$(\gamma - 1)u_x = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} v \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2} \tag{27}$$

si ottiene la formula desiderata. *QED*

E' facile controllare che la velocità della luce si comporti come velocità limite e rimane costante in tutti i sistemi di riferimento inerziali, analogamente al comportamento di una velocità infinita nella legge classica di composizione delle velocità. Si dimostra in tal modo impossibile l'emissione e la trasmissione di un qualsisasi segnale che si propaghi con velocità superiore a quella della luce nel vuoto.

In mezzi diversi dal vuoto, le onde elettro-magnetiche si possono tuttavia propagare con velocità inferiore a quella di altre particelle. Indicando con $n \geq 1$ l'indice di rifrazione del mezzo, la velocità delle onde e-m è data da $v_{e-m} = c/n < c$. Una particella che attraversi il mezzo con velocità $v_{e-m} < u < c$ provoca un'onda e-m d'urto, detta *radiazione Čerenkov*, del tutto analoga a quella di un corpo che si muova nell'aria con velocità superiore a quella del suono $v_s \approx 340\, m/s$.

Quando il moto relativo fra i due sistemi di riferimento avviene a velocità molto minore di c, $\gamma \approx 1$ la composizione relativistica delle velocità si riduce a quella classica. Esaminando le trasformazioni per le accelerazioni, si osserva che, contrariamente alla relatività galileiana, per la quale l'accelerazione è la stessa in qualsiasi sistema di riferimento inerziale, per la Relatività Speciale l'accelerazione dipende dal sistema di riferimento nel quale viene misurata. Dato poi che l'accelerazione entra in maniera determinante nell'espressione classica delle leggi della Dinamica

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{o meglio} \quad \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \tag{28}$$

nasce ovviamente la necessità che le nuove leggi della Dinamica siano, come le equazioni di Maxwell, invarianti per trasformazioni di Lorentz e che assumano la forma classica nel limite non relativistico, ovvero quando le vleocità in gioco sono molto minori di c. La conseguenza di tutto ciò è che si deve poter definire la forza in modo tale che non possa accelerare indefinitamente un particella, cosa che invece è in principio permessa nel limite classico, poichè in tal caso non esiste una velocità limite. Quindi, dato che una forza non può provocare variazione di velocità tali da far mai superare la velocità della luce, se essa continua ad agire deve avere effetto sulla massa. Pertanto si deve supporre una dipendenza della massa m dalla velocità $\vec{u}$ della particella che in effetti risulta essere

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \equiv m_0\gamma \tag{29}$$

in cui m_0 rappresenta la cosiddetta *massa a riposo*, che è invariante per trasformazioni di Lorentz.

La conseguente definizione relativistica della quantità di moto assume la forma

$$\vec{p} = m\vec{u} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m_0\vec{u}\gamma \tag{30}$$

Si può quindi generalizzare la seconda legge della Dinamica tramite la seguente definizione di forza

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{31}$$

dalla quale si può ricavare la conservazione della quantità di moto in assenza di forze esterne

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{cost} \tag{32}$$

E' bene ricordare che le definizioni relativistiche delle grandezze dinamiche sono un'estensione di quelle classiche, alle quali si riducono nel caso in cui le velocità in gioco siano molto minori di c. Per il momento angolare il discorso è tuttavia più sottile.

Bisogna ora osservare l'influenza che l'ipotesi di spazio perturbabile della teoria dei campi abbia avuto sulla Relatività Speciale. Infatti, avendo lo stesso concetto di *campo* superato la nozione di *forza a distanza*, non si poteva più ammettere l'interazione istantanea di un corpo con un altro lontano, ma si doveva supporre che fosse il *campo* generato dal primo corpo ad agire sul secondo come una *forza di contatto*. Non sorprende, quindi, di dover arrivare alla stessa conclusione nel riformulare la terza legge della Dinamica alla luce della Relatività Speciale, proprio per il fatto che non avrebbe più senso uguagliare *azione* e *reazione* a distanza se non è possibile stabilire la simultaneità di eventi distanti.

Le leggi della Dinamica, opportunamente corrette, si affiancano dunque alle già valide leggi dell'Elettro-magnetismo, dando nuovamente un aspetto unitario alla fisica. In particolare la dinamica di particelle cariche in presenza di campi elettrici e magnetici è governata dalla legge di forza

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{u} \times \vec{B}) \tag{33}$$

A loro volta le cariche retro-agiscono, attraverso le densità di carica e corrente, come sorgenti del campo elettro-magnetico nelle equazioni di Maxwell.

Fondamentale poi, per gli sviluppi successivi, è la trattazione relativistica dell'energia. Partendo dalla considerazione che, a causa della dipendenza della massa di una particella dalla sua velocità $\vec{u}$, è necessario un lavoro infinito per accelerare una particella fino alla velocità della luce, si giunge a dare una nuova definizione dell'energia cinetica T espressa da

$$T = mc^2 - m_0c^2 \tag{34}$$

la quale riproduce la formula classica

$$T = \frac{1}{2}mu^2 \tag{35}$$

nel limite non relativistico $u << c$, come si può verificare sviluppando in serie nella variabile u^2/c^2 la radice che appare nella definizione di γ.

Usando la formula di Taylor

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)x^2 + \ldots \tag{36}$$

si ottiene

$$mc^2 - m_0c^2 \approx m_0c^2\left[1 + \frac{1}{2}(u/c)^2 + \frac{3}{8}(u/c)^4 + \ldots - 1\right] \approx \frac{1}{2}m_0u^2 \tag{37}$$

QED

Al contrario, nel limite in cui u tenda a c, l'energia cinetica diventa infinita, poiché è necessario un lavoro unfinito per accelerare una particella fino alla velocità della luce.

Riprendendo la relazione che esprime l'energia cinetica e ponendola nella forma

$$mc^2 = m_0c^2 + T \tag{38}$$

si può osservare che il secondo membro contiene sia l'energia associata al moto, l'energia cinetica, sia quella connessa esclusivamente alla massa a riposo, detta appunto *energia a riposo*, e quindi rappresenta, in definitiva, per una particella libera, l'energia totale. Dunque dall'uguaglianza dei due membri si ricava la ben nota relazione

$$E = mc^2 \tag{39}$$

dalla quale si deve concludere che, essendo c una costante universale, grandezze come massa ed energia siano fisicamente equivalenti. In altre parole, si può da un lato attribuire alla materia un contenuto intrinseco di energia e dall'altro lato assegnare all'energia proprietà corpuscolari, che si riveleranno ancor più esplicite in seguito all'introduzione della teoria dei quanti.

Dall'espressione dell'energia, prendendo il quadrato e sostituendo al posto della velocità la quantità di moto, discende la relazione

$$E^2 - (pc)^2 = (m_0c^2)^2 \quad \Rightarrow \quad E = \pm\sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2} \tag{40}$$

la quale portò a concludere la possibilità che esistessero particelle relativistiche con energia negativa. L'equazione d'onda relativistica di Klein-Gordon, essendo del secondo ordine nelle derivate, sembra non poter escludere questa eventualità. Il tentativo di evitare un tale paradosso ha portato Dirac a formula un'equazione relativistica del primo ordine ma a più componenti per particelle con spin 1/2 e quindi a descrivere l'assenza di particelle con energia negativa come la presenza di anti-particelle con energia positiva.

L'invarianza della combinazione $E^2 - (pc)^2$ suggerisce la possibiltà che $\vec{p}$ ed E, o meglio E/c, trasformino fra di loro come $\vec{x}$ e ct, per trasformazioni di Lorentz.

Per concludere questa parte, si deve sottolineare che uno dei meriti di Einstein è stato quello di considerare grandezze come il tempo, la lunghezza e la massa non più come assolute ma come relative all'osservatore, poichè solo attraverso questa interpretazione è stato possibile uscire dall'*inpasse* in cui si trovava la Fisica all'inizio del '900 e gettare le basi per lo sviluppo della Fisica Moderna.

4 Formulazione Manifestamente covariante

Come per descrivere i fenomeni classici nello spazio tri-dimensionale è conveniente introdurre i vettori o meglio riconoscere quali grandezze fisiche siano vettoriali, quali scalari e quali *tensoriali*, cosi' per descrivere i fenomeni relativistici è assai conveniente introdurre il concetto di *quadri-vettore* ed eventualmente quello di *tensore* del Gruppo di Lorentz.

Le trasformazioni di Lorentz, i cosiddetti *boosts*, combinate con le rotazioni spaziali formano appunto un gruppo, nel senso che combinando due trasformazioni si ottiene ancora una trasformazione dello stesso tipo. Le regole di composizione si possono determinare dopo aver individuato i generatori infinitesimi, che generalizzano le componenti del momento angolare, e risultano essere quelle di due copie di $SU(2) \sim SO(3)$, il gruppo non commutativo delle rotazioni nello spazio. Le rappresentazioni del gruppo di Lorentz sono caratterizzate quindi da due tipi di spin: $\vec{S}_L$ e $\vec{S}_R$. L'usuale spin nelle 3 dimensioni spaziali è dato da $\vec{S} = \vec{S}_L + \vec{S}_R$. Particelle a massa nulla sono invece caratterizzate dall'elicità $h = \vec{p} \cdot \vec{S}/|\vec{p}|$ che è un'invariante relativistica. L'analogia fra rotazioni e *boosts* è molto stretta e può essere resa ancora più evidente introducendo una variabile temporale *immaginaria* $x_4 = ict$.

La possibilità che spazio e tempo si mescolino in seguito a trasformazioni di Lorentz e la costanza di c suggeriscono l'introduzione di una variabile temporale *ri-scalata*

$$x^0 = ct \tag{41}$$

che abbia le stesse dimensioni (lunghezza) delle tre coordinate spaziali. Insieme si possono combinare in un quadri-vettore

$$x^\mu = (ct, x, y, z) \quad \text{con} \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{42}$$

Le trasformazioni di Lorentz sono definite dalla proprietà di lasciare invariante la velocità della luce ossia la propagazione di un fronte d'onda elettro-magnetico. Se nel riferimento S tale fronte è descritto da

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{43}$$

ossia da

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0 \tag{44}$$

lo stesso deve avvenire in qualsiasi altro sistema di riferimento inerziale S'. Definendo quindi l'*elemento di intervallo* tramite

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{45}$$

in cui si è adottata la convenzione di Einstein di intendere sommati gli indici ripetuti in alto e in basso, dobbiamo concludere che $\eta_{\mu\nu}$, detta metrica di Minkowski, è una matrice diagonale e quindi simmetrica, i cui autovalori sono (+1,-1,-1,-1).

Il concetto di matrice non è assolutamente familiare agli studenti di Liceo, ma è difficile immaginare altro modo per spiegare la cosa. Si può forse dire che le matrici sono delle tabelle con un numero di righe uguale al numero di colonne e che si possono sommare e moltiplicare.

Mentre la somma è abbastanza scontata in quanto è la somma di elementi corrispondenti nei due addendi, la moltiplicazione è meno intuitiva ma comunque algoritmica ed avviene *righe per colonne*. Le conseguenza più interessante è che tale moltiplicazione non gode della proprietà commutativa. Quindi, partendo dal caso più semplice delle matrici 2×2 e poi generalizzando si raggiungerebbero due risultati. Primo, di mostrare uno strumento matematico nuovo e molto diffuso nelle applicazioni, *e.g.* sistemi algebrici di equazioni lineari. Secondo, di motivare con argomenti di fisica relativistica l'interesse dello studente volenteroso nel nuovo strumento matematico.

La metrica di Minkowski può essere usata per alzare ed abbassare gli indici

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{x}) \tag{46}$$

e per definire il prodotto scalare di due qaudri-vettori qualsiasi U e V

$$U \cdot V = \eta_{\mu\nu} U^\mu V^\nu = U_\mu V^\mu = U^\mu V_\mu = \eta^{\mu\nu} U_\mu V_\nu \tag{47}$$

in cui $\eta^{\mu\nu}$ è la metrica inversa che coincide con $\eta_{\mu\nu}$. Le componenti con indici in alto sono dette *contro-varianti*, quelle con indici in basso *covarianti*.

Possiamo distinguere tre tipi di intervalli

- Tipo tempo: $ds^2 > 0$
- Tipo luce: $ds^2 = 0$ (cono di luce)
- Tipo spazio: $ds^2 < 0$

Ovviamente grazie all'invarianza relativistica dell'intervallo, i tre tipi non si possono mescolare in seguito a trasformazioni di Lorentz. In particolare due eventi per cui $ds^2 < 0$ tendono ad essere spazialmente separati, nel senso che esiste un sistema di riferimento nel quale sono simultanei ma avvengono in punti diversi. In maniera simile, eventi per cui $ds^2 > 0$ tendono ad essere separati temporalmente, nel senso che esiste un sistema di riferimento nel quale avvengono nello stesso punti ma in momenti diversi, tanto che l'uno può influenzare l'altro o *vice versa*. Infatti la separatrice fra i due tipi di eventi è il cono di luce, simbolo dell'Anno Mondiale della Fisica, che rappresenta la propagazione di segnali luminosi o più in generale la propagazione di tutte le particelle a massa nulla. Eventi che sono all'interno del cono di luce superiore sono causalmente connessi a, nel senso che sono influenzati da, quanto avviene nell'origine. Eventi che sono all'interno del cono di luce inferiore sono causalmente connessi a, nel senso che possono influenzare, quanto avviene nell'origine. Infine eventi che sono all'esterno del cono di luce non sono causalmente connessi all'evento origine in quanto nessun segnale può permettere la comunicazione, la separazione è spaziale.

Un volta introdotto il concetto di quadri-vettore posizione/evento e l'intervallo invariante possiamo introdurre il quadrivettore velocità. A tal fine osserviamo che l'elemento di tempo proprio non è altro che

$$d\tau = \frac{1}{c} ds \tag{48}$$

infatti nel riferimento di quiete di una particella $d\tau = dt$, mentre in un qualsiasi altro sistema di riferimento inerziale si avrà $d\tau = dt'/\gamma_u$. E' quindi naturale porre

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma c; \gamma \vec{u}) \tag{49}$$

e concludere che

$$u^2 = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = c^2 \tag{50}$$

che è manifestamente invariante per trasformazioni di Lorentz, essendo c costante universale e uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

A questo punto il gioco diventa veramente facile, definiamo quadri-impulso il quadrivettore

$$p^\mu = m_0 u^\mu = (\gamma m_0 c; \gamma m_0 \vec{u}) \equiv (E/c; \vec{p}) \tag{51}$$

con $E = mc^2$, per cui

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 \tag{52}$$

La tanto agognata equazione della Dinamica Relativistica assumerà quindi la forma

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \left(\frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt}; \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \left(\frac{\gamma}{c} P; \gamma \vec{f} \right) \tag{53}$$

nella quale P è la potenza assorbita dalla particella e $\vec{f}$ la forza su di essa esercitata.

Come abbiamo detto il concetto di forza a distanza perde senso e va sostituito con il concetto di interazione locale con il campo generato da altre particelle. In particolare la stragrande maggioranza dei fenomeni su scala umana sono di natura elettro-magnetica è quindi importante chiedersi quale sia la generalizzazione relativistica della forza di Lorentz. A tal fine osserviamo preliminarmente come non sia possibile *accomodare* campo elletrico e magnetico in un quadri-vettore, dato che $3 + 3 \neq 4$. Tuttavia questo è possibile per il quadri-potenziale per cui

$$A^\mu = (V, \vec{A}) \quad \text{con} \quad A_\mu = (V, -\vec{A}) \tag{54}$$

e per la quadricorrente per cui

$$J^\mu = (\rho c, \vec{j}) \tag{55}$$

Il fattore c è stato inserito per fare in modo che le dimensioni fisiche della componente *temporale* siano le stesse delle componenti *spaziali*. Ricordando la relazione fra campi e potenziali ed introducendo il concetto di quadri-derivata

$$\partial_\mu = (\partial_0, \vec{\nabla}) \quad \text{per cui} \quad \partial^\mu = (\partial_0, -\vec{\nabla}) \tag{56}$$

possiamo facilmente verificare che

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu} \tag{57}$$

è un tensore antisimmetrico le cui 6 componenti non-nulle sono proprio

$$F_{oi} = -\partial_0 A_i - \partial_i V = E_i \quad , \quad F_{ij} = -\partial_i A_j + \partial_j A_i = -\varepsilon_{ijk} B^k \tag{58}$$

Conseguenze immediate di queste relazione sono l'invarianza di gauge

$$\delta F_{\mu\nu} = 0 \quad \text{se} \quad \delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda \tag{59}$$

e il fatto che campi elettrici e magnetici si mescolino in seguito a trasformazioni di Lorentz. Tuttavia la forma di tali trasformazioni è assai più complicata che non per i quadri-vettori.

Le equazioni di Maxwell si possono scrivere in forma manifestamente covariante. Quelle inomogenee, contenenti le sorgenti, si combinano nelle equazioni

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{1}{c} J_\nu \tag{60}$$

da cui segue immediatamente l'equazione di continuità $\partial_\mu J^\mu = 0$. Le equazioni omogenee invece discendono da

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0 \tag{61}$$

che sono delle identità, dette di Bianchi, una volta sostituita l'espressione di $F_{\mu\nu}$ in termini di A_μ.

L'equazione delle onde si ottiene agendo con la derivata ∂_λ, antisimmetrizzando

$$\partial_\lambda \partial^\mu F_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial^\mu F_{\mu\lambda} = \frac{1}{c}(\partial_\lambda J_\nu - \partial_\lambda J_\nu) \tag{62}$$

e usando le identità di Bianchi

$$\partial^\mu (\partial_\lambda F_{\mu\nu} - \partial_\nu F_{\mu\lambda}) = \partial^\mu \partial_\mu F_{\lambda\nu} \tag{63}$$

QED

A questo punto è possibile definire la quadri-forza di Lorentz

$$f_\mu = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\nu \tag{64}$$

e controllare che, a parte un fattore γ/c, la componente temporale sia proprio

$$P = q\vec{E} \cdot \vec{u} \tag{65}$$

mentre le componenti *spaziali* porgono

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{u} \times \vec{B}) \tag{66}$$

a parte un fattore γ.

Possiamo quindi concludere che la formulazione manifestamente covariante permette di scrivere in maniera elegante e sintetica sia le equazioni di Maxwell sia l'equazione dinamica delle particelle cariche.

5 Tempi Moderni

La Relatività Speciale ha comportato due diverse linee di sviluppo.

- Da un lato, per riconciliare la Meccanica Quantistica con la Relatività è stato necessario abbandonare il concetto di singola particella e passare alla Teoria Quantistica dei Campi che permette di descrivere processo con variazioni del numero di particelle. Le particelle vanno pensate come fluttuazioni dei campi dotate di caratteristiche come la massa, lo spin o l'elicità e la carica. L'invarianza per trasformazioni di Lorentz da sola non è sufficiente a garantire l'invarianza per trasformazioni discrete come l'inversione temporale T o l'inversione spaziale, detta parità P. Quindi anche a livello micro-scopico i processi fisici non sono *reversibili.* Tuttavia, Schwinger e Zumino hanno potuto dimostrare un teorema detto Teorema CPT che sostiene che in una qualsiasi teoria di campi locali, relativisticamente invariante, il prodotto CPT dell'inversione di tutte le coordinate e simultaneamente il cambiamento di segno di tutte le cariche (non solo quella elettrica) rimane come simmetria. E' proprio questo teorema che sancisce la necessità che esista l'anti-materia, anche se in Natura o meglio nell'Universo osservabile la Materia è sicuramente predominante.

- La seconda linea di sviluppo è la Relatività Generale che come accennato descrive la dinamica della geometria dello spazio-tempo stesso. La materia ed energia curvano lo spazio-tempo. La metrica di Minkowski non è che una delle possibili metriche in uno spazio-tempo completamente vuoto. In presenza di materia e radiazione l'universo si espande e forse si ri-contrarrà. Tornando indietro nel tempo, si pensa che esso abbia avuto inizio con un *Big Bang* circa 13.7 Miliardi di anni fa. La radiazione cosmica di fondo che risulta quasi perfettamente isotropa ed omogenea tanto da comportarsi come sorta di moderno 'etere'. Infatti, si pensa che esista un'altra forma di etere invisibile, costituita da Materia Oscura. Muovendosi rispetto ad essa è possibile osservare effetti dovuti all'interazione fra le particelle di materia oscura e i nuclei presenti in enormi masse di apparati rivelatori come nell'esperimento DAMA ai Laboratori Nazionali del Gran Sasso. Il segnale mostra una caratteristica modulazione annuale dovuta alla composizione del moto della Terra con il moto del Sistema Solare all'interno della nostra Galassia, la Via Lattea.

  Ma forse i due effetti più sconvolgenti della curvatura dello spazio-tempo sono il collasso gravitazionale che porta alla formazione di Buchi Neri e la chiusura delle curve di tipo-tempo.

  I buchi neri oggetti cosi' densi che la velocità di fuga $v_f = \sqrt{2G_N M/R}$ supera la velocità della luce e quindi $R < R_S = 2G_N M/c^2$. Sull'orizzonte $R = R_S$ i coni di luce orientati verso il futuro convergono all'interno e quindi nessun segnale può classicamente lasciare il Buco Nero. Quantisticamente, Hawking ha proposto la possibilità che i Buchi Neri siano 'caldi', ossia abbiano una temperatura non-nulla, e che quindi emettano una tenue radiazione, non ancora rivelata sperimentalmente.

Infine, la dinamica dello spazio-tempo potrebbe essere cosi' intensa che le linee tipo-tempo possano chiudersi almeno in alcune regioni dello spazio-tempo. Come regalo per il suo 70-mo compleanno, Kurt Gödel, lo stesso del Teorema di Incompletezza o della prova dell'esistenza di Dio, presentò ad Einstein una soluzione che ammetteva curve chiuse tipo-tempo e quindi in principio la possibilità di viaggiare nel tempo, violando il principio di causalità. La soluzione di Gödel corrisponda ad una distribuzione regolare ma estremamente vorticosa di energia e materia. L'eccessiva rotazione ci dovrebbe consentire di invalidare soluzioni del genere ed arrivare quindi ad enunciare la Protezione Cronologica in forma di Teorema, come avviene per la positività dell'energia o l'assenza di *capelli* nei Buchi Neri, piuttosto che in forma di Principio o di Congettura, come avviene per la Censura Cosmica delle singolarità *nude*.

Si potrebbe parlare di tante altre belle cose, fra cui la super-simmetria, la super-gravità e le super-stringhe ma ... il **TEMPO** a disposizione è scaduto!

Bibliografia

- Albert Einstein, *Relatività: esposizione divulgativa*, Ed. Universale Scientifica Boringhieri, 1967, CL 61-7024-2
- Galileo Galilei, *Dialogo dei Massimi Sistemi*, Ed. Arnoldo Mondadori, 1996, Serie Oscar Grandi Classici, ISBN 88-04-40725-5 (I edizione 1632)
- Stephen Hawking, *Dal Big-Bang ai Buchi Neri - Breve storia del tempo*, Ed. Rizzoli, 1998, ISBN 88-17-85343-7
- Anna Parisi e Lara Albanese, *Dipende. Einstein e la teoria della relatività*, Ed. Lapis, Serie *Ah, saperlo!*, 2006 ISBN: 8878740357 ISBN 13: 9788878740358
- Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Chapters 15-17, Ed. Addison-Wesley, 1963, ISBN 0-201-02116-1-P